7 CAMPO ELÉCTRICO

7.1. FENÓMENOS DE ELECTRIZACIÓN

1. Un péndulo electrostático es un dispositivo formado por una esfera ligera, de material aislante, suspendida de un hilo de masa despreciable. Utilizando ese dispositivo, explica los siguientes fenómenos:

a) Si acercamos al péndulo una barra de ámbar, de plástico o de ebonita frotada previamente con lana, se atraen, pero, si entran en contacto, se repelen.

b) Si repetimos la experiencia con una barra de vidrio que hemos frotado con una tela de seda, se produce de nuevo el mismo fenómeno.

c) Si, previamente frotadas, aproximamos simultáneamente la barra de ámbar y la barra de vidrio al péndulo, sin que las dos barras estén en contacto, sobre el péndulo no se produce ningún efecto.

d) Al acercar dos péndulos que han estado en contacto con sendas barras de ámbar o de vidrio frotadas, se repelen. Pero si uno de los péndulos ha estado en contacto con una barra de vidrio y el otro con una barra de ámbar, ambas frotadas, al acercarlos se atraen.

Para interpretar los fenómenos que describe el enunciado, hemos de suponer que, al frotarlas, las barras adquieren una propiedad a la que denominamos carga eléctrica. Teniendo esto en cuenta:

a) La carga que adquiera la barra de ámbar, plástico o ebonita es negativa; al acercarla al péndulo atrae electrostáticamente las cargas positivas inducidas en este (cuerpo inicialmente neutro a nivel electrostático). Cuando se tocan la barra y el péndulo, se transfieren electrones a este último, que ya no será neutro. Se produce entonces una repulsión electrostática.

b) La carga que adquiere el vidrio es positiva. La atracción se produce en este caso entre ella y la carga negativa que induce en el péndulo, y la repulsión, entre cargas positivas después de entrar en contacto la barra y el péndulo.

c) Ello es debido a la existencia de dos tipos opuestos de carga: negativa, la que adquiere el ámbar, y positiva, la que adquiere el vidrio tras frotarlos.

d) Este fenómeno confirma la existencia de dos tipos opuestos de carga. En el primer caso, se repelen, ya que a ambos péndulos se les ha transferido el mismo tipo de carga (negativa el ámbar, y positiva, el vidrio); en el segundo caso, el vidrio transfiere a un péndulo carga positiva y el ámbar, al otro, carga negativa, por lo que se atraen electrostáticamente.

7.2. LEY DE COULOMB

1. La distancia que separa entre sí los dos protones de un núcleo de helio es del orden de 1 fm (10^{-15} m):

a) Calcula el módulo de la fuerza que ejerce cada uno de los protones sobre el otro.

b) Esta fuerza, ¿es de atracción o de repulsión?

Dato: q_p = 1,6 · 10^{-19} C

a) El módulo de la fuerza que ejercen entre sí dos cargas eléctricas viene dado por:

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(1 \cdot 10^{-15})^2} = 230,4 \text{ N}$$

b) La fuerza es de repulsión, dado que las cargas son del mismo signo, positivo.

2. ¿Cómo podemos justificar la estabilidad nuclear de un átomo que tenga más de un protón en el núcleo?

La estabilidad nuclear es producida por la fuerza nuclear fuerte, que mantiene unidos entre sí los nucleones, a pesar de la repulsión electrostática. Estudiamos esta interacción en la última parte del libro, en la unidad de física atómica y nuclear.

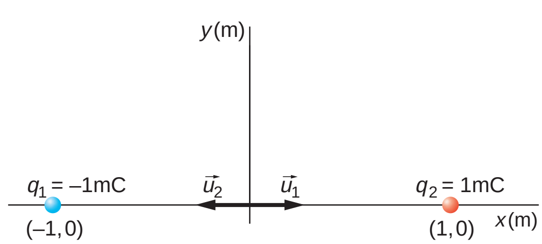
Si mantenemos constantes las demás variables (tipo de partículas, carga, masa y distancia a que se encuentran), la intensidad de la fuerza nuclear fuerte que actúa entre dos partículas es más de cien veces superior a la intensidad de la fuerza electrostática.

7.3. INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO

1. Calcula la intensidad del campo eléctrico que crea en el origen del sistema de referencia un dipolo formado por dos cargas, de +1 mC y –1 mC, situadas en (1,0) m y (–1,0) m, respectivamente.

Si colocamos en el origen del sistema de referencia una carga de 5 mC, ¿a qué fuerza eléctrica estará sometida?

La representación esquemática de la situación física que plantea el enunciado de la actividad es la siguiente:



En primer lugar, calculamos los vectores unitarios que unen las cargas con el origen del sistema de referencia:

$$\vec{u}_1 = 1 \cdot \vec{i}$$
$$\vec{u}_2 = -1 \cdot \vec{i}$$

La intensidad del campo eléctrico es una magnitud aditiva, por lo que, aplicando el principio de superposición en el origen del sistema de referencia, tendremos:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{2} = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-1 \cdot 10^{-3}}{1^2} \cdot \vec{i} + \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1^2} \cdot \left(-1 \cdot \vec{i}\right) = -18 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} \right)$$

La fuerza eléctrica a que estará sometida una carga de 5 mC situada en el origen del sistema de referencia será:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{F} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^6 \cdot (-\vec{i}\,) = -9 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

2. Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano *XOY* en los que se anula el campo eléctrico que crean dos cargas iguales situadas en (1,0) m y (–1,0) m.

Para resolver la actividad, ¿necesitas conocer el valor de las cargas? ¿Y el medio en que se encuentran? ¿Por qué?

La posición de las cargas es la misma que la representada en la actividad anterior, pero en este caso las dos cargas tienen idéntico valor y signo.

El campo eléctrico creado en cada punto por las dos cargas es la suma de los campos creados por cada una de ellas en ese punto, por lo que podemos aplicar el principio de superposición para calcular la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{2} \vec{E}_i = K \cdot \left(\frac{Q}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{Q}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \right) = K \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 \right)$$

donde hemos tenido en cuenta que las dos cargas son iguales.

Por tanto, en los puntos en que se anula el campo eléctrico tenemos:

$$E_T = 0 \rightarrow \frac{1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 = 0$$

Es fácil comprobar que el único punto para el que se cumple esta relación es el punto medio entre las dos cargas, que en este caso es el origen de coordenadas, para el cual:

$$r_1 = r_2$$
$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$$

No es necesario conocer el valor de las cargas ni el medio en que se encuentran, puesto que, como vimos en la actividad anterior, estos dos valores afectan proporcionalmente al campo eléctrico creado por las dos cargas.

7.4. POTENCIAL ELÉCTRICO

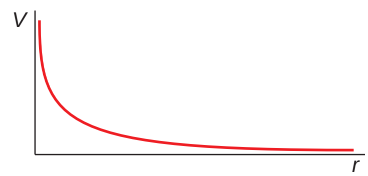
1. Explica el concepto de potencial eléctrico. ¿Qué potencial eléctrico crea una carga puntual? Dibuja en un sistema de coordenadas, de forma aproximada, cómo varía el potencial con la distancia a la carga. Dibuja sus superficies equipotenciales.

El potencial eléctrico de un punto situado en el seno de un campo eléctrico es la energía potencial que posee la unidad de carga positiva en el punto:

$$V = K \cdot \frac{q}{r}$$

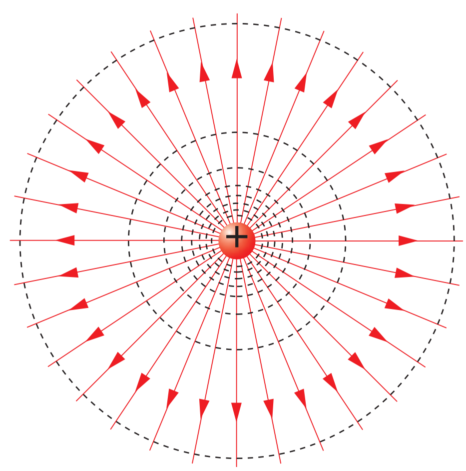
A diferencia del campo eléctrico o la fuerza eléctrica, el potencial eléctrico es una magnitud escalar; su signo es el mismo que el de la carga que crea el campo.

La representación gráfica aproximada de la variación del potencial eléctrico con la distancia a la carga puntual que crea el campo es la que se muestra a continuación:



En este caso, hemos considerado que la carga puntual que crea el campo es positiva. Observa que el potencial eléctrico se anula a una distancia infinita de la carga que lo crea.

Las superficies equipotenciales (líneas grises discontinuas) asociadas a una carga puntual positiva son las que se muestran en la siguiente ilustración:



2. Sean dos cargas puntuales a las que se mantiene en reposo y separadas cierta distancia. Si el potencial en los puntos del espacio que equidistan de las dos cargas es nulo, ¿qué se puede afirmar acerca de las cargas?

El potencial eléctrico que crea una carga puntual Q en un punto situado en el seno de un campo eléctrico a una distancia r es:

$$V = \frac{K \cdot Q}{r}$$

De acuerdo con el principio de superposición, el potencial creado por ambas cargas es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{K \cdot Q_1}{r_1} + \frac{K \cdot Q_2}{r_2}$$

Si imponemos la condición que indica el enunciado del problema, se obtiene:

$$r_1 = r_2 = r \rightarrow V = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 0 \rightarrow Q_1 = -Q_2$$

Por tanto, las dos cargas, iguales en valor y de signo opuesto, separadas una cierta distancia, forman un dipolo eléctrico.

7.5. TEOREMA DE GAUSS

1. Dado un campo vectorial definido en cada punto por el vector:

$$\vec{A} = K \cdot \frac{\vec{u}_r}{r^3}$$

en el que *K* es una constante:

a) Calcula el flujo de dicho campo a través de una superficie esférica centrada en el origen de coordenadas, de radio 3 cm.

b) Resuelve de nuevo el apartado anterior suponiendo ahora que el radio de la esfera es de 4 centímetros.

c) ¿Se crean, o desaparecen líneas de campo entre ambas esferas? Ten en cuenta los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores antes de responder.

d) ¿Es conservativo el campo de fuerzas derivado de dicho campo vectorial?

a) Para calcular el flujo, utilizamos la expresión:

$$\phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

El vector superficie tiene dirección radial, al igual que el vector campo; es decir, ambos vectores son paralelos. Por tanto:

$$d\,\phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A \cdot dS \cdot cos\ 0° = A \cdot dS \rightarrow$$
$$\rightarrow \phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S} = A \cdot \int dS = A \cdot S = A \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 =$$
$$= \frac{K}{r^3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot K}{r}$$

Para $r = 3$ obtenemos:

$$\phi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot K \text{ Wb}$$

b) Del mismo modo, para $r = 4$:

$$\phi = \pi \cdot K \text{ Wb}$$

c) En los apartados anteriores se ha obtenido un valor para el flujo que disminuye con la distancia. Teniendo en cuenta que el flujo es proporcional a las líneas de fuerza del campo que atraviesan la superficie, en este caso desaparecen líneas de fuerza al pasar de la primera a la segunda esfera.

d) El resultado obtenido en el apartado anterior nos permite afirmar que el campo de fuerzas no es conservativo.

7.6. APLICACIONES DEL TEOREMA DE GAUSS

1. Calcula, aplicando el teorema de Gauss, el valor de la intensidad que corresponde a los siguientes campos:

a) Campo gravitatorio creado por una esfera maciza y homogénea, de radio *R* y masa *M*, en puntos situados en su interior.

b) Campo eléctrico creado por una carga esférica homogénea, de carga *Q* y radio *R*, en puntos situados en su interior.

c) Campo eléctrico que crea la carga anterior en puntos situados en su exterior.

a) El teorema de Gauss se puede aplicar al cálculo del campo eléctrico y del gravitatorio. De acuerdo con este teorema, en un campo vectorial conservativo, como el campo gravitatorio, el flujo que atraviesa una superficie cerrada es constante:

$$\Phi_g = \int_{sup.\ cerrada} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \text{cte}$$

Los puntos situados en el interior de la esfera cumplen la relación: $r < R$.

El campo gravitatorio que crea una esfera de radio R es conocido. Por tanto, podemos calcular el valor de la constante que aparece en la expresión anterior:

$$\Phi_g = \int_{esfera} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g \int_{esfera} dS = -G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \vec{u}_r \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \vec{u}_R = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M$$

El campo gravitatorio creado en puntos situados en el interior de la esfera será, entonces:

$$\Phi_g = \int_{esfera} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_{esfera} g \cdot dS \cdot cos\, 180° = -\int_{esfera} g \cdot dS$$

$$\Phi_g = \text{cte} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M_{int} = -\int_{esfera} g \cdot ds = -g \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$g = G \cdot \frac{M_{int}}{r^2} \quad ; \quad r < R$$

En forma vectorial:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M_{int}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad ; \quad r < R$$

b) La carga se reparte por la superficie; al ser nula la carga encerrada, el campo eléctrico en el interior, de acuerdo con el teorema de Gauss, es nulo.

c) En el exterior de la carga, $r > R$. Por tanto, aplicando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon} = \int_{esfera} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{esfera} E \cdot dS \cdot cos\ 0° = \int_{esfera} E \cdot dS = E \cdot \int_{esfera} dS =$$

$$= E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \rightarrow E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \ ; \ r > R$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Explica el concepto de campo eléctrico creado por una o por varias partículas cargadas.

Se denomina campo eléctrico a cualquier región del espacio en la que una carga eléctrica está sometida a una fuerza eléctrica. La intensidad de campo eléctrico, $\vec{E}$, en un punto es la relación que existe entre la fuerza que el campo ejerce sobre una carga situada en dicho punto y dicha carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Para calcular la intensidad del campo eléctrico creado por varias cargas puntuales, podemos hacer uso del principio de superposición:

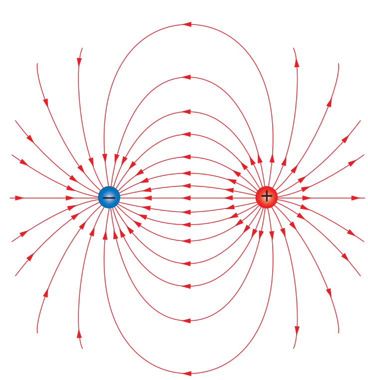
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

2. ¿Qué es una línea de fuerza de un campo eléctrico?

Las líneas de fuerza de un campo eléctrico son aquellas en las que el vector campo eléctrico, $\vec{E}$, es tangente a ellas en cada punto del campo.

3. Dibuja las líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico creado por dos cargas: una, Q_1, positiva, y la otra, Q_2, negativa, separadas una cierta distancia.

Las líneas de fuerza que solicita el enunciado de la cuestión son las que se muestran en la siguiente ilustración:



4. Enuncia el teorema de Gauss. Utilizando este teorema, comprueba que una esfera cargada eléctricamente se comporta en su exterior como una carga puntual situada en su centro.

El teorema de Gauss establece que en un campo vectorial conservativo, el flujo que atraviesa una superficie cerrada es constante.

De acuerdo con lo obtenido en la resolución del apartado c) de la actividad propuesta en la página 181 del libro del alumno y con lo explicado en el primer apartado de la página 180, la expresión que corresponde al campo eléctrico creado en ambos casos es la misma:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

5. Discute la siguiente afirmación: "Una carga o una masa en movimiento se mueve, en presencia de un campo eléctrico o gravitatorio, siguiendo las trayectorias de las líneas del campo".

Las líneas de fuerza del campo eléctrico son aquellas en las que el vector campo eléctrico, $\vec{E}$, es tangente a ellas en cada punto del campo. Del mismo modo, en el caso del campo gravitatorio, $\vec{g}$, dicho vector será tangente a ellas en cada punto.

Si tenemos en cuenta las expresiones que corresponden a las fuerzas eléctrica y gravitatoria que se ejercen, respectivamente, sobre una carga q y una masa m:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$$

Se observa que estas actúan sobre la carga o la masa en la misma dirección que el campo correspondiente; por tanto, la afirmación que expone el enunciado de la cuestión es verdadera. En el caso del campo eléctrico, el sentido del movimiento depende del signo de la carga.

6. Explica el concepto de energía potencial eléctrica y calcula la que tiene una partícula de carga q_2 situada a una distancia r de otra carga q_1.

La energía potencial eléctrica que posee una carga q situada en un punto, r, situado en el seno de un campo eléctrico es el producto de dicha carga por el potencial eléctrico existente en ese punto:

$$E_p = q \cdot V(\vec{r})$$

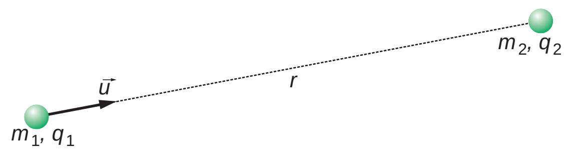
La energía potencial que corresponde a una partícula de carga q_2 situada a una distancia r de otra carga, q_2, es:

$$E_p = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$$

7. Un electrón, inicialmente en reposo, se pone en movimiento mediante la aplicación de un campo eléctrico uniforme. ¿Se desplazará hacia regiones de mayor o de menor potencial electrostático? ¿Qué ocurrirá si consideramos un protón?

Los electrones se desplazan, espontáneamente, a regiones de mayor potencial, y los protones, a regiones de menor potencial.

8. Se tienen dos partículas de masas m_1 y m_2 y cargas q_1 y q_2 del mismo signo, como se indica:



Escribe, para la partícula m_1, la ley de fuerzas de la gravitación universal y la ley de Coulomb. Comenta las diferencias fundamentales que existen entre ambas leyes.

La expresión de la fuerza de atracción gravitatoria sobre m_1, es:

$$\vec{F}_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Y la que corresponde a la fuerza de atracción electrostática:

$$\vec{F}_e = -K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Las diferencias fundamentales que existen entre ambas leyes son:

- El campo gravitatorio tiene siempre el mismo sentido; las líneas de fuerza siempre se dirigen hacia la masa que lo crea. Por su parte, el campo eléctrico tiene dos sentidos, que dependen del signo de la carga que lo crea: si es positiva, las líneas de fuerza salen de la carga, y, si es negativa, las líneas de fuerza entran en ella.
- Al ser G una constante universal, el campo gravitatorio creado por un cuerpo es independiente del medio que lo rodea (la interacción gravitatoria no es debilitada por el medio), lo que no ocurre con el campo eléctrico, que depende de la constante dieléctrica del medio.
- Las fuerzas de interacción son siempre atractivas en el caso del campo gravitatorio, y en el caso del campo eléctrico pueden ser atractivas o repulsivas, dependiendo del signo de las cargas eléctricas.
- Si comparamos los valores de G y de K, encontramos que, para masas y cargas cuyo valor sea la unidad, la fuerza de interacción electrostática es mucho mayor que la gravitatoria:
  - Fuerza gravitatoria:

$$F_g = G \cdot \frac{m \cdot m}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

  - Fuerza electrostática:

$$F_e = K \cdot \frac{q \cdot q}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

9. En un campo eléctrico constante de signo positivo, el potencial eléctrico:

a) Es nulo.

b) Es constante.

c) Disminuye de forma constante.

d) Aumenta de forma constante.

e) Disminuye con el cuadrado de la distancia.

El campo y el potencial están relacionados mediante la siguiente expresión:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si el campo es constante y el desplazamiento es en el sentido de $\vec{E}$:

$$dV = -E \cdot dr \rightarrow \int dV = -E \cdot \int dr \rightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta r$$

Si el campo eléctrico es constante, el potencial disminuye linealmente con la distancia. La respuesta correcta es **c).**

10. Una partícula cargada se desplaza en la dirección de un campo eléctrico, de forma que su energía potencial aumenta. ¿Qué signo tiene la carga?

La relación entre la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico es:

$$E_p = q \cdot V$$

Consideremos dos puntos, *A* y *B,* pertenecientes al campo eléctrico. Se ha de cumplir la condición de que:

$$\Delta E_p = q \cdot V_2 - q \cdot V_1 = q \cdot (V_2 - V_1) > 0$$

– Si se tratara de un protón, que se mueve espontáneamente a regiones de menor potencial:

$$V_2 < V_1 \rightarrow V_2 - V_1 < 0$$

Como $q > 0$, se obtendría que su energía potencial disminuiría:

$$\Delta E_p < 0$$

– En el caso de un electrón, que se desplaza espontáneamente a zonas de mayor potencial:

$$V_2 > V_1 \rightarrow V_2 - V_1 > 0$$

Como en este caso $q < 0$, su energía potencial también disminuiría:

$$\Delta E_p < 0$$

Por tanto, para que la energía potencial aumente, se ha de realizar trabajo sobre la carga. En ese caso, si la carga se dirige hacia potenciales crecientes, se trataría de un protón, y si lo hace hacia potenciales decrecientes, un electrón.

Si suponemos que la partícula, además de moverse en la misma dirección del campo, lo hace en el mismo sentido, lo hará hacia potenciales decrecientes; se trataría, por tanto, de una partícula cargada negativamente.

11. Si un electrón se mueve en la misma dirección y sentido que el correspondiente a las líneas de campo de un campo eléctrico uniforme, su energía potencial ¿aumentará, disminuirá o permanecerá constante? ¿Y si se mueve en dirección perpendicular a las líneas del campo eléctrico? Justifica ambas respuestas.

Como se ha explicado en la cuestión anterior, será necesario realizar un trabajo externo sobre el electrón, que quedará almacenado en forma de energía potencial que, por tanto, aumentará.

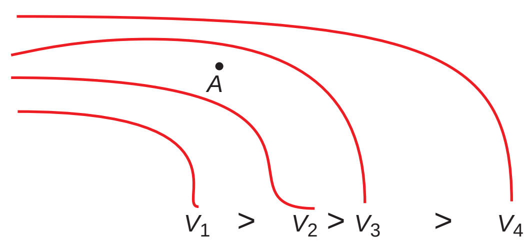
Si el electrón se mueve en dirección perpendicular a la del campo eléctrico, lo estará haciendo sobre una superficie equipotencial. Por tanto, su energía potencial no variará.

12. Analiza cómo son las líneas de fuerza del campo eléctrico producido por un hilo rectilíneo infinito y uniformemente cargado.

Como el hilo que se propone es infinitamente largo, las líneas de fuerza del campo eléctrico que crea serán, por simetría, radiales y dirigidas hacia fuera, si la densidad lineal de carga es positiva, y hacia dentro si esta es negativa.

NOTA: para completar esta cuestión, se sugiere la lectura del segundo apartado de la página 180 del libro del alumno.

13. En la figura se representan algunas superficies, correspondientes a una zona del espacio donde existe un campo electrostático.



a) ¿Qué dirección y sentido tendrán las líneas del citado campo eléctrico?

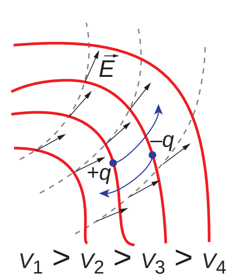
b) En el instante inicial, $t = 0$, situamos un electrón en el punto A y, desde el reposo, se deja en libertad. Calcula la dirección y el sentido de la trayectoria inicial que seguirá.

c) Una carga eléctrica, ¿se moverá siempre a lo largo de una línea del campo? Justifica la respuesta.

a) En las superficies que muestra la figura, el potencial eléctrico se mantiene constante. Las líneas de fuerza del campo eléctrico y, por tanto, la intensidad del campo eléctrico, son perpendiculares a las superficies equipotenciales con las que se cortan, ya que, en ellas:

$$V = \text{cte} \rightarrow dV = 0 \rightarrow -dV = 0 = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot dr \cdot \cos\theta \rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$$

La dirección y el sentido de las líneas del campo eléctrico son los que se muestran en la siguiente ilustración:



Como se observa, las líneas del campo eléctrico son líneas tangentes en cada punto al vector campo. Una carga positiva colocada en un punto de cualquiera de ellas seguirá el camino marcado por la línea de fuerza. Las cargas positivas se dirigen hacia potenciales decrecientes y las negativas, hacia potenciales crecientes.

b) De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, se moverá en una dirección perpendicular a la superficie equipotencial en el punto *A,* y su sentido estará dirigido hacia los potenciales crecientes.

c) Sí; las líneas de campo son las que indican el camino que seguirán las cargas eléctricas en su movimiento.

14. ¿Cómo es el campo eléctrico en el interior de una esfera metálica cargada? ¿Y el potencial?

De acuerdo con el teorema de Gauss:

$$\phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Como la carga encerrada por la esfera metálica es nula (recuerda que la carga se distribuye uniformemente por la superficie de la esfera), el flujo eléctrico que la atraviesa es nulo, y, en consecuencia, el campo eléctrico en su interior también lo será.

Si tenemos en cuenta la relación entre el campo eléctrico y el potencial eléctrico:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \text{Si } \vec{E} = 0 \rightarrow dV = 0 \rightarrow V = \text{cte}$$

Como en el interior de la esfera el campo eléctrico es nulo, el trabajo necesario para llevar una carga desde el infinito hasta cualquier punto del interior de la esfera coincide con el trabajo necesario para llevarla hasta su superficie. Por tanto, si consideramos que el radio de la esfera es *R,* el potencial eléctrico en cualquier punto de su interior es:

$$V(r) = V(R) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

15. Cierta distribución de cargas, que se encuentra en el interior de una esfera de 1 m de radio, crea un campo eléctrico, perpendicular en todo momento a la superficie de la esfera, que viene dado por:

$$\boldsymbol{E = E_0 \cdot \frac{1}{r^2}}$$

siendo $E_0 = 1\,000$ V · m^{-1} y r la distancia a que nos encontramos del centro de la esfera.

Calcula la carga que existe en el interior de la esfera, suponiendo que está en el vacío.

En la superficie de la esfera, $r = R$. Por tanto, el campo eléctrico en su superficie es:

$$E(r = R) = E_0 \cdot \frac{1}{R^2}$$

Aplicando el teorema de Gauss a la superficie esférica:

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = \frac{E_0}{R^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = E_0 \cdot 4 \cdot \pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Despejando la carga Q, y sustituyendo los datos del enunciado:

$$Q = E_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 = 1\,000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8{,}84 \cdot 10^{-12} = 1{,}11 \cdot 10^{-7}\ \text{C} = 0{,}11\ \mu\text{C}$$

EJERCICIOS

16. Calcula la intensidad del campo y el potencial en un punto distante 4 metros de una carga puntual de $6 \cdot 10^{-6}$ C situada en el vacío. Dato: $K = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

La intensidad del campo eléctrico que crea la carga puntual es:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{4^2} \cdot \vec{u}_r = 3\,375 \cdot \vec{u}_r\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

En ella, el vector $\vec{u}_r$, es un vector unitario situado en la recta que une la carga y el punto; al tratarse de una carga positiva, el campo eléctrico sale de ella.

Por su parte, el valor del potencial eléctrico, que es una magnitud escalar, es:

$$V = K \cdot \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{4} = 13\,500\ \text{V}$$

17. Una carga eléctrica de 4 C es llevada desde un punto, donde existe un potencial de 15 V, a otro cuyo potencial es 40 V. Indica si gana o pierde energía y cuánta.

El trabajo necesario para llevar una carga eléctrica de un punto de un campo eléctrico a otro que se encuentra a distinto potencial es:

$$W = -q \cdot (V_2 - V_1)$$

En este caso:

$$W = -4 \cdot (40 - 15) = -100\ \text{J} \quad ; \quad W = -\Delta E_P \rightarrow E_{P_2} - E_{P_1} = 100\ \text{J}$$

El trabajo negativo indica que la carga no se traslada espontáneamente hacia el punto, sino que, como indica el enunciado, "la carga es llevada"; es decir, se realiza un trabajo sobre ella que aumenta su energía potencial. Por tanto, gana energía a expensas del trabajo exterior realizado sobre ella.

18. En el sistema de encendido de un motor de coche hay dos electrodos separados 0,7 mm. Si el aire comienza a ionizarse cuando el campo eléctrico alcanza un valor de $3{,}5 \cdot 10^6\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$, ¿cuál es la diferencia de potencial que hemos de aplicar entre los dos electrodos para que se produzca la chispa?

El objetivo del encendido es provocar una chispa que haga detonar la mezcla aire-gasolina que se encuentra en el interior del cilindro. Para ello, el campo eléctrico entre los electrodos ha de ser suficientemente intenso. De este modo, se ioniza el aire y se establece una corriente de cargas eléctricas a través de él.

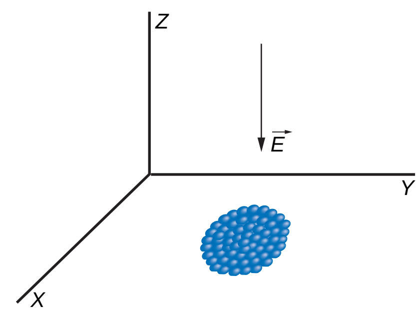
Los dos electrodos y el aire que se encuentra entre ellos, que actúa como dieléctrico, forman un condensador. Por ello, el fenómeno consistente en ionizar el aire se denomina también "perforar el dieléctrico".

La diferencia de potencial mínima que debemos aplicar en este caso es:

$$\Delta V = \Delta r \cdot E = 0{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{6} = 2\,450 \text{ V}$$

19. Cerca de la superficie de la Tierra, el campo eléctrico tiene un valor aproximado de 150 N · C^{-1}, y está dirigido hacia el centro de esta. Calcula el valor de la fuerza (módulo, dirección y sentido) que experimenta el núcleo de un átomo de plomo, que contiene 82 protones (q_p = 1,6 · 10^{-19} C), al encontrarse sobre la superficie terrestre.

La situación que describe el problema es la que se muestra en la figura.



La relación entre fuerza y campo eléctrico es:

$$\vec{F}_{eléctrica} = q \cdot \vec{E}$$

Teniendo en cuenta la carga del núcleo del átomo de plomo, así como la dirección y el sentido del vector campo, resulta:

$$\vec{F}_{eléctrica} = q \cdot \vec{E} = 82 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-150 \cdot \vec{k}) =$$
$$= -1{,}968 \cdot 10^{-15} \cdot \vec{k} \text{ N}$$

20. El núcleo de un átomo de plata tiene carga positiva, debido a los 47 protones que lo forman. Calcula el potencial que crea esta carga en un punto situado a 6 · 10^{-13} m del centro del núcleo.

Debido a la proximidad a la que se encuentran unos de otros, supondremos el conjunto de protones como una carga puntual. El potencial que crea esta carga viene dado por:

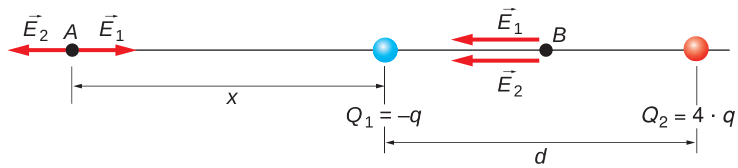
$$V = K \cdot \frac{q}{r}$$

Teniendo en cuenta que la carga de un protón es q = 1,6 · 10^{-19} C, el potencial será:

$$V = 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{47 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6 \cdot 10^{-13}} = 112\,800 \text{ V}$$

21. Sean dos cargas puntuales $Q_1 = -q$ y $Q_2 = +4 \cdot q$ colocadas a una distancia *d*. Razona y obtén en qué punto de la línea definida por las dos cargas el campo es nulo.

El punto que cumple la condición que solicita el enunciado del ejercicio será aquel en el que el vector campo creado por cada carga tenga el mismo valor y sus sentidos sean opuestos. De acuerdo con la siguiente figura:



Ese punto se encuentra fuera del segmento que une ambas cargas.

En el punto A, representado en la figura anterior, el módulo del campo eléctrico creado por cada carga es:

$$E_1 = K \cdot \frac{q}{x^2} \quad ; \quad E_2 = K \cdot \frac{4 \cdot q}{(d + x)^2}$$

Si igualamos ambos módulos y despejamos el valor de la distancia, x, obtenemos:

$$E_1 = E_2 \rightarrow K \cdot \frac{q}{x^2} = K \cdot \frac{4 \cdot q}{(d + x)^2} \rightarrow \frac{(d + x)^2}{x^2} = 4$$

$$3 \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot x - d^2 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$x_1 = d \quad ; \quad x_2 = -\frac{d}{3}$$

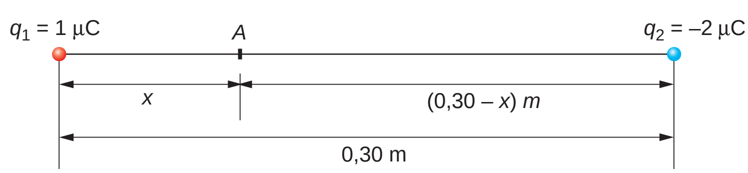
Desde el punto de vista físico, la solución válida es la primera; por tanto:

$$x = d$$

22. Considera dos cargas puntuales fijas $q_1 = 1$ µC y $q_2 = -2$ µC separadas una distancia $L = 30$ cm. Determina la distancia a q_1 del punto sobre la recta que une ambas cargas donde el potencial eléctrico es nulo. ¿Es también nulo allí el campo eléctrico?

El potencial eléctrico es una magnitud escalar que tiene el mismo signo que la carga que crea el campo; para calcular el potencial eléctrico creado por varias cargas puntuales, se puede aplicar el principio de superposición.

De acuerdo con el siguiente esquema:



el potencial creado en el punto A será:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{Q_1}{x} + K \cdot \frac{Q_2}{0{,}3 - x}$$

Si imponemos la condición de que el potencial eléctrico se anula en ese punto:

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{x} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 - x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-2}{0{,}3 - x} \rightarrow 0{,}3 - x = 2 \cdot x \rightarrow x = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1 \text{ m}$$

Por tanto, el potencial eléctrico se anula a 0,1 m de la carga positiva.

En cuanto al campo eléctrico, observa, que, en cualquier punto del segmento que une ambas cargas, el campo eléctrico que crean está dirigido hacia la derecha; por tanto, nunca será nulo el campo en ningún punto perteneciente a este segmento.

En particular, en el punto *A,* el módulo del campo eléctrico creado por ambas cargas es:

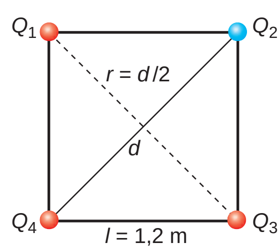
$$E = E_1 + E_2 = K \cdot \frac{Q_1}{x^2} + K \cdot \frac{Q_2}{(0{,}3 - x)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}1^2} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(0{,}3 - 0{,}1)^2}\right) = 1{,}35 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Su sentido está dirigido hacia la derecha.

23. Cuatro cargas eléctricas de 10 nC, –12 nC, 20 nC y 25 nC están colocadas en los vértices de un cuadrado de 1,2 m de lado. Calcula el valor del potencial eléctrico en el centro del cuadrado.

El potencial eléctrico es una magnitud escalar cuyo valor podemos obtener sumando algebraicamente los potenciales eléctricos creados por cada carga.

De acuerdo con la siguiente figura:



El valor de la distancia que separa cada carga del centro del cuadrado es:

$$r = \frac{d}{2} \quad ; \quad d^2 = 1{,}2^2 + 1{,}2^2 \rightarrow d = 1{,}2 \cdot \sqrt{2} \text{ m} \quad ; \quad r = \frac{1{,}2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0{,}85 \text{ m}$$

Por tanto, el valor del potencial eléctrico en el centro del cuadrado es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2} + K \cdot \frac{Q_3}{r_3} + K \cdot \frac{Q_4}{r_4} =$$

$$= \frac{K}{r} \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) = \frac{9 \cdot 10^9}{0{,}85} \cdot (10 - 12 + 20 + 25) \cdot 10^{-9} = 456{,}08 \text{ V}$$

24. ¿Qué velocidad alcanzará una partícula cuya carga es 10^{-6} C y cuya masa es $2 \cdot 10^{-18}$ kg al desplazarse, partiendo del reposo, entre dos puntos donde existe una diferencia de potencial de 10^2 V?

El trabajo que realizan las fuerzas del campo eléctrico sobre la carga es:

$$W = q \cdot \Delta V$$

Ese trabajo se invierte en aumentar la energía cinética de la partícula:

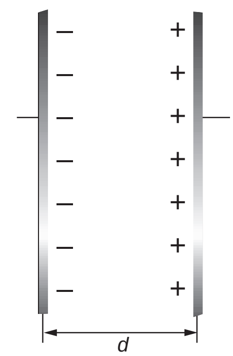
$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Igualando ambas expresions y despejando el valor de la velocidad, obtenemos:

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}}$$

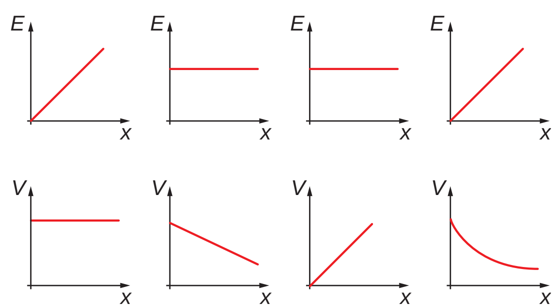
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-18}}} = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

25. La figura representa un condensador de placas paralelas.



¿En cuál de las gráficas se muestra cómo varían el campo eléctrico y el potencial eléctrico con la distancia, si tomamos como origen de potenciales la placa negativa?

a) **b)** **c)** **d)**



El campo eléctrico que existe en un condensador de placas paralelas puede considerarse constante. Por tanto:

$$dV = -E \cdot dr \rightarrow \int dV = -E \cdot \int dr \rightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta r$$

Es decir, cuando el campo eléctrico es constante, el potencial varía linealmente con la distancia. En nuestro caso, tomamos la placa negativa como origen de potenciales ($V = 0$) y de distancia, estando la placa cargada positivamente a potencial superior. Por tanto:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E \cdot dr \cdot \cos 180° = E \cdot dr \rightarrow V = E \cdot r$$

Al alejarnos de la placa negativa, el potencial aumenta linealmente, desde $V = 0$, permaneciendo constante el campo en el interior del condensador. La gráfica correcta es **c)**.

26. Una partícula cargada con $6 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de $500 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ dirigido en sentido positivo del eje *OY*:

a) Describe la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto *A*, situado a 2 m del origen. ¿Aumenta o disminuye

la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento? ¿En qué se convierte dicha variación de energía?

b) Calcula el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto *A*.

a) Supongamos un sistema de coordenadas *OXY* centrado en la carga, que se encuentra en el punto (0, 0). Como la carga es positiva y el campo se encuentra dirigido en el sentido positivo del eje *OY,* la fuerza eléctrica que actuará sobre ella será:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{F} = q \cdot E \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F} = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot \vec{j} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

Por tanto, la partícula se mueve en sentido positivo del eje de ordenadas.

Las coordenadas del punto *A* son: *A*(0, 2) m. Las cargas positivas se dirigen espontáneamente hacia potenciales decrecientes; por tanto, su energía potencial disminuye, incrementando su energía cinética (aumenta su velocidad). El movimiento que realiza es un m.r.u.a., ya que la fuerza es constante, al ser el campo eléctrico uniforme.

b) El trabajo realizado por la fuerza eléctrica constante calculada en el apartado anterior es:

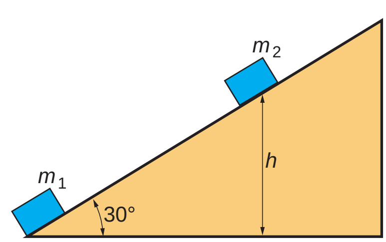
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0° = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Ese trabajo coincide con la diferencia de potencial (con signo cambiado) entre los dos puntos del campo considerados multiplicada por el valor de la carga:

$$W = -q \cdot (V_2 - V_1) \rightarrow V_2 - V_1 = \frac{W}{-q} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{-6 \cdot 10^{-6}} = -1\,000\ \text{V}$$

Observa que $V_2 < V_1$, lo cual es lógico, ya que la carga positiva se desplaza espontáneamente hacia potenciales decrecientes.

27. En el plano inclinado de la figura, en el que se pueden despreciar los rozamientos, se encuentran dos masas de 1 g cada una. Una de ellas, m_1, se encuentra fija en la base del plano, mientras que la otra, m_2, permanece, sin caer, a cierta altura, *h*. Si ambas masas tienen una carga positiva de 1 mC, calcula el valor de *h*.



La masa m_2 no se mueve, debido al equilibrio de fuerzas entre la componente del peso en la dirección del plano inclinado, que la haría caer, y la fuerza electrostática de repulsión, que la aleja de la otra carga:

$$F_{eléctrica} = P_x$$

Los valores de estas dos fuerzas son:

$$F_{eléctrica} = K \cdot \frac{q^2}{l^2}$$
$$P_x = m \cdot g \cdot sen\ 30°$$

Por tanto:

$$K \cdot \frac{q^2}{l^2} = m \cdot g \cdot sen\ 30°$$

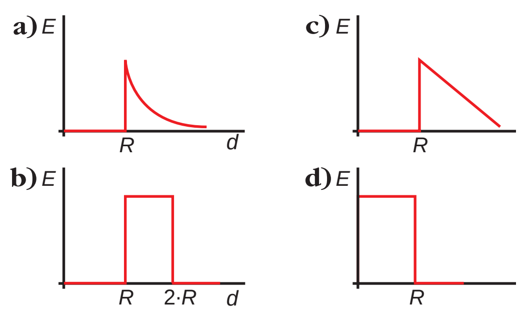
Despejando, obtenemos la distancia, l, que separa ambas masas:

$$l = \sqrt{K \cdot \frac{q^2}{m \cdot g \cdot sen\ 30°}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{(10^{-3})^2}{10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}} = 1\,354{,}57 \text{ m}$$

Por tanto, la masa 2 se encuentra a una altura:

$$h = l \cdot sen\ 30° = 1\,354{,}57 \cdot 0{,}5 = 677{,}285 \text{ m}$$

28. Se tiene una gota de mercurio de forma esférica y radio *R* cuya carga inicial es nula. ¿Qué figura muestra correctamente cómo varía la distribución del campo eléctrico en función de la distancia a que nos encontramos de su centro?



De acuerdo con el teorema de Gauss, el campo eléctrico en un conductor cargado y en equilibrio es nulo. Por tanto, desde el centro de la esfera hasta la distancia $r = R$, el campo eléctrico es nulo.

Sin embargo, para la superficie de la esfera y en puntos situados a una distancia del centro de la esfera superior al radio, el campo eléctrico tiene un valor:

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

lo que se corresponde con la gráfica **a).**

PROBLEMAS

29. Dos cargas eléctricas puntuales, de –20 y 90 μC se encuentran en el aire, separadas 15 cm:

a) Calcula el potencial en el punto medio de la recta que une ambas cargas.

b) Calcula, si existe, el punto entre ambas cargas en que el potencial eléctrico se anula.

a) El potencial creado por una carga puntual es:

$$V = K \cdot \frac{q}{r}$$

Por tanto, el potencial creado por ambas en el punto medio de la recta que las une será:

$$V_{medio} = \sum_{i=1}^{2} K \cdot \frac{q_i}{r_i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-20 \cdot 10^{-6}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}} + \frac{90 \cdot 10^{-6}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}} \right) = 8{,}4 \cdot 10^6 \text{ V}$$

b) Si existe, supondremos que dicho punto se encuentra a una distancia de la carga negativa que representaremos por x. De este modo:

$$V = \sum_{i=1}^{2} K \cdot \frac{q_i}{r_i} = K \cdot \left(\frac{-20 \cdot 10^{-6}}{x} + \frac{90 \cdot 10^{-6}}{0{,}15 - x} \right) = 0$$

Despejando x en esta expresión, resulta:

$$\frac{20 \cdot 10^{-6}}{x} = \frac{90 \cdot 10^{-6}}{0{,}15 - x} \rightarrow 3 - 20 \cdot x = 90 \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{110} = 2{,}73 \cdot 10^{-2} = 2{,}73 \text{ cm}$$

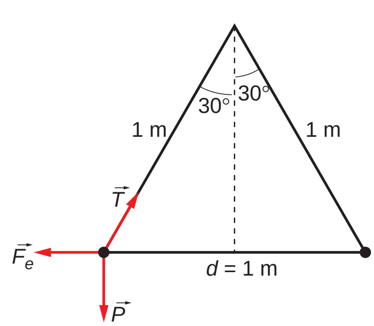
Como vemos, a 2,73 cm de la carga de −20 μC, el potencial eléctrico se anula.

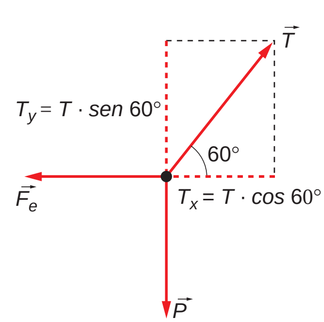
30 **Dos esferas puntuales, iguales, están suspendidas de un mismo punto mediante hilos inextensibles y sin peso, de un metro de longitud cada uno. Determina la carga eléctrica que ha de poseer cada una de ellas para que el hilo forme un ángulo de 30º con la vertical.**

Datos: masa de cada esfera, $m = 10$ g.

$K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; $g = 9{,}8$ m · s⁻²

La situación que plantea el enunciado del problema es la que se representa a continuación:





Para que las esferas se encuentren como se indica en el enunciado del problema, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$, el peso, $\vec{P}$, y la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e$, deben estar equilibradas.

Al aplicar la segunda ley de la dinámica a las fuerzas que actúan en la dirección del eje *X* y a las que actúan en la del eje *Y*, se obtiene:

– Eje X:

$$T \cdot \cos 60° = F_e \rightarrow T \cdot \cos 60° = K \cdot \frac{Q^2}{d^2}$$

– Eje Y:

$$T \cdot \operatorname{sen} 60° = m \cdot g$$

Si dividimos ambas expresiones entre sí, se obtiene:

$$tg\ 60° = \frac{m \cdot g \cdot d^2}{K \cdot Q^2} \rightarrow Q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d^2}{K \cdot tg\ 60°}}$$

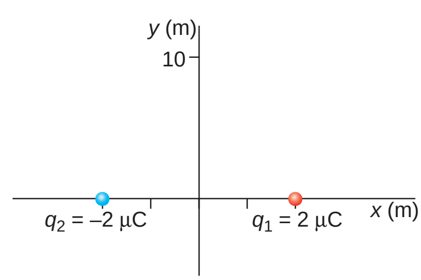
$$Q = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 1^2}{9 \cdot 10^9 \cdot tg\ 60°}} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

31. Dos cargas eléctricas puntuales de 2 y –2 µC cada una están situadas, respectivamente, en los puntos (2, 0) y (–2, 0) metros. Calcula:

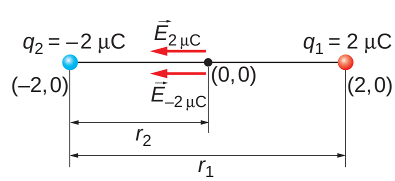
a) El campo eléctrico en (0, 0) y en (0, 10).

b) El trabajo necesario para transportar una carga *q'* de –1 µC desde (1, 0) a (–1, 0).

a) La situación que plantea el enunciado del problema es la siguiente:



En el origen, el campo eléctrico creado por ambas cargas estará dirigido hacia la izquierda, como se muestra en la siguiente ilustración:

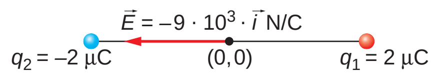


El cálculo del campo eléctrico resultante, $\vec{E}$, se realiza del siguiente modo:

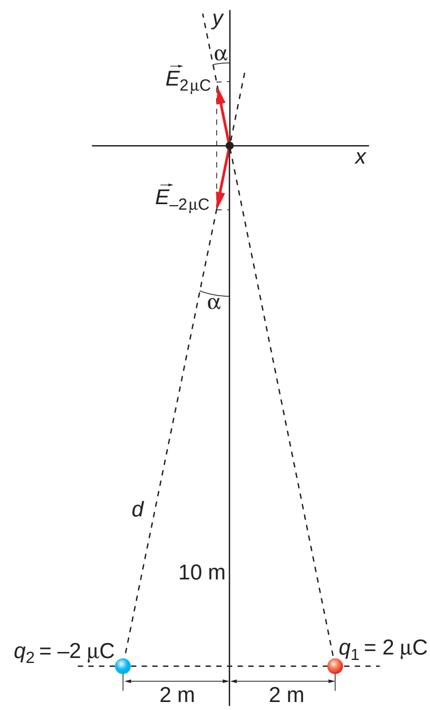
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}\,) + K \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i}\,) = K \cdot \left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right) \cdot (-\vec{i}\,) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2^2} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2^2}\right) \cdot (-\vec{i}\,) = -9 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} \quad \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$



En el punto de coordenadas (0, 10) m, el campo que crea cada carga es el que se muestra en la ilustración de la derecha.



De acuerdo con la figura, la distancia de cada carga al punto considerado es:

$$d = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} \text{ m}$$

El valor del ángulo α es:

$$tg\ \alpha = \frac{2}{10} \rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}2 = 11{,}31°$$

Por tanto:

$$sen\ \alpha = sen\ 11{,}31° = 0{,}2$$

$$cos\ \alpha = cos\ 11{,}31° = 0{,}98$$

El campo eléctrico que crea la carga de 2 µC en el punto (10, 0) m es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot sen\ \alpha \cdot (-\vec{i}\,) +$$

$$+ K \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= K \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot (-sen\ \alpha \cdot \vec{i} + cos\ \alpha \cdot \vec{j}\,) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{104})^2} \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} + 0{,}98 \cdot \vec{j}\,) = 173 \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} + 0{,}98 \cdot \vec{j}\,) =$$

$$= -34{,}62 \cdot \vec{i} + 169{,}5 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el creado por la carga Q_2 en el punto (0, 10):

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q_2}{d^2} \cdot sen\ \alpha \cdot (-\vec{i}\,) + K \cdot \frac{Q_2}{d^2} \cdot cos\ \alpha \cdot (-\vec{j}\,) = K \cdot \frac{Q_2}{d^2} \cdot (-sen\ \alpha \cdot \vec{i} - cos\ \alpha \cdot \vec{j}\,) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{104})^2} \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} - 0{,}98 \cdot \vec{j}\,) = 173 \cdot (-0{,}2 \cdot \vec{i} - 0{,}98 \cdot \vec{j}\,) =$$

$$= -34{,}62 \cdot \vec{i} - 169{,}5 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico total en el punto (0, 10) m es la suma vectorial de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$. Observa que la componente de ambos campos en la dirección del eje *Y* tiene el mismo valor y son de sentidos opuestos, por lo que se anulan entre sí. El camo resultante será, por tanto:

$$\vec{E} = -34{,}62 \cdot \vec{i} - 34{,}62 \cdot \vec{i} = -69{,}24 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El potencial eléctrico que corresponde al punto (1, 0) m es:

– Potencial debido a la carga de 2 μC:

$$V_1\,(1,\,0) = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{1} = 18 \cdot 10^3 \text{ V}$$

– Potencial debido a la carga de –2 μC:

$$V_2\,(1,\,0) = K \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{3} = -6 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Por tanto, el potencial total en ese punto es:

$$V\,(1,\,0) = V_1\,(1,\,0) + V_2\,(1,\,0) = 18 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Del mismo modo, para el punto (–1, 0) m:

– Potencial debido a la carga de –2 μC:

$$V_1\,(-1,\,0) = K \cdot \frac{Q_1}{r'_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{3} = 6 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_2\,(-1,\,0) = K \cdot \frac{Q_2}{r'_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{1} = -18 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El potencial total en ese punto es:

$$V\,(-1,\,0) = V_1\,(-1,\,0) + V_2\,(-1,\,0) = 6 \cdot 10^3 - 18 \cdot 10^3 = -12 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El trabajo realizado por las fuerzas del campo para llevar una carga de –1 μC desde el primer punto al segundo se calcula del siguiente modo:

$$W = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_{final} - V_{inicial}) =$$
$$= -(-1 \cdot 10^{-6}) \cdot (-12 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3) = -2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

El signo negativo indica que hay que realizar un trabajo exterior en contra de las fuerzas del campo, como corresponde a una carga negativa que se dirige hacia potenciales decrecientes.

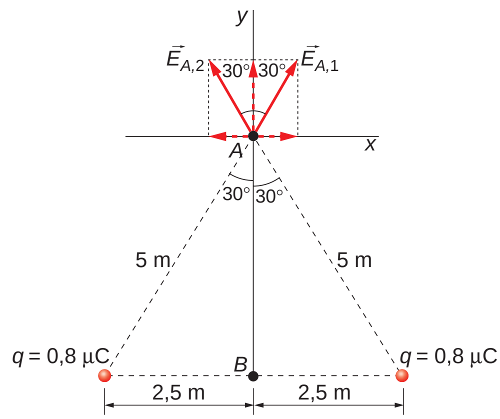
32. Dos partículas de carga $q = 0{,}8$ μC, cada una, están fijas en el vacío y separadas una distancia $d = 5$ m:

a) Determina el vector campo eléctrico que producen estas cargas en el punto *A*, que forma un triángulo equilátero con ambas.

b) Calcula el campo y el potencial eléctricos en el punto medio de la recta que las une.

Dato: $K = 1/(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

a) La representación esquemática de la situación física que propone el enunciado del problema es la siguiente:



El campo eléctrico en el punto *A* es la suma vectorial de los campos que crea cada carga por separado. La distancia de cada carga al punto *A* es:

$$d = 5 \text{ m}$$

Y el valor del ángulo α:

$$sen\ \alpha = \frac{2{,}5}{5} \rightarrow \alpha = arcsen\ \frac{1}{2} = 30°$$

Por tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot (sen\ \alpha \cdot \vec{i} + cos\ \alpha \cdot \vec{j}) + K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot (sen\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + cos\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot [(sen\ \alpha - sen\ \alpha) \cdot \vec{i} + (cos\ \alpha + cos\ \alpha) \cdot \vec{j}] =$$

$$= K \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot 2 \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}}{5^2} \cdot 2 \cdot cos\ 30° \cdot \vec{j} = 498{,}8 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) En el punto medio de la recta que une las cargas, el campo eléctrico que crea la primera es de sentido contrario al que crea la segunda, y sus sentidos son opuestos; por tanto, en ese punto el campo eléctrico total es cero.

El potencial eléctrico que corresponde a dicho punto es:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{Q_1}{d_1} + K \cdot \frac{Q_2}{d_2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$Q_1 = Q_2 = Q = 0{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$d_1 = d_2 = d = 2{,}5 \text{ m}$$

se obtiene:

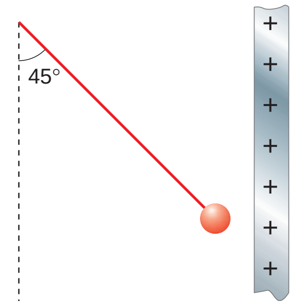
$$V = 2 \cdot K \cdot \frac{Q}{d} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}}{2{,}5} = 5\,760 \text{ V}$$

33. Una bolita, cargada eléctricamente, de 1 gramo de masa es atraída por una placa cargada de modo que forma un ángulo de 45° con la vertical, como se muestra en la figura:

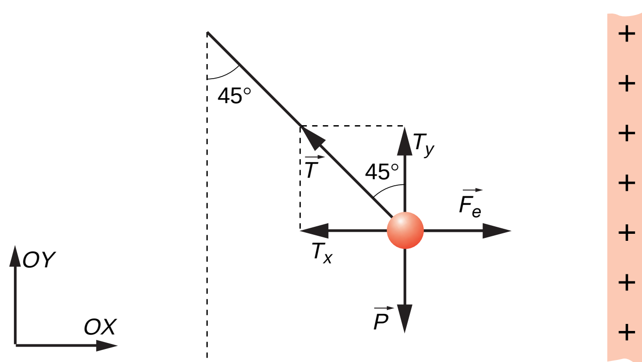
a) Dibuja un diagrama con las fuerzas que actúan sobre la bola cuando se encuentra en equilibrio.

b) Si el campo eléctrico en las proximidades de la placa es de 1050 V · m⁻¹, calcula el módulo y el signo de la fuerza que actúa sobre la bolita.

c) Calcula la carga que posee la bola cuando se encuentra en equilibrio.



a) Sobre la bolita actúan las fuerzas que se indican en la siguiente figura. Estas fuerzas son su propio peso, $\vec{P}$; la fuerza eléctrica de atracción, $\vec{F}_e$, que se produce entre cargas de distinto signo, y la tensión que soporta el hilo, $\vec{T}$, cuya dirección y sentido son los que se indican:



b) Planteamos el equilibrio de fuerzas en direcciones OX y OY:

$$OX \to -T \cdot sen\ 45° + F_e = 0 \to T \cdot sen\ 45° = q \cdot E$$

$$OY \to T \cdot cos\ 45° - m \cdot g = 0 \to T \cdot cos\ 45° = m \cdot g$$

Sustituyendo valores en la segunda expresión, podemos calcular la tensión:

$$T \cdot cos\ 45° = m \cdot g \to T = \frac{m \cdot g}{cos\ 45°} = \frac{10^{-3} \cdot 9,81}{cos\ 45°} = 1,387 \cdot 10^{-2}\ \text{N}$$

Conocida la tensión, resulta inmediato calcular la fuerza eléctrica:

$$F_e = T \cdot sen\ 45° = 1,387 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ 45° = 9,81 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

c) Una vez calculada la fuerza eléctrica, podemos despejar la carga de la bolita:

$$F_e = q \cdot E \to q = \frac{F_e}{E} = \frac{9,81 \cdot 10^{-3}}{1050} = 9,34 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

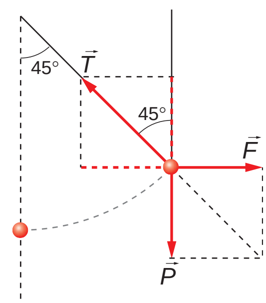
34. Una pequeña esfera de 0,2 g cuelga de un hilo de masa despreciable entre dos láminas verticales paralelas separadas 5 cm. La esfera tiene una carga positiva de $6 \cdot 10^{-9}$ C:

a) ¿Qué diferencia de potencial entre las láminas hará que el hilo forme un ángulo de 45° con la vertical?

b) ¿Cuál será la intensidad del campo eléctrico entre las láminas?

c) Representa gráficamente las fuerzas que actúan sobre la esfera en la posición de equilibrio.

c) Las fuerzas que actúan sobre la esfera en equilibrio son las que se indican en la figura:



Fíjate en que la esfera, al estar cargada positivamente, se dirigirá hacia la placa negativa.

b) En la posición de equilibrio, la relación entre las dos componentes de la tensión es, de acuerdo con la figura anterior.

$$\left.\begin{array}{l} T \cdot sen\ 45° = q \cdot E \\ T \cdot cos\ 45° = P \end{array}\right\} \rightarrow tg\ 45° = \frac{q \cdot E}{P} \rightarrow P = q \cdot E$$

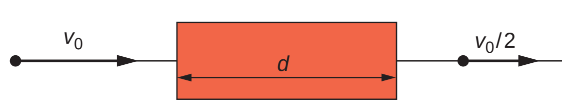
$$E = \frac{P}{q} = \frac{m \cdot g}{q} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{6 \cdot 10^{-9}} = 3{,}27 \cdot 10^{5}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

a) Como el campo eléctrico entre ambas placas es uniforme:

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \rightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta d \cdot cos\ 0° = -E \cdot d$$

$$V = -3{,}27 \cdot 10^{5} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = -1{,}63 \cdot 10^{4}\ \text{V}$$

35. Un electrón, con energía cinética inicial igual a 100 eV, penetra en la región sombreada de la figura de anchura $d = 10$ cm, donde se sabe que existe un campo eléctrico uniforme.



Se observa que el electrón atraviesa dicha región sin desviarse de su trayectoria rectilínea inicial, pero su velocidad a la salida es la mitad de la inicial.

Calcula:

a) La velocidad inicial, v_0, que posee el electrón antes de atravesar la región sombreada.

b) El módulo y la orientación del campo eléctrico dentro de esa región.

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) La energía cinética inicial del electrón, expresada en unidades del S. I., es:

$$E_c = 100\ \text{eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

Teniendo en cuenta la expresión que corresponde a la energía cinética, podemos calcular la velocidad inicial, v_0, del electrón:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-17}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}93 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Como el electrón es frenado por el campo eléctrico y no es desviado por este, el campo eléctrico estará situado en la misma dirección, y su sentido será hacia la derecha.

El electrón, dentro de la región, estará sometido a la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

Teniendo en cuenta la segunda ley de la dinámica:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Podemos escribir:

$$\vec{F} = \vec{F}_e \rightarrow m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{m \cdot \vec{a}}{q}$$

Para obtener el valor de la intensidad del campo eléctrico, hemos de obtener en primer lugar, la aceleración a que está sometido el electrón, que podemos calcular aplicando las ecuaciones del m.r.u.a.:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2}{2 \cdot s}$$

$$a = \frac{-3 \cdot v_0^2}{8 \cdot s} = \frac{-3 \cdot (5{,}93 \cdot 10^6)^2}{8 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = -1{,}32 \cdot 10^{14}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Finalmente, el valor del campo eléctrico es:

$$E = \frac{m \cdot a}{q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (-1{,}32 \cdot 10^{14})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 750\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el vector campo eléctrico:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{i} = 750 \cdot \vec{i}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

36. Consideramos las superficies equipotenciales producidas por una carga puntual $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C, colocada en el origen de coordenadas:

a) Calcula la separación entre la superficie equipotencial de 6 000 V y la de 2 000 V.

b) Calcula el trabajo que tiene que realizar un agente externo para mover una carga de prueba $q_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ C desde la superficie equipotencial de 6 000 V hasta la de 2 000 V sin variar su energía cinética.

a) La expresión que permite calcular el potencial que crea una carga en un punto es:

$$V = K \cdot \frac{q}{r} \rightarrow r = \frac{K \cdot q}{V}$$

La superficie equipotencial de 2 000 V se encontrará a la siguiente distancia de la carga que crea el campo:

$$r_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2\,000} = 9 \text{ m}$$

Y la de 6 000 V:

$$r_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{6\,000} = 3 \text{ m}$$

La distancia entre ambas superficies es:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 9 - 3 = 6 \text{ m}$$

b) La energía potencial de la carga cuando se encuentra sobre dichas superficies equipotenciales es:

$$V_2 = 2\,000 \ V \rightarrow E_{p_2} = q \cdot V_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2\,000 = 3 \text{ J}$$

$$V_1 = 6000 \ V \rightarrow E_{p_1} = q \cdot V_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6\,000 = 9 \text{ J}$$

Al dejar la carga, positiva, en libertad, se moverá de mayor a menor potencial, aumentando su energía cinética y perdiendo energía potencial:

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = 3 - 9 = -6 \text{ J}$$

Como la carga no modifica su energía cinética, su movimiento debe ser uniforme; debe haber una fuerza exterior que, actuando sobre la carga, contrarreste las fuerzas del campo. El trabajo que realiza la fuerza exterior es de 6 J.

37. La expresión de un campo eléctrico uniforme es: $\vec{E} = 500 \cdot \vec{i}$ N · C^{-1}:

a) ¿Cómo serán sus superficies equipotenciales?

b) Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga de 2 μC desde el punto P (2, 3, 0) m hasta el punto Q (6, 5, 0) m.

c) Calcula la distancia que separa las superficies equipotenciales $V_1 = 10$ V y $V_2 = 20$ V.

a) Teniendo en cuenta que el vector campo eléctrico es perpendicular en todo punto a la superficie equipotencial y que este está dirigido en el sentido positivo del eje X, las superficies equipotenciales estarán situadas en el plano YZ.

b) El trabajo que realizan las fuerzas del campo se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$W_{F\,ext} = -\Delta E_P = -q \cdot (V_2 - V_1) = q \cdot (V_1 - V_2) = q \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En el caso que propone el enunciado:

$$W_{F\,ext} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \int_2^6 500 \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot (6 - 2) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

El signo positivo indica que el trabajo lo realiza el propio campo (recuerda que una carga positiva se traslada espontáneamente hacia potenciales decrecientes).

c) Como el campo eléctrico es uniforme:

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{d} \rightarrow d = -\frac{V_2 - V_1}{E} = -\frac{20 - 10}{500} = -0{,}02 \text{ m}$$

El resultado obtenido indica que, según el eje X, V_2 está a la izquierda de V_1.

38. En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas con cargas iguales y opuestas existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 cm de distancia de la primera, al cabo de $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ s. Despreciando los efectos gravitatorios, calcula:

a) La intensidad del campo eléctrico entre las láminas.

b) La velocidad con que llega el electrón a la segunda lámina.

c) La diferencia de potencial entre las láminas.

a) El movimiento que realiza el electrón es un m.r.u.a. Con los datos de que disponemos podemos calcular su aceleración:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow s = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$$

$$a = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{(1{,}5 \cdot 10^{-8})^2} = 1{,}78 \cdot 10^{14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Aplicando ahora la segunda ley de la dinámica, obtenemos la intensidad del campo eléctrico entre las láminas:

$$F = F_e \rightarrow m \cdot a = q \cdot E \rightarrow E = \frac{m \cdot a}{q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}78 \cdot 10^{14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1\,011{,}1 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) La velocidad con que llega el electrón a la segunda lámina es:

$$v = v_0 + a \cdot t = 0 + 1{,}78 \cdot 10^{14} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-8} = 2{,}67 \cdot 10^{6} \text{ m/s}$$

c) Como el campo eléctrico es uniforme, podemos calcular la diferencia de potencial entre las láminas a partir de la siguiente expresión:

$$E \cdot d = \Delta V \rightarrow \Delta V = 1\,011{,}1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 20{,}22 \text{ V}$$

39. Dos partículas con cargas $q_1 = 1$ µC y $q_2 = 2$ µC están separadas una distancia $d = 0{,}5$ m:

a) Calcula la fuerza que actúa sobre la segunda y su energía potencial electrostática.

b) Si q_2 puede moverse, partiendo del reposo, ¿hacia dónde lo hará? Calcula su energía cinética cuando se haya desplazado 0,2 m respecto a su posición inicial.

c) ¿Cuánto trabajo habrá realizado hasta entonces el campo eléctrico?

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

a) La fuerza que actúa sobre la segunda partícula viene dada por la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E}$$

donde $\vec{E}$ es el campo creado por la carga q_1:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q_1}{r_2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}5^2} = 36\,000 \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Por tanto:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 36\,000 \cdot \vec{u}_r = 0{,}072 \cdot \vec{u}_r \text{ N}$$

Su energía potencial electrostática es:

$$E_p = q_2 \cdot V = q_2 \cdot K \cdot \frac{q_1}{r} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}5} = 0{,}036 \text{ J}$$

b) Al ser una carga positiva, se moverá en el sentido en que disminuya su energía potencial. Se moverá, por tanto, en la misma dirección y sentido que el campo eléctrico. Cuando se haya desplazado 0,2 m, estará a 0,7 m de la carga que crea el campo, q_1. En ese punto, su energía potencial es:

$$E_p' = q_2 \cdot K \cdot \frac{q_1}{r'} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0{,}7} = 0{,}026 \text{ J}$$

Al ser el campo eléctrico conservativo, se cumple que:

$$-\Delta E_p = \Delta E_c \rightarrow \Delta E_c = -(0{,}026 - 0{,}036) = 0{,}010 \text{ J}$$

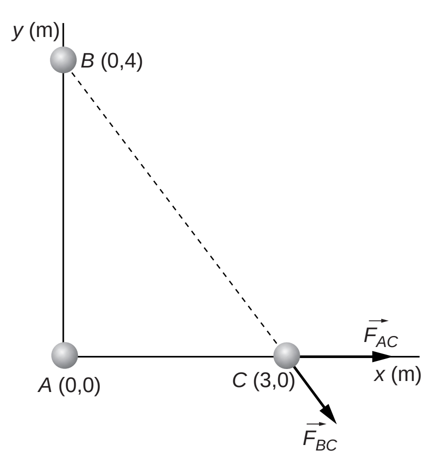
c) El trabajo realizado por el campo eléctrico coincide con el incremento de la energía cinética de la partícula (teorema de las fuerzas vivas):

$$W = 0{,}010 \text{ J}$$

40. Tres cargas iguales, de +100 µC, están situadas en el vacío, en los puntos *A* (0,0), *B* (0,4) y *C* (3,0). Las coordenadas se expresan en metros.

Calcula la fuerza que las dos primeras cargas ejercen sobre la tercera y el vector intensidad del campo eléctrico en el punto (3,0).

La situación de las cargas es la que se muestra en la figura:



Para determinar la fuerza total que actúa sobre la carga *C* debido a la acción de *A* y *B*, aplicamos el principio de superposición, calculando por separado la fuerza que ejerce cada carga (*A* y *B*) sobre *C*, y sumando ambos resultados.

La fuerza que ejerce *A* sobre *C* es:

$$\vec{F}_{AC} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2} \cdot \vec{i} = 10 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

Para calcular la fuerza que ejerce *B* sobre *C*, calculamos en primer lugar el vector unitario de la dirección en que está dirigida esa fuerza:

$$\vec{u}_r = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot \vec{i} - \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot \vec{j}$$
$$= \frac{3}{5} \cdot \vec{i} - \frac{4}{5} \cdot \vec{j} = 0{,}6 \cdot \vec{i} - 0{,}8 \cdot \vec{j}$$

La fuerza que ejerce *B* sobre *C* es, por tanto:

$$\vec{F}_{BC} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}_r =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2 + 4^2} \cdot (0{,}6 \cdot \vec{i} - 0{,}8 \cdot \vec{j}) =$$
$$= (2{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Al sumar ambas fuerzas, resulta:

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = (12{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Para calcular la intensidad del campo eléctrico, aplicamos, al igual que en el apartado anterior, el principio de superposición.

Para la carga *A* resulta:

$$\vec{E}_{AC} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6}}{3^2} \cdot \vec{i} = 100\,000 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Mientras que para la carga *B*:

$$\vec{E}_{BC} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6}}{3^2 + 4^2} \cdot (0{,}6 \cdot \vec{i} - 0{,}8 \cdot \vec{j}) =$$
$$= (2{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Al sumar ambos campos, obtenemos el resultado que nos piden:

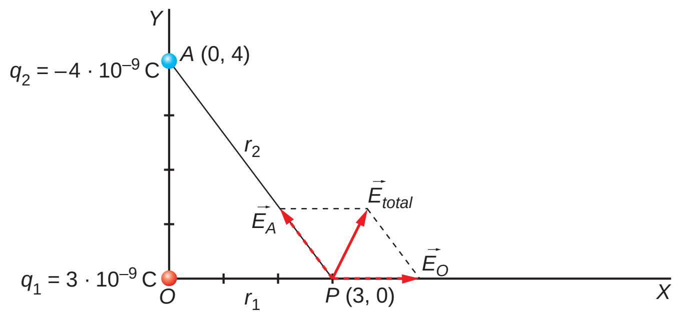
$$\vec{E} = \vec{E}_{AB} + \vec{E}_{BC} = (12{,}16 \cdot \vec{i} - 2{,}88 \cdot \vec{j}) \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

41. Una carga positiva de $3 \cdot 10^{-9}$ C está situada en el aire y en el origen, *O*, de un sistema de coordenadas. Una carga negativa puntual de $4 \cdot 10^{-9}$ C se coloca en el punto *A* de coordenadas (0,4), dadas en metros. Determina la intensidad del campo eléctrico y del potencial en el punto *P*, de coordenadas (3,0).

El campo que crean las cargas situadas en *O* y *A* lo calculamos aplicando el principio de superposición.

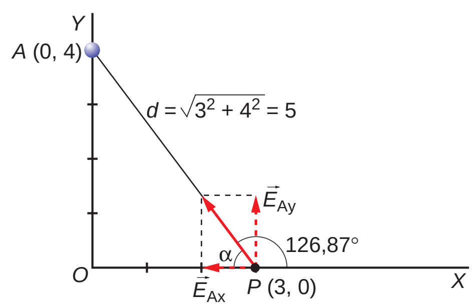
De acuerdo con la siguiente figura:



El campo eléctrico que la carga situada en O crea en P es:

$$\vec{E}_O = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{3^2} = 3 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico que la carga situada en A crea en P tiene dos componentes, como se aprecia en la siguiente ilustración:



De acuerdo con la figura:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha = arcsen\ \frac{4}{5} = 53{,}13°$$

Por tanto:

$$\vec{E}_A = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{5^2} \cdot (cos\ 53{,}13° \cdot (-\vec{i}) + sen\ 53{,}13° \cdot \vec{j}) =$$

$$= -0{,}86 \cdot \vec{i} + 1{,}15 \cdot \vec{j}$$

El campo eléctrico total será la suma de ambos:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_O + \vec{E}_A = 3 \cdot \vec{i} - 0{,}86 \cdot \vec{i} + 1{,}15 \cdot \vec{j} =$$

$$= 2{,}14 \cdot \vec{i} + 1{,}15 \cdot \vec{j}$$

y su módulo:

$$E_T = \sqrt{2{,}14^2 + 1{,}15^2} = 2{,}43 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

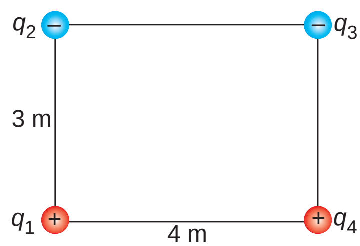
El potencial eléctrico en el punto P es la suma de los potenciales creados por las cargas situadas en O y en A:

$$V_O = K \cdot \frac{q_1}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{3} = 9 \text{ V}$$

$$V_A = K \cdot \frac{q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{5} = -7{,}2 \text{ V}$$

$$V_T = V_O + V_A = 9 - 7{,}2 = 1{,}8 \text{ V}$$

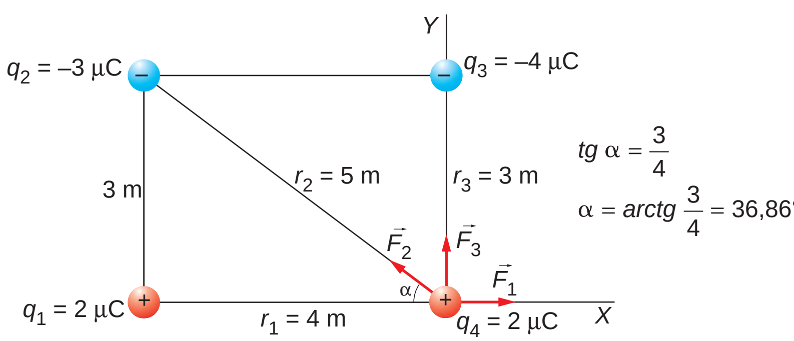
42. Cuatro cargas, $q_1 = 2$ µC, $q_2 = -3$ µC, $q_3 = -4$ µC y $q_4 = 2$ µC, están situadas en los vértices de un rectángulo, como indica la figura adjunta:



Halla la fuerza total que ejercen las cargas q_1, q_2 y q_3 sobre q_4.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ unidades S. I.

La fuerza que cada carga ejerce sobre q_4 es la que se representa en la figura adjunta:



– Fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_4:

$$F_1 = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_4}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{4^2} = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} \text{ N}$$

– Fuerza que ejerce la carga q_2 sobre la carga q_4:

$$\vec{F}_2 = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2^2} = (cos\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{5^2} = (cos\ 36{,}86° \cdot (-\vec{i}) + sen\ 36{,}86° \cdot \vec{j}) =$$

$$= -1{,}73 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 1{,}30 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}$$

– Fuerza que ejerce la carga q_3 sobre la carga q_4:

$$F_3 = K \cdot \frac{q_3 \cdot q_4}{r_3^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_3 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

La fuerza total que actúa sobre la carga q_4 es la suma vertical de las calculadas:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 1{,}73 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 1{,}30 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} + 8 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} =$$

$$= (0{,}52 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 9{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j})\ \text{N}$$

y su módulo:

$$F = \sqrt{(0{,}52 \cdot 10^{-3})^2 + (9{,}3 \cdot 10^{-3})^2} = 9{,}31 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

43 **En los puntos $A(4,0)$, $B(0,-4)$, $C(-2,0)$ y $D(2,0)$ metros, de un sistema de coordenadas, se encuentran, respectivamente, las cargas eléctricas $q_1 = 14 \cdot 10^{-5}$ C, $q_2 = 23 \cdot 10^{-5}$ C, $q_3 = -8 \cdot 10^{-5}$ C y $q_4 = -6 \cdot 10^{-5}$ C. Calcula:**

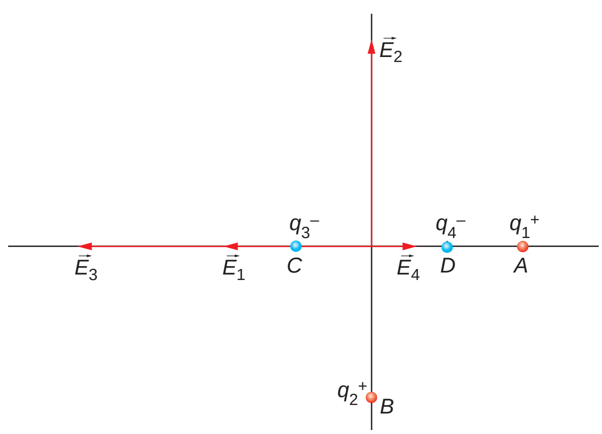
a) La intensidad del campo eléctrico en el punto (0,0).

b) El potencial eléctrico en el punto (0,0).

c) La energía potencial eléctrica que adquiere una carga de $+25 \cdot 10^{-6}$ C al situarse en ese punto.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²

a) Las cargas están situadas en un sistema de coordenadas como se indica en la figura:



El campo eléctrico creado en el punto (0, 0) será la superposición de los campos creados por cada una de las cuatro cargas:

– Campo eléctrico creado por la carga q_1 en el origen:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{14 \cdot 10^{-5}}{4^2} = 7{,}88 \cdot 10^4 \cdot (-\vec{i})\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

– Campo eléctrico creado por la carga q_2 en el origen:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{23 \cdot 10^{-5}}{4^2} \cdot \vec{j} = 12{,}94 \cdot 10^4 \cdot \vec{j}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

– Campo eléctrico creado por la carga q_3 en el origen:

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-5}}{2^2} \cdot \vec{i} = -18 \cdot 10^4 \cdot \vec{i}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

– Campo eléctrico creado por la carga q_4 en el origen:

$$\vec{E}_4 = K \cdot \frac{q_4}{r_4^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-5}}{2^2} \cdot (-\vec{i}) = 13{,}5 \cdot 10^4 \cdot \vec{i}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Por tanto, el campo eléctrico resultante en el origen es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = -7{,}88 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 12{,}94 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} - 18 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 13{,}5 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} =$$
$$= -12{,}38 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 12{,}94 \cdot 10^4 \cdot \vec{j}$$

y su módulo:

$$E = \sqrt{(-12{,}38 \cdot 10^4)^2 + (12{,}94 \cdot 10^4)^2} = 17{,}91 \cdot 10^4\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el ángulo que forma en el eje Y:

$$tg\ \alpha = \frac{12{,}38 \cdot 10^4}{12{,}94 \cdot 10^4} = 0{,}957 \rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}957 = 43{,}73°$$

b) El potencial es una magnitud escalar cuyo valor se calcula sumando el potencial creado por cada carga:

$$V_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{14 \cdot 10^{-5}}{4} = 31{,}5 \cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{23 \cdot 10^{-5}}{4} = 51{,}75 \cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-5}}{2} = -36 \cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_4 = K \cdot \frac{q_4}{r_4} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-5}}{2} = -27 \cdot 10^4\ \text{V}$$

Por tanto:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = (31{,}5 + 51{,}75 - 36 - 27) \cdot 10^4 = 20{,}25 \cdot 10^4\ \text{V}$$

c) La energía potencial eléctrica que corresponde a la carga es:

$$E_p = q \cdot V = 25 \cdot 10^{-6} \cdot 20{,}25 \cdot 10^4 = 5{,}06\ \text{J}$$

44. Se libera desde el reposo un protón en un campo eléctrico uniforme de intensidad $7 \cdot 10^4$ V · m^{-1} dirigido a lo largo del eje *X* en sentido positivo. El protón se desplaza una distancia de 0,2 m en la dirección del campo. Calcula:

a) La diferencia de potencial que ha experimentado el protón en el desplazamiento indicado.

b) La variación de energía potencial.

c) La velocidad del protón al final de los 0,2 m recorridos.

Datos: $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

a) La relación entre la diferencia de potencial y el campo eléctrico es:

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso, como el campo eléctrico es uniforme y el protón se desplaza en la dirección del campo:

$$V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx \cdot cos\ 0° = -\int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx = -E \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -E \cdot (x_2 - x_1)$$

Por tanto:

$$V_2 - V_1 = -E \cdot (x_2 - x_1) = -7 \cdot 10^4 \cdot (0{,}2 - 0) = -1{,}4 \cdot 10^4 \text{ V}$$

b) La expresión que relaciona la variación del potencial con la variación de la energía potencial es:

$$\Delta E_p = q \cdot \Delta V \rightarrow \Delta E_p = q \cdot (V_2 - V_1) = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-1{,}4 \cdot 10^4) = -2{,}24 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

El protón se mueve espontáneamente hacia potenciales decrecientes, disminuyendo el valor de su energía potencial y aumentando el de su energía cinética, de tal modo que su energía mecánica se conserva.

c) Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow E_{c_2} - E_{c_1} = -\Delta E_p$$

Como el protón se libera desde el reposo, $E_{c_1} = 0$. Por tanto:

$$E_{c_2} = -\Delta E_p \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -\Delta E_p \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot (-\Delta E_p)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot [-(-2{,}24 \cdot 10^{-15})]}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} =$$

$$= 1{,}64 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

45. En el interior de una nave espacial existen las siguientes cargas: 5 μC, –9 μC, 27 μC, –84 μC. Suponiendo que la constante dieléctrica del medio es ε_0, calcula el flujo de campo eléctrico que atraviesa las paredes de la nave.

Compara el número de líneas de campo que salen de la nave con el número de líneas que entran en ella.

El teorema de Gauss permite calcular el flujo que atraviesa una superficie cerrada, *S*. Para el campo eléctrico, el teorema de Gauss se enuncia en la forma:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$$

expresión en la que Q_{int} es la carga total que encierra en su interior la superficie *S*, y ε, la constante dieléctrica del medio en que se encuentra dicha superficie.

El número de líneas que atraviesan la superficie por unidad de superficie es proporcional al flujo que existe. Podemos hablar de un flujo que entra (cuando las cargas eléctricas que encierra la superficie son negativas) y de un flujo que sale (cuando las cargas eléctricas que encierra son positivas).

De acuerdo con lo dicho, el flujo total que atravesará las paredes de la nave será:

$$\phi_{total} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon} = \frac{(5 - 9 + 27 - 84) \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = -6,89 \cdot 10^{6} \text{ N} \cdot \text{m}^{2} \cdot \text{C}^{-1}$$

El flujo que entra (correspondiente a las cargas negativas) es:

$$\phi_{-} = \frac{Q_{int(-)}}{\varepsilon} = \frac{(-9 - 84) \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = -10,51 \cdot 10^{6} \text{ N} \cdot \text{m}^{2} \cdot \text{C}^{-1}$$

Mientras que el flujo que sale (que corresponde a las cargas positivas) resulta ser el siguiente:

$$\phi_{+} = \frac{Q_{int(+)}}{\varepsilon} = \frac{(5 + 27) \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 3,62 \cdot 10^{6} \text{ N} \cdot \text{m}^{2} \cdot \text{C}^{-1}$$

En cuanto a la relación que existirá entre las líneas de campo que salen y las que entran, esta será:

$$\frac{\phi_{+}}{\phi_{-}} = \frac{3,62 \cdot 10^{6}}{10,51 \cdot 10^{6}} = 0,34$$

lo que significa que, por cada 34 líneas de campo que salen, entran 100.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

46. En una posición del espacio *A*, donde existe un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje *Z* positivo, se coloca una partícula cargada de carga $q = 10^{-6}$ C y masa $m = 10^{-6}$ kg con velocidad inicial nula.

Debido a la acción del campo eléctrico, esta partícula se acelera hasta otra posición *B* donde, tras recorrer un metro, llega con una velocidad cuyo módulo es 100 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$:

a) ¿Cuál es la dirección y el sentido de la velocidad?

b) Dibuja las superficies equipotenciales de ese campo eléctrico.

c) ¿Cuánto valdrá la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B*?

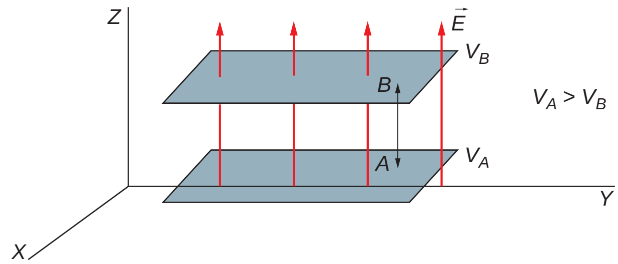
d) ¿Cuánto vale el campo eléctrico (dirección, módulo y sentido)?

a) La dirección y el sentido de la velocidad de la carga coinciden con los del campo eléctrico al tratarse de una carga positiva. En consecuencia:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{k}$$

b) El vector campo eléctrico es perpendicular en todo punto a las superficies equipotenciales. Como el campo eléctrico es uniforme y está dirigido según el sentido positivo del eje *Z*, estas serán planos paralelos al plano *XY*, como se muestra en la figura de la página siguiente.

El potencial de las superficies decrecerá según se avanza en el sentido positivo del eje *Z*.



c) La carga positiva se mueve espontáneamente en la dirección y sentido de las líneas del campo eléctrico, disminuyendo el valor de su energía potencial y aumentando el de su energía cinética. Como la partícula parte del reposo y alcanza una velocidad final de 100 m · s^{-1}, la variación de su energía cinética es:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = E_{c_2} - 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_p = -\Delta E_c$$

Y que:

$$\Delta E_p = q \cdot \Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta E_p}{q}$$

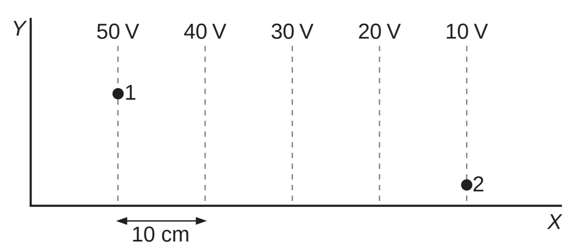
Obtenemos:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = -5\,000\ \text{V}$$

El resultado obtenido es lógico, ya que una carga positiva se mueve espontáneamente hacia potenciales decrecientes: $V_2 < V_1$.

NOTA: en la resolución del problema se ha prescindido de la acción del campo gravitatorio.

47 **La figura adjunta representa las superficies equipotenciales de una zona del espacio donde existe un campo eléctrico. Las superficies están separadas una de otra una distancia de 10 cm:**



a) ¿Cuánto vale el campo eléctrico en dicha zona del espacio?

b) Dibuja las líneas del campo eléctrico.

c) ¿Qué trabajo hay que realizar para trasladar un electrón desde el punto 1 al punto 2? ¿Lo efectuará el propio campo eléctrico o deberemos aplicar alguna fuerza externa?

Dato: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) La relación entre la diferencia de potencial y el campo eléctrico es:

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso:

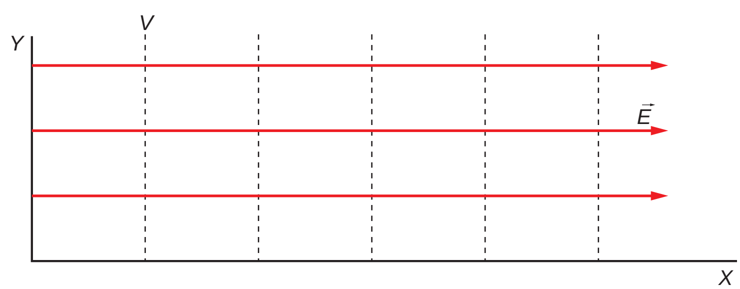
$$V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} E \cdot dr \cdot \cos 0° = -E \cdot (x_2 - x_1)$$

$$E = \frac{V_1 - V_2}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 10}{4 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 100 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El sentido del campo eléctrico estará dirigido hacia potenciales decrecientes; por tanto:

$$\vec{E} = 100 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) Las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales. De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, estarán dirigidas a lo largo del sentido positivo del eje X, como se muestra en la figura:



c) El trabajo necesario lo calculamos como sigue:

$$W = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_2 - V_1) = -(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (10 - 50) = -64 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Las cargas negativas, como la del electrón, se mueven espontáneamente hacia potenciales crecientes; como en este caso lo hace hacia potenciales decrecientes, es necesario aplicar sobre él una fuerza externa, de sentido contrario a la del campo.

48 **Debido a la fricción, una canica de acero de 0,5 cm de radio adquiere una carga de 30 nC. ¿Qué potencial adquiere la canica?**

El potencial que adquiere una esfera de radio R al cargarse se calcula mediante la expresión:

$$V = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot R} = K \cdot \frac{Q}{R}$$

Sustituyendo valores, en el caso que nos ocupa resulta:

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{30 \cdot 10^{-9}}{0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 54\,000 \text{ V}$$

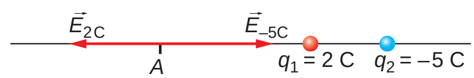
49. Tenemos dos cargas eléctricas puntuales de 2 C y –5 C, separadas una distancia de 10 cm. Calcula el campo en los puntos siguientes:

a) A 20 cm de la carga positiva, tomados en la dirección de la recta que une las cargas y en el sentido de la negativa a la positiva.

b) A 20 cm de la carga negativa, contados en la misma dirección, pero en sentido de la positiva a la negativa.

c) ¿En qué punto de dicha recta es nulo el potencial eléctrico?

a) La situación de las cargas y del punto donde se quiere calcular el campo es la que se muestra en la siguiente figura:



En el punto A una carga de prueba positiva se verá repelida por el campo creado por la carga positiva, y atraída por el creado por la carga negativa. El campo que crea cada una de ellas es:

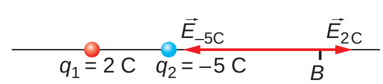
$$\vec{E}_{2\,C} = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}\,) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{(20 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (-\vec{i}\,) = -45 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{-5\,C} = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i}\,) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5}{(30 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (-\vec{i}\,) = 50 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo resultante en el punto A es:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{2\,C} + \vec{E}_{-5\,C} = (-45 \cdot 10^{10} + 50 \cdot 10^{10}) \cdot \vec{i} = 5 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) En este caso, una carga de prueba positiva colocada en el punto B de la figura será repelida por la carga q_1 y atraída por la carga q_2:



Los campos que crea cada carga son:

$$\vec{E}_{2\,C} = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{(30 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{i} = 20 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{-5\,C} = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5}{(20 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{i} = -112{,}5 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Y el campo resultante:

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{2\,C} + \vec{E}_{-5\,C} = (20 \cdot 10^{10} - 112{,}5 \cdot 10^{10}) \cdot \vec{i} = -92{,}5 \cdot 10^{10} \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

c) El punto en que se anula el potencial eléctrico estará entre ambas cargas.

Si llamamos x a la distancia de la carga positiva al punto donde se anula el potencial, la distancia de la segunda carga a dicho punto será $0{,}1 - x$. Por tanto, imponiendo la condición de que se anula el potencial, se obtiene:

$$V_{2\,C} + V_{-5\,C} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{x} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5}{0,1 - x} = 0 \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{5}{0,1 - x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 \cdot x = 0,2 \rightarrow x = \frac{0,2}{7} = 0,0286 \text{ m} = 2,86 \text{ cm}$$

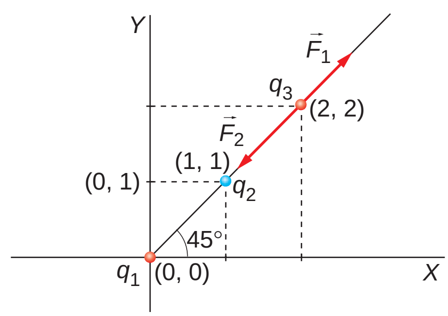
El potencial eléctrico se anula a 2,86 cm, medidos hacia la derecha de la carga positiva.

50. Dos cargas puntuales de 8 μC y –5 μC están situadas, respectivamente, en los puntos (0, 0) y (1, 1) metros. Calcula:

a) La fuerza que actúa sobre una tercera carga de 1 μC situada en el punto (2, 2) metros.

b) El trabajo necesario para llevar esta última carga desde el punto que ocupa hasta el punto (0, 1) metros.

La situación de las cargas que propone el enunciado es la que se muestra en la siguiente figura:



La distancia de cada carga al punto (2, 2) la obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$$
$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

a) La fuerza que ejerce la carga $q_1 = 8$ μC sobre la carga $q_3 = 1$ μC, es:

$$\vec{F}_1 = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r^2_1} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (6,36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 6,36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Y la que ejerce la carga $q_2 = -5$ μC sobre la carga $q_3 = 1$ μC:

$$\vec{F}_2 = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r^2_2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (-15,91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 15,91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

La fuerza eléctrica resultante que actúa sobre q_3 es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} + 6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} - 15{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 15{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} =$$

$$= -9{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{i} - 9{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{j} = -9{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot (\vec{i} + \vec{j})\ \text{N}$$

b) El potencial a que se encuentra el punto (2, 2) es:

$$V_{(2,\,2)} = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}\right) = -6\,363{,}96\ \text{V}$$

Y el que corresponde al punto (0, 1):

$$V_{(0,\,1)} = V'_1 + V'_2 = K \cdot \frac{q_1}{r'_1} + K \cdot \frac{q_2}{r'_2} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r'_1} + \frac{q_2}{r'_2}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{8 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{1}\right) = 27 \cdot 10^3\ \text{V}$$

Se trata, por tanto, de una carga positiva que se mueve hacia potenciales crecientes. Como no lo hace espontáneamente, habrá que realizar trabajo sobre ella:

$$W_{ext} = q \cdot \Delta V = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (27 \cdot 10^3 + 6\,363{,}96) = 20{,}64 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

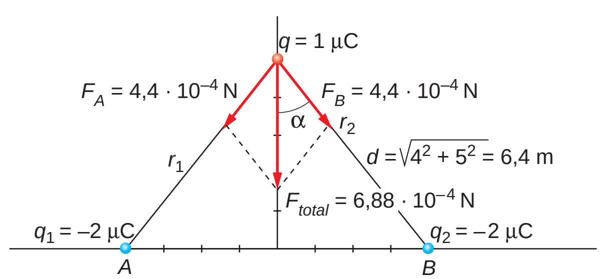
51. Dos cargas eléctricas puntuales de –2 μC, están situadas en los puntos *A*(–4,0) y *B*(4,0) metros:

a) Calcula la fuerza sobre una carga de 1 μC, situada en el punto (0,5) metros.

b) ¿Qué velocidad tendrá al pasar por el punto (0,0) metros?

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; Masa = 1 g

a) Las cargas y las fuerzas eléctricas que actúan con las que se muestran en la siguiente figura:



Observa que, de acuerdo con ella, la fuerza resultante en la dirección del eje *X* es nula, ya que ambas cargas atraen a la tercera con fuerzas del mismo valor y de sentidos opuestos en esa dirección. Por tanto, tan solo hemos de calcular la fuerza eléctrica resultante en la dirección del eje *Y*.

La distancia de las cargas de +2 μC y –2 μC a la tercera se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r_1 = r_2 = r = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6{,}4\ \text{m}$$

El ángulo α es:

$$tg\ \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha = arctg\ \frac{4}{5} = 38{,}66°$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q,\ Y} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r^2} \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(6,\ 4)^2} \cdot cos\ 38{,}66° \cdot \vec{j} = -3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q,\ Y} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q}{r^2} \cdot cos\ \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(6,\ 4)^2} \cdot cos\ 38{,}66° \cdot \vec{j} = -3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

La fuerza resultante es, por tanto:

$$\vec{F} = \vec{F}_{q_1 \rightarrow q,\ Y} + \vec{F}_{q_2 \rightarrow q,\ Y} = -3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j} - 3{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j} = -6{,}86 \cdot 10^{-4} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

b) Este apartado se puede resolver calculando la variación de energía potencial de la carga entre ambos puntos, y aplicando el principio de conservación de la energía, pero, como el enunciado proporciona como dato la masa de la partícula, se puede resolver de forma más sencilla y rápida utilizando conceptos cinemáticos.

La fuerza calculada en el apartado anterior le proporcionará a la carga la siguiente aceleración:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{6{,}86 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-3}} = 0{,}69\ \text{m/s}^2$$

Teniendo en cuenta que:

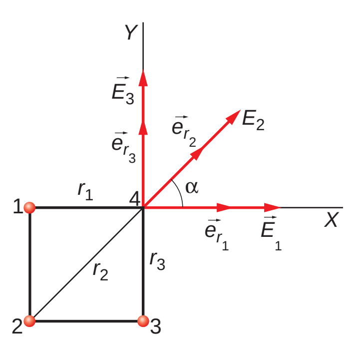
$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

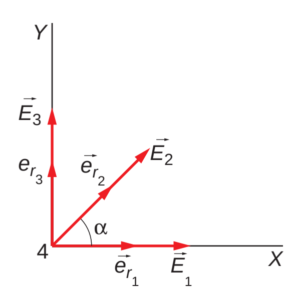
Obtenemos:

$$v^2 = 2 \cdot 0{,}69 \cdot 5 = 6{,}86\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \rightarrow v = \sqrt{6{,}86} = 2{,}62\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

52 En tres vértices de un cuadrado de 2 m de lado se disponen cargas de +10 μC. Calcula el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico en el cuarto vértice, y el trabajo necesario para llevar una carga de –5 μC desde el centro del cuadrado hasta el cuarto vértice.

El sistema de referencia escogido para este problema es el siguiente:





$$r_1 = 2 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$$

$$r_3 = 2 \text{ m}$$

El campo eléctrico que crea la carga q_1 en el cuarto vértice es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2^2} \cdot \vec{i} = 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El que crea que la carga q_2 en el cuarto vértice es:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot \vec{i} + sen\ \alpha \cdot \vec{j})$$

donde el ángulo vale 45° al tratarse del formado por la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados. Por tanto:

$$\vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (cos\ 45° \cdot \vec{i} + sen\ 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{j}$$

Y el creado por la carga q_3:

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2^2} = 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico resultante en el cuarto vértice será la suma de los anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{i} + 0{,}80 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} + 2{,}25 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} =$$

$$= 3{,}05 \cdot 10^4 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El potencial eléctrico en el cuarto vértice se obtiene sumando el que corresponde al creado por cada carga:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = 1{,}22 \cdot 10^5 \text{ V}$$

El trabajo necesario para trasladar una carga desde el centro hasta el cuarto vértice lo realizamos del siguiente modo:

– En primer lugar, calculamos el potencial a que se encuentra el centro del cuadrado:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

donde:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ m} \quad ; \quad q_1 = q_2 = q_3 = 9 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Por tanto:

$$V_0 = 3 \cdot \frac{K \cdot q}{r} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 1{,}91 \cdot 10^5 \text{ V}$$

– A continuación calculamos la diferencia de potencial entre ambos puntos:

$$\Delta V = V_f - V_0 = 1{,}22 \cdot 10^5 - 1{,}91 \cdot 10^5 = -0{,}69 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Como se observa, $V_f < V_0$. Como una carga negativa se traslada espontáneamente hacia potenciales crecientes, en este caso será necesario que se realice un trabajo exterior en contra de las fuerzas del campo.

– Calculamos el valor del trabajo realizado por las fuerzas del campo:

$$W = -q \cdot \Delta V = -(-5 \cdot 10^{-6}) \cdot (-0{,}69 \cdot 10^5) = -3{,}45 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

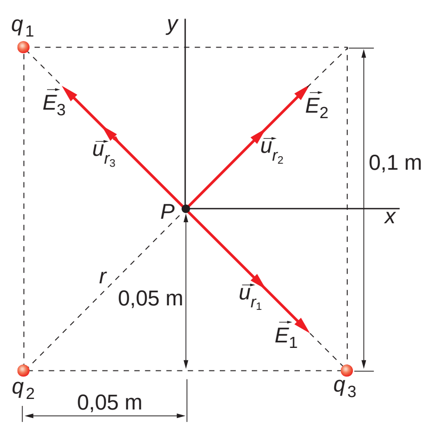
El signo negativo obtenido indica que el trabajo a realizar es externo.

53. Tres cargas positivas e iguales, de 2 μC cada una, se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de 10 cm de lado. Calcula:

a) El campo eléctrico en el centro del cuadrado.

b) Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.

a) Para resolver el problema utilizaremos un sistema de referencia con el origen situado en el centro del cuadrado, como se muestra en la figura.



De acuerdo con ella:

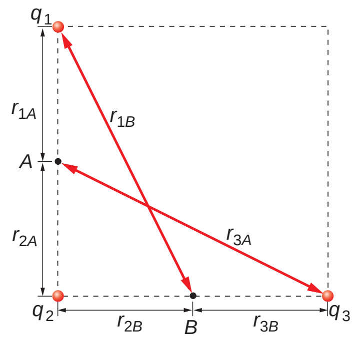
$$r_1 = r_2 = r_3 = r \quad ; \quad r = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}05^2} = 7{,}07 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Además, fíjate en que los campos producidos por q_1 y q_3 son del mismo valor y sentido opuesto, por lo que el campo resultante en el centro del cuadrado coincidirá con el campo creado por la carga q_2:

$$\vec{E} = \vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r^2} \cdot (\cos 45° \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(7{,}07 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 2{,}55 \cdot 10^6 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) Para obtener los potenciales en dichos puntos necesitamos conocer, en primer lugar, la distancia que separa cada carga del punto medio. De acuerdo con la siguiente figura:



Dichas distancias son:

$$r_{1A} = r_{2A} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$r_{2B} = r_{3B} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$r_{3A}^2 = 0{,}05^2 + 0{,}10^2 = 0{,}0125 \text{ m}^2 \rightarrow r_{3A} = 0{,}112 \text{ m} = r_{1B}$$

El potencial en el punto A es:

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_{1A}} + K \cdot \frac{q_2}{r_{2A}} + K \cdot \frac{q_3}{r_{3A}}$$

Como $q_1 = q_2 = q_3 = q = 2 \cdot 10^{-6}$ C, se obtiene:

$$V_A = K \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} + \frac{1}{r_{2A}} + \frac{1}{r_{3A}}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}112}\right) = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Por simetría:

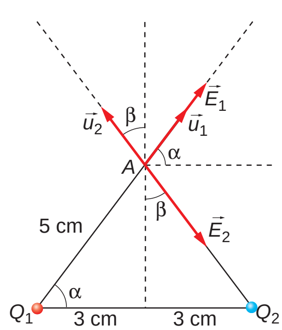
$$V_B = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Como la d.d.p. entre ambos puntos es nula, el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre ellos es nulo.

54 **Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas puntuales de 2 μC y −2 μC, distantes entre sí 6 cm. Calcula el campo y el potencial eléctrico en un punto de la mediatriz del segmento que las une, distante 5 cm de cada carga, y en otro situado en la prolongación del segmento que las une y a 2 cm de la carga positiva.**

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ S.I.

El sistema de referencia elegido para calcular el campo y el potencial eléctrico en un punto de la mediatriz es el siguiente:



De acuerdo con él:

$$r = r_1 = r_2 = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

El valor de los ángulos α y β es:

$$cos\ \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \alpha = arccos\ \frac{3}{5} = 53{,}13°$$

El campo creado por la carga q_1 es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot \vec{i} + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (cos\ 53{,}13° \cdot \vec{i} + sen\ 53{,}13° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} + 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot \vec{j})\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo creado por la carga q_2 es:

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r^2} \cdot (cos\ \alpha \cdot (-\vec{i}) + sen\ \alpha \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (cos\ 53{,}13° \cdot (-\vec{i}) + sen\ 53{,}13° \cdot \vec{j}) =$$

$$= (4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} - 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot \vec{j})\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo eléctrico resultante es la suma de los anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} + 5{,}76 \cdot 10^4 \cdot \vec{j} + 4{,}32 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} - 5{,}76 \cdot 10^6 \cdot \vec{j} =$$

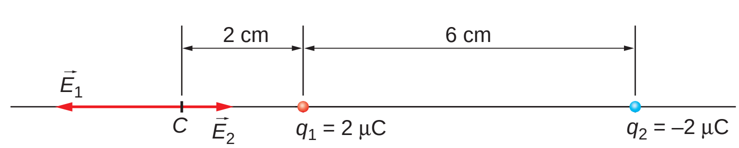
$$= 8{,}64 \cdot 10^6 \cdot \vec{i}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

Al ser el potencial una magnitud escalar, su valor en el punto considerado es:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = \frac{K}{r} \cdot (q_1 + q_2) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot (2 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-6}) = 0\ \text{V}$$

El campo eléctrico en el punto situado en la prolongación del segmento que une las cargas, a 2 cm de la carga positiva, se calcula también aplicando el principio de superposición. De acuerdo con la siguiente figura:



los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot (-\vec{i}) = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{i} = -4{,}5 \cdot 10^7 \cdot \vec{i}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i}) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{(8 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (-\vec{i}) = 2{,}81 \cdot 10^6 \cdot \vec{i}\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -4{,}5 \cdot 10^7 \cdot \vec{i} + 2{,}81 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} = -4{,}22 \cdot 10^7 \cdot \vec{i} \quad \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

siendo el potencial eléctrico en ese punto:

$$V = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} + \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-2}} \right) = 6{,}75 \cdot 10^5 \text{ V}$$

55 **Dos esferas conductoras y aisladas y suficientemente alejadas entre sí, de 6 y 10 cm de radio, están cargadas cada una con una carga de 5 · 10^{-8} C. Las esferas se ponen en contacto mediante un hilo conductor y se alcanza una situación de equilibrio.**

Calcula el potencial al que se encuentra cada una de las esferas, antes y después de ponerlas en contacto, y la carga de cada esfera cuando se establece el equilibrio.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m^2 · C^{-2}

En un conductor, la carga se distribuye por su superficie. Antes de poner en contacto ambas esferas, el potencial a que se encuentra cada una es:

$$V_1 = K \cdot \frac{Q}{R_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-2}} = 7\,500 \text{ V}$$

$$V_2 = K \cdot \frac{Q}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-8}}{10 \cdot 10^{-2}} = 4\,500 \text{ V}$$

El valor total de la carga de las esferas es:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 5 \cdot 10^{-8} + 5 \cdot 10^{-8} = 10 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 10^{-7} \text{ C}$$

Cuando las esferas se ponen en contacto, la situación de equilibrio se alcanzará cuando ambas se encuentren al mismo potencial; en ese momento dejarán de pasar cargas de la esfera que se encuentra a mayor potencial a la que está a menor potencial.

Al imponer la condición de igualdad de potenciales, obtenemos el valor de la carga que posee cada esfera después de alcanzar el equilibrio:

$$V'_1 = V'_2 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{R_1} = K \cdot \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{Q - q_1}{R_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow q_1 = \frac{Q \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-2} + 10 \cdot 10^{-2}} = 3{,}75 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Por tanto:

$$q_2 = Q - q_1 = 10 \cdot 10^{-8} - 3{,}75 \cdot 10^{-8} = 6{,}25 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Después de ponerlas en contacto y alcanzada la situación de equilibrio, el potencial a que se encuentran ambas esferas es:

$$V'_1 = V'_2 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{R_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}75 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-2}} = 5\,625 \text{ V}$$

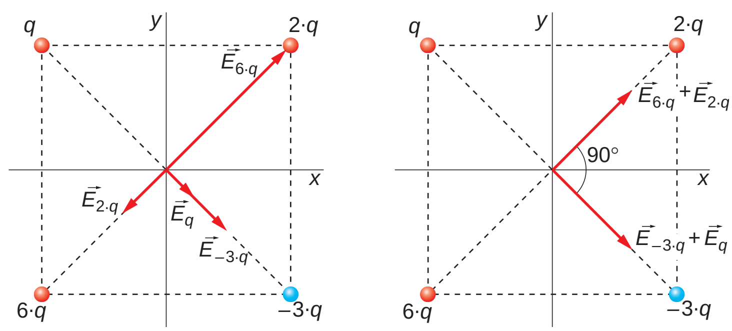
56 **Se disponen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado centrado en el origen como se indica a continuación: q en $(-a, a)$, $2 \cdot q$ en (a, a), $-3 \cdot q$ en $(a, -a)$, y $6 \cdot q$ en $(-a, -a)$. Calcula:**

a) El campo eléctrico en el origen.

b) El potencial en el origen.

c) Se sitúa una quinta carga $+q$ en el origen y se libera desde el reposo. Calcula su velocidad cuando se encuentre a una gran distancia del origen.

a) La posición de las cargas y el campo eléctrico que crea cada una de ellas son los que se muestran en la siguiente figura:



El campo que la carga situada en $(-a, a)$ crea en el origen es:

$$\vec{E}_q = K \cdot \frac{q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (\cos 45° \cdot \vec{i} - \text{sen } 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i} - \vec{j}) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{4 \cdot a^2} \cdot (-\vec{i} - \vec{j})$$

El que crea la carga situada en (a, a):

$$\vec{E}_{2 \cdot q} = K \cdot \frac{2 \cdot q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (-\cos 45° \cdot \vec{i} - \text{sen } 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot (\vec{i} - \vec{j})$$

El que crea la carga situada en $(a, -a)$:

$$\vec{E}_{-3 \cdot q} = K \cdot \frac{-3 \cdot q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (-\cos 45° \cdot \vec{i} + \text{sen } 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= \frac{-9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{i} + \vec{j}) = \frac{27 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{4 \cdot a^2} \cdot (\vec{i} - \vec{j})$$

Y el que crea la carga situada en $(-a, -a)$:

$$\vec{E}_{6 \cdot q} = K \cdot \frac{6 \cdot q}{(a \cdot \sqrt{2})^2} \cdot (\cos 45° \cdot \vec{i} + \text{sen } 45° \cdot \vec{j}) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = \frac{27 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot q}{2 \cdot a^2} \cdot (\vec{i} + \vec{j})$$

El campo resultante es la superposición de los anteriores:

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{2\cdot q} + \vec{E}_{-3\cdot q} + \vec{E}_{6\cdot q} =$$

$$= \frac{9\cdot 10^9 \cdot \sqrt{2}\cdot q}{2\cdot a^2}\cdot\left(\frac{\vec{i}}{2} - \frac{\vec{j}}{2} - \vec{i} - \vec{j} + \frac{3}{2}\cdot\vec{i} - \frac{3}{2}\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{9\cdot 10^9\cdot\sqrt{2}\cdot q}{2\cdot a^2}\cdot(4\cdot\vec{i}) = \frac{18\cdot 10^9\cdot\sqrt{2}\cdot q}{a^2}\cdot\vec{i}$$

NOTA: el enunciado del problema no proporciona ninguna información sobre las unidades en que se expresan las cargas y las coordenadas. Recuerda que, en el S. I., q se mide en C, la distancia en metros, F en $N\cdot C^{-1}$ y V en V.

b) El potencial en el origen será la suma del potencial creado en ese punto por cada una de las cargas:

$$V = V_q + V_{2\cdot q} + V_{-3\cdot q} + V_{6\cdot q} = K\cdot\left(\frac{q}{a\cdot\sqrt{2}} + \frac{2\cdot q}{a\cdot\sqrt{2}} + \frac{-3\cdot q}{a\cdot\sqrt{2}} + \frac{6\cdot q}{a\cdot\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{9\cdot 10^9}{a\cdot\sqrt{2}}\cdot(6\cdot q) = \frac{54\cdot 10^9\cdot q}{a\cdot\sqrt{2}} = \frac{27\cdot\sqrt{2}\cdot 10^9\cdot q}{a}$$

c) Si el origen de potenciales se sitúa en el infinito, $v_\infty = 0$, allí toda la energía de la carga será cinética. Por tanto, aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_c = E_p = q\cdot V \rightarrow E_c = q\cdot\frac{27\cdot\sqrt{2}\cdot 10^9\cdot q}{a} = \frac{27\cdot\sqrt{2}\cdot 10^9\cdot q^2}{a}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 27\cdot\sqrt{2}\cdot 10^9\cdot q^2}{m\cdot a}} = \sqrt{\frac{54\cdot\sqrt{2}\cdot 10^9\cdot q^2}{m\cdot a}}$$

57. Dos esferas metálicas, de 2 y 4 cm de radio, respectivamente, se encuentran en el vacío. Cada una de ellas posee una carga de 50 nC:

a) Calcula el potencial a que se encuentra cada esfera.

En cierto instante, se unen ambas esferas mediante un conductor. Calcula:

b) El potencial a que se encuentra cada esfera tras unirse.

c) La carga que posee cada esfera tras la unión.

a) El potencial de una esfera cargada es:

$$V = K\cdot\frac{Q}{R}$$

Por tanto, para cada una de las esferas del enunciado obtenemos:

$$V_1 = K\cdot\frac{Q}{R_1} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{50\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}} = 22\,500\text{ V}$$

$$V_2 = K\cdot\frac{Q}{R_2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{50\cdot 10^{-9}}{4\cdot 10^{-2}} = 11\,250\text{ V}$$

b) Cuando ambas esferas se unen, se inicia una transferencia de carga eléctrica, que cesa cuando las dos se encuentran al mismo potencial. En ese caso, se cumple la siguiente relación:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q'_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_1} = \frac{Q'_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_2} \rightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta, además, que la carga se conserva, resulta:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q + Q = 2 \cdot Q = 100 \text{ nC} \qquad [2]$$

Las ecuaciones [1] y [2] forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, Q'_1 y Q'_2. Para resolver el sistema, despejamos Q'_1 en la expresión [2] y sustituimos en la [1].

De ese modo, obtenemos la carga de la esfera de 4 cm de radio tras la unión:

$$\frac{100 - Q'_1}{2} = \frac{Q'_2}{4} = 2 \cdot Q'_2 = 400 - 4 \cdot Q'_2 \rightarrow Q'_2 = \frac{400}{6} = 66{,}67 \text{ nC}$$

y, por tanto, la carga de la esfera de 2 cm resulta:

$$Q'_1 = 100 - 66{,}67 = 33{,}33 \text{ nC}$$

c) El potencial al que quedan ambas esferas es:

$$V = V_1 = V_2 \rightarrow V = K \cdot \frac{Q'_1}{R_1} = K \cdot \frac{Q'_2}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{33{,}33 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{66{,}67 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-2}} = 15\,000 \text{ V}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

58 **Supongamos, por un momento, que la materia no fuera eléctricamente neutra, sino que tuviera una carga neta diferente de cero debido a que la carga de los protones no fuera igual a la de los electrones:**

a) ¿Qué carga eléctrica deberían tener la Tierra y la Luna para que la repulsión electrostática igualara la atracción gravitatoria entre ambas? Considera que estas cargas están en la misma relación que sus masas.

b) Si admitimos que la masa de los electrones es mucho menor que la de los protones y neutrones, ¿cuál debería ser la diferencia entre la carga del protón y la del electrón para producir el valor de las cargas del apartado anterior?

Datos: $M_{Luna} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ **kg;**

$M_{protón} = M_{neutrón} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ **kg.**

a) La fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna viene dada por la ley de la gravitación universal de Newton:

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2}$$

Y la de atracción electrostática por la ley de Coulomb:

$$F_e = K \cdot \frac{Q_T \cdot Q_L}{r_{TL}^2}$$

al igualar ambas, obtenemos:

$$F_g = F_e \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2} = K \cdot \frac{Q_T \cdot Q_L}{r_{TL}^2} \rightarrow G \cdot M_T \cdot M_L = K \cdot Q_T \cdot Q_L \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta que las cargas de la Tierra y la Luna están en la misma relación que sus masas:

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{Q_T}{Q_L} \rightarrow M_T = \frac{Q_T \cdot M_L}{Q_L}$$

La expresión [1] queda como:

$$G \cdot \frac{Q_T \cdot M_L^2}{Q_L} = K \cdot Q_T \cdot Q_L \rightarrow Q_L = \sqrt{\frac{G \cdot M_L^2}{K}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{9 \cdot 10^9}} = 6{,}33 \cdot 10^{12}\ \text{C}$$

Por tanto, la carga que corresponde a la Tierra es:

$$Q_T = \frac{Q_L \cdot M_T}{M_L} = \frac{6{,}33 \cdot 10^{12} \cdot 15{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}35 \cdot 10^{22}} = 5{,}15 \cdot 10^{14}\ \text{C}$$

Por supuesto, la carga de la Luna y de la Tierra debe ser del mismo signo para que se repelan.

b) Para resolver este apartado, supondremos que las masas de la Tierra y la Luna se deben solo a los protones y neutrones, y despreciamos la contribución de los electrones, al ser su masa mucho menor.

El número de nucleones que formarán la masa de la Luna (protones más neutrones), será:

$$n = \frac{M_L}{m_{nucleón}} = \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 4{,}4 \cdot 10^{49}\ \text{nucleones}$$

Considerando que el número de protones es igual al número de neutrones:

$$n_{protones} = \frac{n}{2} = \frac{4{,}4 \cdot 10^{49}}{2} = 2{,}2 \cdot 10^{49}\ \text{protones}$$

Para que la Luna tuviera una carga de $6{,}33 \cdot 10^{12}$ C, la diferencia entre la carga del protón y del electrón debería ser:

$$\Delta q = \frac{6{,}33 \cdot 10^{12}}{2{,}2 \cdot 10^{49}} = 2{,}88 \cdot 10^{-37}$$

Es decir, la carga del protón podría ser:

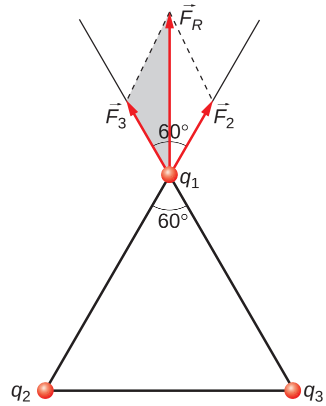
$$q_{p_+} = (1{,}6 \cdot 10^{-19} \pm 2{,}88 \cdot 10^{-37})\ \text{C}$$

59. Tres cargas eléctricas puntuales iguales, con $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$ nC, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado. Calcula:

a) La fuerza que actúa sobre Q_1.

b) El campo eléctrico y el potencial eléctrico en el centro (baricentro) del triángulo.

a) De acuerdo con la figura:



La fuerza que ejerce la carga q_2 sobre q_1 es, en módulo:

$$F_{q_2 \to q_1} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{1^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

Del mismo modo, la que ejerce q_3 sobre q_1 es:

$$F_{q_3 \to q_1} = K \cdot \frac{q_3 \cdot q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{1^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

Observa que, al ser el triángulo equilátero, el ángulo formado por ambas fuerzas es de 60°. Por tanto, el valor de la resultante es:

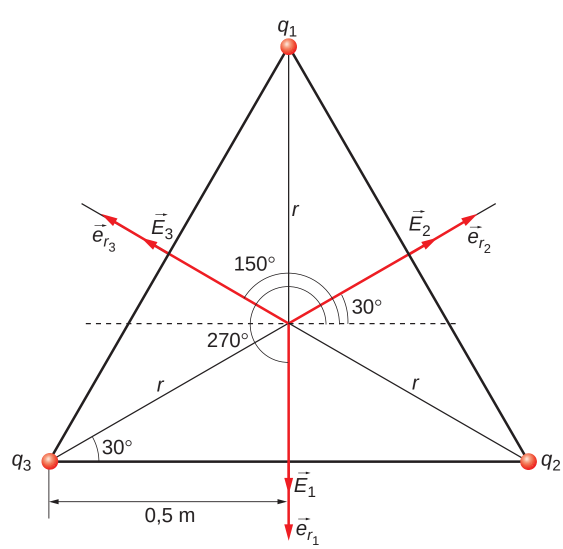
$$F = \sqrt{F^2_{q_2 \to q_1} + F^2_{q_3 \to q_1} + 2 \cdot F_{q_2 \to q_1} \cdot F_{q_3 \to q_1} \cdot \cos 60°} =$$

$$= \sqrt{(3{,}6 \cdot 10^{-8})^2 + (3{,}6 \cdot 10^{-8})^2 + 2 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot \cos 60°} = 6{,}24 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

Esta fuerza está dirigida en el sentido positivo del eje de ordenadas. Por tanto:

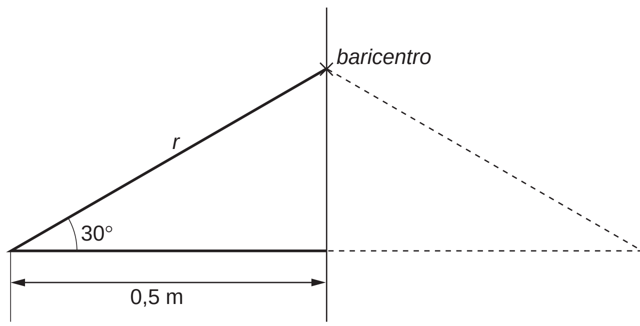
$$\vec{F} = 6{,}24 \cdot 10^{-8} \cdot \vec{j}\ \text{N}$$

b) Por definición, la distancia de cada carga al baricentro del triángulo es la misma. Teniendo en cuenta la siguiente figura:



Se observa que, por simetría, el campo eléctrico total creado por las tres cargas en el baricentro del triángulo es nulo.

Para calcular el valor del potencial en dicho punto, debemos calcular la distancia que separa las cargas del baricentro, que, de acuerdo con la siguiente figura:



tiene el siguiente valor:

$$cos\ 30° = \frac{0,5}{r} \rightarrow r = \frac{0,5}{cos\ 30°} = 0,577 \text{ m}$$

El potencial en el baricentro se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

teniendo en cuenta que:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r$$

su valor es:

$$V = 3 \cdot K \cdot \frac{q}{r} = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,577} = 93,53 \text{ V}$$

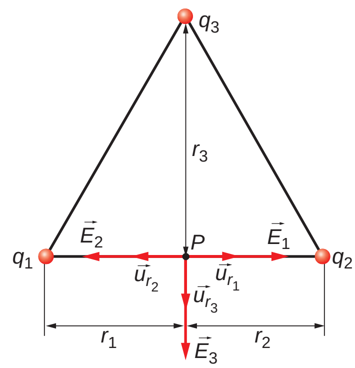
60. Tres cargas positivas, de 5 nC cada una de ellas, se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

a) Halla el campo eléctrico en el punto medio de uno de los lados del triángulo.

b) Halla el potencial eléctrico en el punto medio de uno de los lados del triángulo.

c) Halla el punto en el que el campo eléctrico es cero.

a) Si tomamos un sistema de referencia centrado en el punto medio de uno de los lados del triángulo, el campo eléctrico que crea en él cada carga es el mostrado en la siguiente figura:



De acuerdo con ello, los campos creados por las cargas q_1 y q_2 tienen el mismo valor y sus sentidos son opuestos, por lo que se anulan entre sí. Por tanto, el campo eléctrico en el punto medio es el debido a la carga q_3.

El valor de r_3 es:

$$12^2 = 6^2 + r_3^2 \rightarrow r_3 = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}39 \text{ cm} = 10{,}39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Por tanto:

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{q_3}{r_3^2} \cdot (-\vec{j}) = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{(10{,}39 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \vec{j} = -4{,}17 \cdot 10^3 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

b) El valor del potencial en el punto medio de uno de los lados del triángulo es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

siendo:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$r_1 = r_2 = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$r_3 = 10{,}39 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Por tanto:

$$V = K \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{10{,}39 \cdot 10^{-2}}\right) =$$

$$= 1\,933{,}11 \text{ V}$$

c) El campo eléctrico, por simetría, es nulo en el baricentro del triángulo (consúltese la figura incluida en el apartado b) del problema anterior).

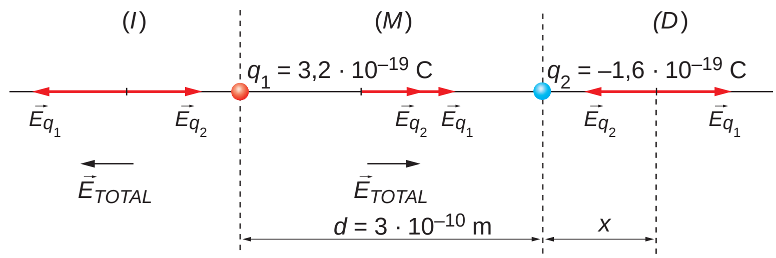
61. Sean dos iones de cargas $2 \cdot |e|$ y $-|e|$ respectivamente, separados una distancia de 3 Å. Calcula:

a) La distancia del ion positivo a la que se anula el campo eléctrico total.

b) La distancia del ion positivo a la que se anula el potencial eléctrico total.

c) La energía potencial eléctrica de los dos iones.

a) El campo eléctrico total se anulará en un punto de la recta que une ambas cargas situado a la derecha de ambas, de acuerdo con la siguiente figura:



Al imponer la condición de que, en módulo, se anule el campo, se obtiene el valor de la distancia x:

$$E_{q_1} = E_{q_2} \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{(d+x)^2} = K \cdot \frac{q_2}{x^2} \rightarrow \frac{q_1}{(d+x)^2} = \frac{q_2}{x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 \cdot (q_2 - q_1) + 2 \cdot d \cdot q_2 \cdot x + q_2 \cdot d^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19} - 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) + 2 \cdot 3 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot x + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 = 0$$

$$-x^2 + 6 \cdot 10^{-10} \cdot x + 9 \cdot 10^{-20} = 0 \rightarrow x = 7{,}24 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La distancia al ion positivo es, por tanto:

$$d = 7{,}24 \cdot 10^{-10} + 3 \cdot 10^{-10} = 10{,}24 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 10{,}24 \text{ Å}$$

b) El potencial se anulará en un punto situado entre ambas cargas, a una distancia x de la primera, que calculamos a continuación:

$$V_{q_1} + V_{q_2} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{x} + K \cdot \frac{q_2}{3 \cdot 10^{-10} - x} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{3 \cdot 10^{-10} - x} = 0 \rightarrow x = \frac{-q_1 \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{q_2 - q_1} =$$

$$= \frac{-3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19} - (3{,}2 \cdot 10^{-19})} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

A la derecha de la carga negativa también existe otro punto en el que se anula el potencial. Si llamamos y a la distancia que separa la carga negativa de ese punto:

$$V_{q_1} + V_{q_2} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{q_1}{3 \cdot 10^{-10} + y} + K \cdot \frac{q_2}{y} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{3 \cdot 10^{-10} + y} + \frac{q_2}{y} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-q_2 \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{q_1 + q_2} = \frac{-(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{3{,}2 \cdot 10^{-19} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La distancia a que se encuentra este punto del ion positivo es:

$$d' = 3 \cdot 10^{-10} + y = 3 \cdot 10^{-10} + 3 \cdot 10^{-10} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

c) La energía potencial de un sistema de cargas puntuales se corresponde con el trabajo necesario para traer las cargas desde el infinito hasta las posiciones que ocupan. Si suponemos que se trae en primer lugar la carga q_1, al no haber otra creando campo, el trabajo necesario es nulo. El potencial que crea esa carga a $3 \cdot 10^{-10}$ m de distancia es:

$$V = K \cdot \frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^{-10}} = 9{,}6 \text{ V}$$

Por tanto, la energía potencial de la segunda carga es:

$$E_p = q \cdot V = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}6 = -1{,}54 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

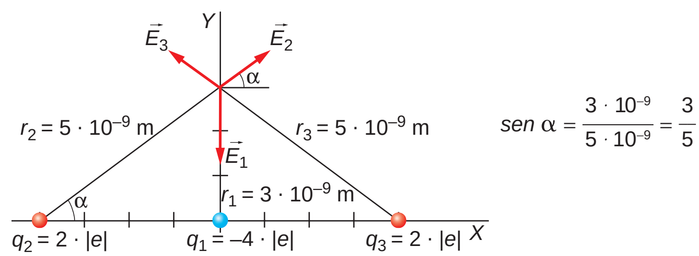
62 Tenemos una carga de $-4 \cdot |e|$ en el origen, una de $2 \cdot |e|$ en el punto $-4 \cdot \vec{i}$ nm y otra de $2 \cdot |e|$ en el punto $4 \cdot \vec{i}$ nm. Calcula:

a) El potencial eléctrico en el punto $3 \cdot \vec{j}$.

b) El campo eléctrico en dicho punto.

c) La energía potencial eléctrica del conjunto de las cargas.

La situación de las cargas es la que se muestra en la siguiente figura:



a) De acuerdo con ella, el potencial eléctrico en el punto $3 \cdot \vec{j}$ es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q_2}{r_2} + K \cdot \frac{q_3}{r_3} = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^{-9}} + \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-9}} + \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-9}}\right) = 0{,}768 \text{ V}$$

b) Observa, en la figura anterior, que las componentes en el eje X de los campos $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$ se anulan. El campo resultante que crean es debido a la componente en el eje Y. Por tanto:

$$E_{2,y} = E_{3,y} = K \cdot \frac{2 \cdot |e|}{r_2^2} \cdot sen\ \alpha \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(5 \cdot 10^{-9})^2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \vec{j} =$$

$$= 6{,}91 \cdot 10^7 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo creado por la carga q_1 es:

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^{-9})^2} \cdot \vec{j} = -6{,}4 \cdot 10^8 \cdot \vec{j} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

El campo resultante es:

$$\vec{E} = \vec{E}_{2,y} + \vec{E}_{3,y} + \vec{E}_1 = 6{,}91 \cdot 10^7 \cdot \vec{j} + 6{,}91 \cdot 10^7 \cdot \vec{j} - 6{,}4 \cdot 10^8 \cdot \vec{j} =$$

$$= -5{,}02 \cdot 10^8 \cdot \vec{j} \quad \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$$

c) La energía potencial eléctrica del conjunto de las cargas es la suma de las energías potenciales de ellas, tomadas de dos en dos:

$$E_p = E_{p_{1,2}} + E_{p_{1,3}} + E_{p_{2,3}} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{1,2}} + K \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{1,3}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{2,3}} =$$

$$= K \cdot \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{2,3}} \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{(-4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{-9}} + \frac{(-4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{-9}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{8 \cdot 10^{-9}} \right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4 \cdot 10^{-9}} \cdot (-8 - 8 + 2) = -8,064 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

63. Se sitúa en el origen de coordenadas del espacio tridimensional vacío un cuerpo puntual de masa 10 kg y con una carga eléctrica –1 nC. En el punto (1, 1, 1) metros se sitúa otro cuerpo puntual de masa 20 kg y carga eléctrica –100 pC:

a) Determina la fuerza total que ejerce el primer cuerpo sobre el segundo.

b) ¿Cuál es el cociente entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria en este caso?

c) Si se separan las cargas una distancia de 10 m, sobre la misma línea que antes, el cociente entre las fuerzas gravitatoria y eléctrica, ¿crece, decrece o se mantiene?

Datos: $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\ C^2 \cdot m^2 \cdot N^{-1}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) La distancia que separa ambos cuerpos puntuales es:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ m}$$

El primer cuerpo ejerce sobre el segundo una fuerza de atracción gravitatoria y otra de repulsión electrostática. El valor de la primera es:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 20}{(\sqrt{3})^2} = 4,45 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Y el de la fuerza eléctrica:

$$F_e = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-10}}{(\sqrt{3})^2} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

En ambos casos, la dirección de la fuerza es la de la recta que une ambas cargas.

El valor de la fuerza total que ejerce el primer cuerpo sobre el segundo es:

$$F = F_e - F_g = 3 \cdot 10^{-8} - 4,45 \cdot 10^{-9} = 2,555 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Su sentido es el de la fuerza eléctrica.

b) El cociente entre el módulo de ambas fuerzas es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{4,45 \cdot 10^{-9}} = 6,74$$

c) El cociente entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{d^2}}{G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{d^2}} = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{G \cdot m_1 \cdot m_2}$$

Observa que no depende de la distancia a que se encuentren las cargas; por tanto, el cociente se mantendrá.