UNIDAD 2: Movimiento ondulatorio

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 41

1. Al agitar una cuerda por un extremo se observa que una perturbación se propaga a lo largo de la misma. ¿De qué forma el extremo de la cuerda contagia su movimiento a toda ella?
La cuerda es un medio continuo, por lo que al agitarla cada punto está sometido a una tensión y arrastra al que tiene al lado.

2. ¿Crees que cuando levantamos la voz, nuestras palabras llegan antes a nuestros interlocutores que si hablamos más bajo?
No, la velocidad de propagación del sonido no depende de lo intenso que éste sea.

3. Al golpear un objeto se escucha un sonido si se está cerca de él. ¿Por qué no se oye nada a partir de una cierta distancia?
Al vibrar un objeto transmite energía al medio que le rodea en las tres direcciones. Al avanzar la onda, deben ponerse más partículas en movimiento por lo que se atenúa y al cabo de una cierta distancia no tiene la suficiente amplitud como para ser escuchado.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 70

1. Una onda transversal, de 6 cm de amplitud, se propaga con una velocidad de 2 m/s y una frecuencia de 4 Hz, hacia la derecha del observador. En el instante inicial, el origen de coordenadas está situado a + 6 cm de la posición central de vibración. Deduce la ecuación general del movimiento y determina la posición de un punto situado a 1 m del origen en el instante t = 2 s. Deduce las expresiones generales de la velocidad y de la aceleración con que vibran las partículas del medio. Calcula la diferencia de fase para una partícula cualquiera entre dos instantes separados por un tiempo de 0,625 s.
La expresión general de un movimiento ondulatorio es: $y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$
Como en el instante inicial el origen del sistema de referencia está en la posición más alejada de la central, se tiene que:
$y_{x=0,t=0} = 6\ \text{cm} = 6\ \text{cm} \cdot \cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_0)$; $1 = \cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ rad
La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 4 \cdot \pi \cdot 4\ \text{Hz} = 8 \cdot \pi$ rad/s
El período es: $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4\,\text{Hz}} = 0{,}25\,\text{s}$
La longitud de onda es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\,\text{m/s}}{4\,\text{Hz}} = 0{,}5\,\text{m}$
Y el número de ondas es: $k = \frac{\omega}{v} = \frac{8 \cdot \pi\,\text{rad/s}}{2\,\text{m/s}} = 4 \cdot \pi\,\text{m}^{-1}$
Sustituyendo en la expresión general, la ecuación general del movimiento es:
$y_{x,t} = 0{,}06 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$

Y la posición del punto considerado en el instante pedido es:
$y_{x=1,t=2} = 0{,}06 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot 2 - 4 \cdot \pi \cdot 1) = 0{,}06 \cdot \cos(12 \cdot \pi) = 0{,}06$ m

Aplicando las definiciones de velocidad y aceleración, se tienen las expresiones pedidas.
$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}06 \cdot 8 \cdot \pi \cdot [-\,\text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)] = -\,0{,}48 \cdot \pi \cdot \text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$ SI
$a = \frac{dv}{dt} = -\,0{,}48 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \pi \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) = -\,3{,}84 \cdot \pi^2 \cdot \cos(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)$ SI

Comparando el tiempo transcurrido con el período, encontramos que:

$$\Delta t = 0{,}625\,\text{s} = \frac{0{,}625\,\text{s}}{0{,}25\,\text{s}} T = 2{,}5T$$

Luego los instantes están en oposición de fase.

De otra forma, se llega a la misma conclusión:

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 8 \cdot \pi \cdot t_2 - 4 \cdot \pi \cdot x - (8 \cdot \pi \cdot t_1 - 4 \cdot \pi \cdot x) = 8 \cdot \pi\,(t_2 - t_1) = 8 \cdot \pi$ rad/s $\cdot$ 0,625 s = $5 \cdot \pi$ rad

2. Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación: y = 0,2 cos (2 t – 0,1 x), en unidades SI. Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación. Determina el estado de vibración, velocidad y aceleración de una partícula situada en x = 0,2 m en el instante t = 0,5 s.

a) Comparando la expresión de la onda con la expresión general: $y_{x,\,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$ se tiene para la longitud de onda que:

$$k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = 0{,}1\,\text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\cdot\pi}{0{,}1\,\text{m}^{-1}} = 20\cdot\pi\,\text{m}$$

Y la velocidad de propagación es: $v = \lambda\cdot\nu = \frac{2\cdot\pi}{k}\frac{\omega}{2\cdot\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\,\text{rad/s}}{0{,}1\,\text{m}^{-1}} = 20\,\text{m/s}$

b) Sustituyendo en la ecuación de la onda se tiene que la elongación de la partícula en ese instante es:

$y_{x,\,t} = 0{,}2 \cdot \cos(2 \cdot t - 0{,}1 \cdot x) \rightarrow y = 0{,}2 \cdot \cos(2 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = 0{,}11$ m

Aplicando la definición de velocidad de vibración:

$v_{x,\,t} = \frac{dy}{dt} = -0{,}2 \cdot 2 \cdot \text{sen}(2 \cdot t - 0{,}1 \cdot x) \rightarrow v = -0{,}4 \cdot \text{sen}(2 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = -0{,}33$ m/s

Aplicando la definición de aceleración de vibración:

$a_{x,\,t} = \frac{dv}{dt} = -0{,}4 \cdot 2 \cdot \cos(2 \cdot t - 0{,}1 \cdot x) \rightarrow a = -0{,}8 \cdot \cos(2 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = -0{,}446\ \text{m/s}^2$

3. Una varilla sujeta por un extremo vibra con una frecuencia de 400 Hz y con una amplitud de 10^{-3} m. La vibración se propaga en el aire a 340 m/s. Escribe la ecuación de ese movimiento ondulatorio armónico. ¿Qué elongación tendrá un punto que diste del origen 0,85 m al cabo de 3 s de comenzar la vibración?

La frecuencia angular ω es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 2\,\pi \cdot 400$ Hz = $800\,\pi$ rad/s

El número de ondas k es: $k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{v\cdot T} = \frac{\omega}{v} = \frac{800\,\pi\,\text{rad/s}}{340\,\text{m/s}} = \frac{40}{17}\pi\,\text{m}^{-1}$

a) La ecuación que describe el movimiento es:

$y\,(x, t) = A\,\text{sen}\,(\omega \cdot t - k \cdot x) = 10^{-3}\,\text{sen}\,(800\,\pi\,t - \frac{40}{17}\pi\,x) = 10^{-3}\,\text{sen}\,40\,\pi\,(20\,t - \frac{1}{17}\,x)$ metros

b) Sustituyendo en la ecuación general:

$y\,(0{,}85\text{ m}; 3\text{ s}) = 10^{-3} \cdot \text{sen}\,40\,\pi\,(20 \cdot 3 - \frac{1}{17}\,0{,}85) = 10^{-3} \cdot \text{sen}\,40\,\pi \cdot 59{,}95 = 0$ m

4. Una onda armónica en un hilo tiene una amplitud de 0,015 m, una longitud de onda de 2,4 m y una velocidad de 3,5 m/s. Determina el período, la frecuencia y el número de onda. Escribe la función de onda, tomando como sentido positivo del eje X el sentido de propagación de la onda.

a) El período es: $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2{,}4\,\text{m}}{3{,}5\,\text{m/s}} = \frac{24}{35}\,\text{s}$

La frecuencia es: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{35}{24}\,\text{Hz}$

El número de onda k es: $k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{2{,}4\,\text{m}} = \frac{5}{6}\pi\,\text{m}^{-1}$

b) La frecuencia angular es: $\omega = 2\ \pi\ \nu = \frac{35}{12}\ \pi$ rad/s

La ecuación pedida es: y (x, t) = A sen (ω t - k x) = 0,015 A sen ($\frac{35}{12}\ \pi\ t - \frac{5}{6}\ \pi\ x$) m

Operando: y (x, t) = 0,015 A sen $\frac{5}{6}\ \pi\ (\frac{7}{2}\ t - x)$ m

5. Escribe la ecuación de una onda que se propaga en una cuerda (en sentido negativo del eje X) y que tiene las siguientes características: 0,5 m de amplitud, 250 Hz de frecuencia, 200 m/s de velocidad de propagación y la elongación inicial en el origen es nula. Calcula la máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.

Si la onda se propaga hacia la izquierda y en el instante inicial la elongación del origen es igual a cero, entonces la ecuación general es: $y_{x,t} = A \cdot \text{sen}\ (\omega \cdot t + k \cdot x)$

La amplitud es: A = 0,5 m

La frecuencia angular es: ω = 2 · π · f = 2 · π · 250 Hz = 500 · π rad/s

El número de ondas es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{v}{\nu}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 250 \text{Hz}}{200 \text{m/s}} = 2{,}5 \cdot \pi \text{m}^{-1}$

La ecuación pedida es: $y_{x,t}$ = 0,5 m · sen (500 · π rad/s · t + 2,5 · π m^{-1}· x)

b) La expresión de la velocidad de vibración es: $v_{x,t} = \frac{dy_{x,t}}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x)$

Y su valor máximo es: $v_{máxima}$ = A · ω = 0,5 m · 500 · π rad/s = 250 · π m/s

6. Una onda transversal y sinusoidal de la forma: y = A A sen (kx + ωt), tiene una frecuencia de 50 Hz y se desplaza con una velocidad de 0,32 m/s. En el instante inicial la velocidad de la partícula situada en el origen tiene un valor de 4 m/s. Indica el sentido de propagación de la onda a lo largo del eje X. Calcule la amplitud, el número de onda y la frecuencia angular ω.

a) La onda se propaga hacia el sentido de las X negativas.

b) La frecuencia angular es: ω = 2 π A ν = 2 A π A 50 Hz = 100 π rad/s

El número de ondas k es: $\left.\begin{array}{l} k = \frac{2\ \pi}{\lambda} \\ \lambda = \frac{v}{\nu} \end{array}\right] \Rightarrow k = \frac{2\ \pi\ \nu}{v} = \frac{2\ \pi\ 50\ \text{Hz}}{0{,}32\ \text{m/s}} = 312{,}5\ \pi\ \text{m}^{-1}$

La ecuación que describe la perturbación es: y = A sen (kx + ωt) = A sen (312,5 π x - 100 π t)

La velocidad de vibración de las partículas del medio es:

$v = \frac{dy}{dt}$ = A A 100 A π A cos (312,5 x - 100 π t)

A partir de las condiciones de contorno:

$v_{t=0,\ x=0}$ = A A 100 A π cos 0 = 4 Ψ A = 0,0127 m = 12,7 mm

7. A una playa llegan 15 olas por minuto y se observa que tardan 5 minutos en llegar desde un barco anclado en el mar a 600 m de la playa. Tomando como origen de coordenadas un punto de la playa, escribe la ecuación de onda, en el SI, si la amplitud de las olas es de 50 cm y la fase inicial es nula. Si sobre el agua a una distancia 300 m de la playa existe una boya, que sube y baja según pasan las olas, calcule su velocidad en cualquier instante de tiempo ¿Cuál es su velocidad máxima?

Se supondrá que las olas del mar se comportan como un movimiento ondulatorio

De los datos iniciales se deducen los valores de la frecuencia y de la velocidad de propagación.

$$\nu = \frac{15\,\text{olas}}{60\,\text{s}} = 0{,}25\,\text{Hz}\ ;\ v = \frac{600\,\text{m}}{5\,\text{min}\cdot 60\,\text{s/min}} = 2\,\text{m/s}$$

a) La frecuencia angular y el número de ondas son:

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}25$ Hz $= 0{,}5 \cdot \pi$ rad/s; $\quad k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{0{,}5\cdot\pi\,\text{rad/s}}{2\,\text{m/s}} = 0{,}25\cdot\pi\,\text{m}^{-1}$

La expresión de la ecuación de ondas, suponiendo que se propagan hacia la derecha del observador, es:

$y_{x,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0{,}50\ \text{m} \cdot \cos(0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 0{,}25 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \cdot x)$

b) La expresión general de la velocidad de vibración de las partículas del medio es:

$v_{x,t} = \frac{dy}{dt} = -\,0{,}25 \cdot \pi\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 0{,}25 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \cdot x)$ m/s

Y la velocidad del punto x = 300 m es:

$v_{x=300,\,t} = -\,0{,}25 \cdot \pi\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 0{,}25 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \cdot 300\ \text{m})$

$v_{x=300,\,t} = -\,0{,}25 \cdot \pi\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ (0{,}5 \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot t - 75 \cdot \pi)$

Su valor máximo es: $v_{máximo} = 0{,}25 \cdot \pi$ m/s

8. La ecuación de una onda que se propaga transversalmente por una cuerda expresada en unidades del SI es: $y_{x,\,t} = 0{,}06 \cdot \cos 2 \cdot \pi\,(4 \cdot t - 2 \cdot x)$ m. Representa gráficamente los movimientos vibratorios de las partículas situadas en x = 0 m, x = 1 m y x = 1,25 m

El período y la longitud de onda se determinan comparando la expresión dada con la general.

$y_{x,\,t} = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$

$\omega = 8 \cdot \pi$ rad/s $\Rightarrow T = \frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{\omega} = \frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{8\cdot\pi\,\text{rad/s}} = 0{,}25\,\text{s}$

$k = 4 \cdot \pi\ \text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{4\cdot\pi\,\text{m}^{-1}} = 0{,}5\,\text{m}$

La diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en x = 0 m y x = 1 m es:

$\Delta\varphi = \Delta x \frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{\lambda} = 1\,\text{m}\frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{0{,}5\,\text{m}} = 4\cdot\pi\,\text{rad}$, las dos partículas vibran en fase.

La diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en x = 0 m y x = 1,25 m es:

$\Delta\varphi = \Delta x \frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{\lambda} = 1{,}25\,\text{m}\frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{0{,}5\,\text{m}} = 5\cdot\pi\,\text{rad} = 2\cdot 2\cdot\pi\,\text{rad} + \pi\,\text{rad}$, las dos partículas vibran en oposición de fase.

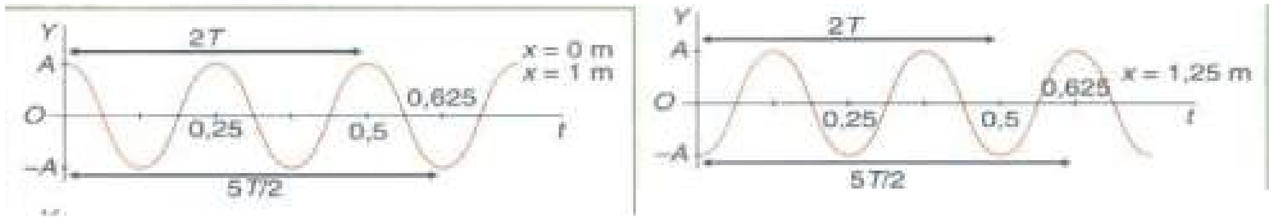
Para la representación gráfica, se determina la elongación en el instante inicial de las partículas y se tiene en cuenta que las vibraciones se repiten a lo largo del tiempo con un período T = 0,25 s.

$y_{x=0,\,t=0} = 0{,}06 \cdot \cos 2 \cdot \pi\,(4 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0{,}06$ m

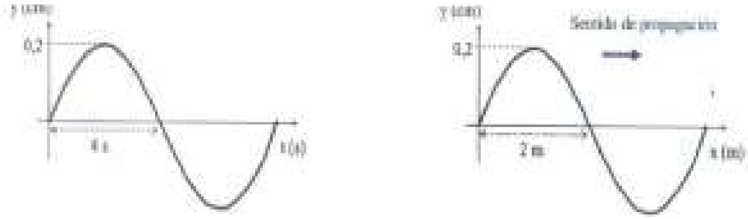
La elongación es máxima y positiva.

$y_{x=1;\,t=0} = 0{,}06 \cdot \cos 2 \cdot \pi\,(4 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 0{,}06$ m, pues está en fase con el anterior.

$y_{x=1{,}25;\,t=0} = 0{,}06 \cdot \cos 2 \cdot \pi\,(4 \cdot 0 - 2 \cdot 1{,}25) = -\,0{,}06$ m, está en oposición de fase con los anteriores.



9. En las figuras se representa la variación de la posición, y, de un punto de una cuerda vibrante en función del tiempo, t, y de su distancia, x, al origen, respectivamente. Deduce la ecuación de onda y determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto de la cuerda.



a) De las representaciones gráficas se deduce que la onda se propaga hacia la derecha y que las constantes del movimiento son:

A = 0,2 cm; T = 8 s; λ = 4 m; $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{8\,s\,T} = 0{,}25\cdot\pi\frac{rad}{s}$; $k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot\pi}{4\,m} = 0{,}5\cdot\pi\, m^{-1}$

$y_{x,t} = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0{,}2 \cdot 10^{-2}\ m \cdot sen\,(0{,}25 \cdot \pi\ s^{-1} \cdot t - 0{,}5 \cdot \pi\ m^{-1} \cdot x)$

b) La velocidad de propagación de la onda es una cantidad que depende del medio de transmisión.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{0{,}25\cdot\pi\ s^{-1}}{0{,}5\cdot\pi\ m^{-1}} = 0{,}5\frac{m}{s}$$

La velocidad de vibración depende de la posición del punto a lo largo de la cuerda.

$$v_{vibración} = \frac{dy}{dt} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi\ \frac{m}{s} \cdot \cos\,((0{,}25 \cdot \pi\ s^{-1} \cdot t - 0{,}5 \cdot \pi\ m^{-1} \cdot x)$$

10. Una onda se propaga por la parte negativa del eje X con una longitud de onda de 20 cm, una frecuencia de 25 Hz, una amplitud de 3 cm y fase inicial igual a cero. Escribe la ecuación de la onda e indica el instante en el que un punto que se encuentra a 2,5 cm del origen alcanza, por primera vez, una velocidad nula.

La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 25\ Hz = 50\,\pi\ rd/s$

El número de ondas es: $k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot\pi\, rad}{0{,}2\,m} = 10\cdot\pi\, m^{-1}$

La ecuación general de la onda, como se desplaza hacia la parte negativa del eje X, es:

$y = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + k \cdot x) = 0{,}03 \cdot sen\,(50 \cdot \pi \cdot t + 10 \cdot \pi \cdot x)\ m$

La ecuación general de la velocidad de vibración es:

$v_{x,\,t} = 1{,}5 \cdot \pi \cdot \cos\,(50 \cdot \pi \cdot t + 10 \cdot \pi \cdot x)$

Y la ecuación con la que vibra el punto $x = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m es:

$v_{x=2,5\,cm\,;\,t} = 1{,}5 \cdot \pi \cdot \cos\,(50 \cdot \pi \cdot t + 10 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}) = 1{,}5 \cdot \pi \cdot \cos\,(50 \cdot \pi \cdot t + 0{,}25 \cdot \pi)$

La velocidad es igual a cero cuando:

$\cos\,(50 \cdot \pi \cdot t + 0{,}25 \cdot \pi) = 0 \Rightarrow 50 \cdot \pi \cdot t + 0{,}25 \cdot \pi = \pi/2$

Despejando: $t = 5 \cdot 10^{-3}$ s

11. En el centro de una piscina circular de 6 m de radio se produce una perturbación que origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. La longitud de onda es de 0,50 m y tarda 12 s en llegar a la orilla. Calcula la frecuencia del movimiento ondulatorio. ¿Cuál es la amplitud del mismo si al cabo de 0,25 s la elongación en el origen es de 4 cm? Determina la elongación en el instante t = 12 s en un punto situado a 6 m del foco emisor.

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6\,m}{12\,s} = 0{,}5\,m/s$

La frecuencia y período de la perturbación son: $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{0{,}5\,m/s}{0{,}5\,m} = 1\,Hz \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1\,Hz} = 1\,s$

Si se supone que en el instante inicial el centro de la piscina está en reposo, entonces $\phi_0 = 0$ y se tiene que la expresión del movimiento vibratorio del origen es:
$y_{x=0;\,t} = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) = A \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t + 0)$

Sustituyendo: 4 cm = $A \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 0{,}25) \Rightarrow A = 4$ cm

La fase del movimiento es:
$\phi = \omega \cdot t - k \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} x = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{0{,}5\,m} x = 2 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x$

La diferencia de fase entre el origen en el instante inicial y la orilla en el instante 12 s es:
$\Delta\phi = \phi_0 - \phi_{orilla} = (2 \cdot \pi \cdot t_0 - 4 \cdot \pi \cdot x_0) - (2 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) =$
$= 2 \cdot \pi\,(t_0 - t) - 4 \cdot \pi\,(x_0 - x) = 2 \cdot \pi \cdot 12\,s - 4 \cdot \pi \cdot 6\,m = 0$ rad

Las dos estados de vibración están en fase, por lo que la elongación de la orilla en ese instante es:
$y_{x=6\,m;\,t=12\,s} = 0$ m

12. Un foco sonoro emite una onda armónica de amplitud 10 pascales y frecuencia 250 Hz. La onda se propaga en la dirección positiva del eje Y con velocidad v = 340 m/s y en el instante inicial, t = 0, la presión es máxima en el foco emisor. Escribe la ecuación Ψ (y, t) de la onda sonora. ¿Cuál es la variación de la presión respecto del equilibrio de un punto situado a 1,5 m del foco en el instante t= 3 s?

La expresión general de una onda armónica propagándose hacia la parte positiva del eje Y es:
$\Psi\,(t) = \Psi_0 \cdot \cos\,(\omega \cdot t - k \cdot y + \phi_0)$

La amplitud es: $\Psi_0 = 10$ Pa
La frecuencia angular es: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 250\,Hz = 500\,\pi$ rad,s
El número de ondas es: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 250\,Hz}{340\,m/s} = 1{,}47 \cdot \pi\,m^{-1}$
Para calcular el desfase, se aplican las condiciones de máxima presión en el foco en el instante inicial:
$\Psi_{y=0;\,t=0} = 10\,Pa \cdot \cos\,(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \phi_0) = 10\,Pa$; $\cos \phi_0 = 1 \rightarrow \phi_0 = 0$ rad

La ecuación de la onda sonora es: $\Psi\,(t) = 10 \cdot \cos\,(500 \cdot \pi \cdot t - 1{,}47 \cdot \pi \cdot y)$

Y la variación respecto del equilibrio en el punto es instante pedidos es:
$\Psi_{y=1{,}5;\,t=3} = 10 \cdot \cos\,(500 \cdot \pi \cdot 3 - 1{,}47 \cdot \pi \cdot 1{,}5) = 8$ Pa

13. Dos corchos que flotan en la superficie del agua de un estanque son alcanzados por una onda que se produce en dicha superficie, tal que los sucesivos frentes de onda son rectas paralelas entre sí que avanzan perpendicularmente a la recta que une ambos corchos. Se observa que los corchos realizan 8 oscilaciones en 10 segundos, y que oscilan en oposición de fase. Sabiendo que la distancia entre los corchos es 80 cm y que ésta es la menor distancia entre puntos que oscilan en oposición de fase, calcular la velocidad de propagación de la onda en el agua.

La frecuencia del movimiento es: $\nu = \frac{8\,\text{oscilaciones}}{10\,\text{s}} = 0{,}8\,\text{Hz}$

Los puntos más próximos que vibran es oposición de fase están separados por media longitud de onda.

Por tanto: $\frac{\lambda}{2} = 80\,\text{cm} \Rightarrow \lambda = 160\,\text{cm}$

La velocidad de propagación de la onda es:

$v = \lambda \cdot \nu = 160\ \text{cm} \cdot 0{,}8\ \text{Hz} = 128\ \text{cm/s}$

14. Cierta onda está descrita por la ecuación: ψ (x, t) = 0,002 A sen (t - x/4) , todo expresado en unidades del S.I. Determina la frecuencia de la onda, su velocidad de propagación y la distancia entre dos puntos consecutivos que vibran con una diferencia de fase de 1201.

Comparando la expresión dada con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$\psi_{x,t} = A\ \text{sen}\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$

$\omega = 1\ \text{rad/s} = 2 \cdot \pi \cdot \nu \Rightarrow \nu = 0{,}159\ \text{Hz}$

$k = \frac{1}{4}\text{m}^{-1} = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 8 \cdot \pi\ \text{m}$

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1\,\text{rad/s}}{\frac{1}{4}\text{m}^{-1}} = 4\,\text{m/s}$

A una distancia de una longitud de onda le corresponde una diferencia de fase de 2 · π rad (360º).

$\Delta x = 120^{\text{o}} \frac{\lambda}{360^{\text{o}}} = \frac{\lambda}{3} = \frac{8\cdot\pi}{3}\text{m}$

15. Una onda transversal se propaga según la ecuación: y = 4 A sen 2 A π A [(t/4) + (x/1,8)] (en unidades SI) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración máxima de un punto alcanzado por la onda. Calcula la diferencia de fase, en un instante dado, de dos puntos separados 1 m en la dirección de avance de la onda.

a) Reescribiendo la ecuación de la onda dada y comparándola con la expresión general, se tiene:

$y_{x,t} = 4\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{0{,}9}x\right)\text{unidades SI}$; $y_{x,t} = A \cdot \text{sen}\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$

$\omega = \frac{\pi}{2}\text{rad/s};\ \ k = \frac{\pi}{0{,}9}\text{m}^{-1}$

La velocidad de propagación es: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}}{\frac{\pi}{0{,}9}\text{m}^{-1}} = 0{,}45\,\text{m/s}$

Aplicando la definición de velocidad de vibración:

$v = \frac{dy}{dt} = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{0{,}9}x\right) = 2\cdot\pi\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{0{,}9}x\right)\text{m/s}$

Su valor máximo es: $v_{\text{máximo}} = 2 \cdot \pi\ \text{m/s}$

b) A una distancia de λ m le corresponde una diferencia de fase de 2 · π rad. La longitud de onda es:

$$k = \frac{2\cdot\pi}{\lambda}; \lambda = \frac{2\cdot\pi}{\frac{\pi}{0,9}\,m^{-1}} = 1,8\,m$$

La diferencia de fase pedida es: $\Delta\phi = = \Delta x\frac{2\cdot\pi\,rad}{\lambda} = 1m\frac{2\cdot\pi\,rad}{1,8\,m} = \frac{\pi}{0,9}rad = \frac{10}{9}\pi\,rad$

16. Una onda armónica se propaga por un medio unidimensional con una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de 350 m/s. ¿Cuál es la distancia mínima entre dos puntos del medio para que un instante vibren con una diferencia de fase de 60º? ¿Para un cierto punto, cuál es la diferencia de fase, para un intervalo de tiempo de 10^{-3} s?

La longitud de onda de la perturbación es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{350\,m/s}{500\,Hz} = 0,7\,m$

A una distancia igual a la longitud de onda le corresponde un desfase de 2 · π rad = 360º, por tanto:

$$\Delta x = \Delta\varphi\frac{\lambda}{360^o} = 60^o\frac{0,7\,m}{360^o} = 0,12\,m$$

De igual forma a un intervalo de tiempo igual al período le corresponde un desfase de 2 · π rad = 360º, por tanto:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{500\,Hz} = 2\cdot 10^{-3}\,s$$

$$\Delta\varphi = \Delta T\frac{2\cdot\pi\,rad}{T} = 10^{-3}\,s\frac{2\cdot\pi\,rad}{2\cdot 10^{-3}\,s} = \pi\,rad$$

Los instantes están en oposición de fase.

17. Un foco sonoro emite una energía de 1,5 · 10^{-2} J cada minuto, observándose una amplitud de 2 mm a una distancia de 10 m del foco. Calcula la intensidad a 10 m y a 20 m del foco. ¿Cuál es la amplitud a 20 m del foco?

La intensidad de onda esférica a una distancia R del foco es:

$$I_1 = \frac{E}{\Delta S\cdot\Delta t} = \frac{E}{4\cdot\pi\cdot R_1^2\cdot\Delta t} = \frac{1,5\cdot 10^{-2}\,J}{4\cdot\pi\,(10\ m)^2\cdot 60\,s} = 2\cdot 10^{-7}\,\frac{W}{m^2};\quad I_2 = \frac{E}{\Delta S\cdot\Delta t} = \frac{1,5\cdot 10^{-2}\,W}{4\cdot\pi\,(20\ m)^2\cdot 60\,s} = 0,5\cdot 10^{-7}\,\frac{W}{m^2}$$

Al duplicar la distancia al foco, la intensidad se divide por cuatro.

La relación entre las amplitudes es: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}; \frac{A_1}{A_2} = \frac{20\,m}{10\,m} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{2\,cm}{2} = 1\ cm$

Al duplicarse la distancia al foco, la amplitud se divide por dos.

18. Se desea aislar acústicamente una sala, cubriendo sus paredes con un material absorbente. Para ello, se utiliza un cierto material en el que la intensidad del sonido se reduce a la mitad cuando atraviesa 1 cm de material. La intensidad máxima que puede pasar al exterior es 1 pW/cm². ¿Cuál es el grosor del material aislante que debe emplearse si la intensidad interior puede alcanzar hasta 20 pW/cm²?

Aplicando la ley de la absorción se calcula el valor del coeficiente de absorción del material.

$I = I_0 \cdot e^{-\beta\cdot x}$; $\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta\cdot 1\,cm}$; $-\,Ln\,2 = -\,\beta \cdot 1\,cm \rightarrow \beta = Ln\,2\,cm^{-1}$

Aplicando otra vez la ley anterior, se calcula el espesor del material a utilizar.

$I = I_0 \cdot e^{-\beta\cdot x}$; $1\,pW\cdot cm^{-2} = 20\,pW\cdot cm^{-2}\cdot e^{-Ln\,2\,cm^{-1}\cdot x}$

Operando: $Ln\,\frac{1}{20} = -\,Ln\,2\,cm^{-1}\cdot x \rightarrow x = 4,32\,cm$

19. Un haz de ondas posee una intensidad de 10^{-2} W/m^2 al incidir sobre un medio absorbente de 1 m de espesor. Si a la salida del medio la intensidad se ha reducido a la cuarta parte calcula el coeficiente de absorción del medio. ¿Cuál es el espesor necesario para que la intensidad se reduzca en un 10 %?

El coeficiente de absorción se calcula aplicando la ley de la absorción para ondas planas.

$I = I0 \cdot e^{-\beta} \cdot x$; $I0/4 = I0 \cdot e^{-\beta} \cdot 1$ m; Ln 1 - Ln 4 = - β · 1 m → β = 1,39 m-1

Si la intensidad se reduce en un 10 %, significa que la intensidad final es: $I = 0{,}9 \cdot I_0$, aplicando otra vez la ley anterior, resulta que:

$I = I0 \cdot e^{-\beta} \cdot x$; $0{,}9 \cdot I0 = I0 \cdot e^{-1{,}39\,\text{m}^{-1}\cdot x}$; Ln 0,9 = - 1,39 m^{-1} · x → x = 0,076 m

20. Dos sonidos tienen niveles de intensidades sonoras de 50 dB y 70 dB respectivamente. Calcula la relación entre sus intensidades físicas.

Aplicando la definición de nivel de intensidad sonora, $NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, se tiene que las intensidades físicas respectivas son:

$$50\,\text{dB} = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0};\ 70\,\text{dB} = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0};$$

Restando: $20\,\text{dB} = 10 \cdot \left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right);\ 2 = \log I_2 - \log I_1$

Operando: $2 = \log \frac{I_2}{I_1};\ 10^2 = \frac{I_2}{I_1}$

Despejando: $I_2 = 100 \cdot I_1$

El segundo sonido es cien veces más intenso que el primero.

21. En un partido de fútbol, un espectador canta gol con un nivel de intensidad sonora 40 dB. ¿Cuál sería el nivel de intensidad sonora si gritaran a la vez y con la misma intensidad sonora los 10 000 espectadores que se encuentran viendo el partido? Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

La intensidad con la que emite un espectador se compara con la intensidad umbral mediante la ecuación del nivel de intensidad sonora.

$$NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{NS}{10}} = 10^{-12}\ \text{W/m}^2 \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

La intensidad total es igual a la suma de las intensidades de todas las fuentes de sonido:

$I_t = 10\,000 \cdot I = 10\,000 \cdot 10^{-8}$ W/m^2 = 10^{-4} W/m^2

Aplicando a esta intensidad la ecuación del nivel de intensidad sonora, resulta que el nivel de intensidad sonora resultante es:

$$NS = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-4}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} = 80\ \text{dB}$$

22. Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 10^{-6} W. Calcula el nivel de intensidad sonora, expresado en dB, a 1 m del foco. ¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad sonora se ha reducido a la mitad del valor anterior?
Dato: $I_0 = 10^{-12}\ W\cdot m^{-2}$.

La intensidad física a la distancia de 1 m es:

$$I_1 = \frac{E}{\Delta S\cdot\Delta t} = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4\cdot\pi\cdot R_1^2} = \frac{10^{-6}\ J}{4\cdot\pi\,(1\ m)^2} = 7{,}96\cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2}$$

El nivel de intensidad sonora es: $NS = 10\cdot\log\frac{I}{I_0} = 10\cdot\log\frac{7{,}96\cdot10^{-8}\ W/m^2}{10^{-12}\ W/m^2} = 49\,dB$

Al alejarse de la fuente disminuye la intensidad y el nivel de intensidad sonora. Cuando este se ha reducido a la mitad, la intensidad física es:

$$NS = 10\cdot\log\frac{I}{I_0};\ \frac{49\,dB}{2} = 10\cdot\log\frac{I}{10^{-12}\ W/m^2} \Rightarrow I = 2{,}82\cdot10^{-10}\ W/m^2$$

Y la distancia a la que está el punto de la fuente es:

$$I_2 = \frac{P}{\Delta S} = \frac{P}{4\cdot\pi\cdot r^2};\ 2{,}82\cdot10^{-10}\ W/m^2 = \frac{10^{-6}\ J}{4\cdot\pi\,r^2} \Rightarrow r = 16{,}9\,m$$