PROYECTO SABER HACER

1

Campo gravitatorio

SANTILLANA

Campo gravitatorio

1

PARA COMENZAR

- **¿Se anula la fuerza gravitatoria ejercida por el Sol y la Tierra en el punto L2?**

  No, puesto que para ello debería estar situada entre el Sol y la Tierra, y la sonda Gaia está ubicada más allá de la órbita de la Tierra respecto al Sol.

- **¿Y en algún punto situado en la línea que une el Sol y la Tierra?**

  Sí, la fuerza se anula en un punto de la línea que une ambos astros, entre los dos y más cerca de la Tierra que del Sol, puesto que la masa del Sol es mucho mayor que la de la Tierra.

- **¿Entonces, por qué permanecerá estacionaria la sonda Gaia en L2?**

  Porque las fuerzas gravitatorias que ejercen la Tierra y el Sol sobre la sonda Gaia hacen que se mantenga estable en ese punto.

ACTIVIDADES

1. Calcula:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Respuesta:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}$$

2. Calcula:

$$\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}\cdot dr$$

Respuesta:

$$\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}\cdot dr=\left.\frac{-1}{r}\right|_r^{\infty}=\frac{1}{r}$$

3. Una masa de 20 000 kg se encuentra a una distancia de 16 m de otra masa de 60 000 kg. Calcula la fuerza de atracción de dichas masas.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Sustituimos los datos en la expresión de la ley de la gravitación universal para calcular el módulo de la fuerza de atracción:

$$F_G=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{d^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{20\cdot 10^3\ \text{kg}\cdot 60\cdot 10^3\ \text{kg}}{(16\ \text{m})^2}=3{,}13\cdot 10^{-4}\ \text{N}$$

4. ¿En qué punto la velocidad de la Tierra es mayor, cuando se encuentra más cerca o más lejos del Sol? Justifica la respuesta.

La velocidad de la Tierra es mayor cuando se encuentra más cerca del Sol, es decir, en el perihelio. Esto se deduce de la segunda ley de Kepler: los planetas giran con velocidad areolar constante, por lo que barren áreas iguales en tiempos iguales. En el perihelio, como *r* es menor que en el afelio, la velocidad tiene que ser mayor para que se barra la misma área.

5. Se conoce como satélites galileanos a las lunas más grandes de Júpiter descubiertas por Galileo Galilei en 1610. Ío, el satélite galileano más cercano a Júpiter, posee un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita es, aproximadamente, tres veces el diámetro de Júpiter. Asimismo, el periodo orbital de Calisto (el cuarto satélite galileano en cuanto a la distancia a Júpiter) es de 16,7 días. Con esos datos, suponiendo órbitas circulares y que el radio de Júpiter es 7,15 · 10⁷ m, calcula el radio de la órbita de Calisto.

Sustituimos valores en la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{d^3} = \text{cte.} \rightarrow \frac{T_{\text{Ío}}^2}{d_{\text{Ío}}^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{d_{\text{Calisto}}^3} \rightarrow \frac{T_{\text{Ío}}^2}{d_{\text{Ío}}^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{r_{\text{C}}^3} \rightarrow \frac{T_{\text{Ío}}^2}{(3\cdot 2\cdot r_{\text{J}})^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{r_{\text{C}}^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{\text{C}}^3 = \frac{T_{\text{Calisto}}^2 \cdot (3\cdot 2\cdot r_{\text{J}})^3}{T_{\text{Ío}}^2} \rightarrow r_{\text{C}} = (3\cdot 2\cdot r_{\text{J}})\cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\text{Calisto}}}{T_{\text{Ío}}}\right)^2} = (3\cdot 2\cdot 7{,}15\cdot 10^7\ \text{m})\cdot \sqrt[3]{\left(\frac{16{,}7\ \text{días}}{1{,}8\ \text{días}}\right)^2} = 1{,}89\cdot 10^9\ \text{m}$$

6. Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «El potencial gravitatorio es nulo en el punto medio del segmento que une dos masas iguales».

El potencial gravitatorio es el trabajo que deben realizar las fuerzas del campo para llevar la masa unidad desde ese punto hasta el infinito (un punto fuera del campo). Viene dado por el cociente de la energía potencial y la unidad de masa según la expresión:

$$V = \frac{E_{\text{P}}}{m} = -\frac{G\cdot M}{r}$$

Por lo que se deduce que el potencial gravitatorio es negativo en todos los puntos del campo excepto en el infinito, donde es nulo. Por tanto, la afirmación es falsa.

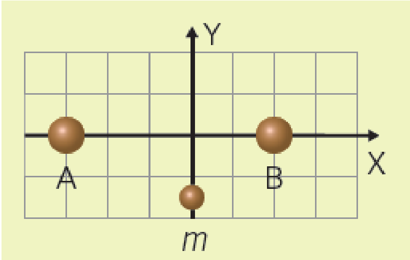
7. Si nos desplazamos desde un punto situado a gran altura en dirección hacia la superficie de la Tierra, ¿la energía potencial gravitatoria aumentará o disminuirá? Razónalo.

Al desplazarnos desde un punto situado a gran altura en dirección hacia la superficie terrestre la distancia, *r*, disminuirá. Como la energía potencial es inversamente proporcional a la distancia y de signo negativo, en esta situación la energía potencial disminuiría. Esto es lógico, ya que la energía potencial de un cuerpo coincide con el trabajo que tienen que realizar las fuerzas del campo para llevarlo desde ese punto hasta un punto fuera del campo con velocidad constante. Como la distancia disminuye, el trabajo también y, por tanto, la energía potencial.

8. Al pie de una montaña un alpinista puede tomar dos rutas diferentes para escalar la misma montaña. Una de las pendientes es suave y la otra, en cambio, es mucho más pronunciada. ¿Crees que el valor del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo del montañero depende del camino elegido? Razona la respuesta.

No. El trabajo realizado por las fuerzas de un campo conservativo, como es el gravitatorio, solo depende del punto inicial y final del desplazamiento, y no del camino elegido.

9. **En los puntos A (–30, 0) y B (+20, 0) se encuentran fijas dos masas puntuales de 10^5 kg cada una. En el punto (0, –15) se encuentra una pequeña esfera de 400 g de masa, que puede moverse libremente. Teniendo en cuenta que las distancias están expresadas en metros. Halla:**



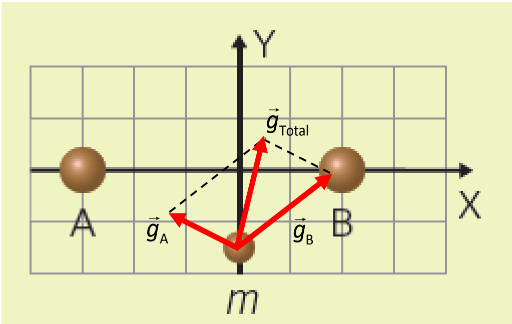
a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.

b) La aceleración que experimentará la esfera justo cuando se encuentre en el punto (0, 0) entre los cuerpos A y B.

c) Enuncia el principio de superposición de campos.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) Primero realizamos la representación gráfica:



Luego aplicamos el principio de superposición para calcular el campo gravitatorio en el punto (0, –15), a partir de ahora denominado C.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_{\text{A}} + \vec{g}_{\text{B}} = -\frac{G \cdot m_{\text{A}}}{r_{\text{AC}}^2} \cdot \vec{u}_{r\,\text{AC}} - \frac{G \cdot m_{\text{B}}}{r_{\text{BC}}^2} \cdot \vec{u}_{r\text{BC}}$$

Calculamos los vectores de posición y los vectores unitarios correspondientes:

$$\vec{r}_{\text{AC}} = (0,-15)-(-30,0) = (30,-15) \to \vec{u}_{r\,\text{AC}} = \frac{\vec{r}_{\text{AC}}}{|\vec{r}_{\text{AC}}|} = \frac{30\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{30^2+(-15)^2}} = \frac{30\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{1125}} = \frac{30\vec{i}-15\vec{j}}{15\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

$$\vec{r}_{\text{BC}} = (0,-15)-(20,0) = (-20,-15) \to \vec{u}_{r\text{BC}} = \frac{\vec{r}_{\text{BC}}}{|\vec{r}_{\text{BC}}|} = \frac{-20\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{(-20)^2+(-15)^2}} = \frac{-20\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{625}} = \frac{-20\vec{i}-15\vec{j}}{25} = \frac{-4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$$

Sustituimos valores en la expresión del campo gravitatorio:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot10^5\ \text{kg}}{\left(15\cdot\sqrt{5}\ \text{m}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot10^5\text{kg}}{(25\,\text{m})^2}\cdot\left(\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}\right) =$$

$$= 3{,}23\cdot10^{-9}\,\vec{i} + 9{,}06\cdot10^{-9}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

La fuerza gravitatoria ejercida sobre la esfera en el punto C será:

$$\vec{F}_{\text{G}} = m\cdot\vec{g}_{\text{Total}} = 0{,}4\ \text{kg}\cdot\left(3{,}23\cdot10^{-9}\,\vec{i} + 9{,}06\cdot10^{-9}\,\vec{j}\right)\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1{,}29\cdot10^{-9}\,\vec{i} + 3{,}62\cdot10^{-9}\,\vec{j}\ \text{N}$$

Cuyo módulo será:

$$|\vec{F}_{\text{G}}| = \sqrt{\left(1{,}29\cdot10^{-9}\right)^2 + \left(3{,}62\cdot10^{-9}\right)^2}\ \text{N} = 3{,}84\cdot10^{-9}\ \text{N}$$

b) La aceleración que sufrirá la esfera cuando se encuentre en el punto (0, 0), a partir de ahora denominado O, vendrá dada por la intensidad del campo gravitatorio debido a las masas A y B en ese punto:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_{\text{A}} + \vec{g}_{\text{B}} = -\frac{G \cdot m_{\text{A}}}{r_{\text{AO}}^2} \cdot \vec{u}_{\text{r AO}} - \frac{G \cdot m_{\text{B}}}{r_{\text{BO}}^2} \cdot \vec{u}_{\text{rBO}}$$

Calculamos los vectores de posición y los vectores unitarios correspondientes:

$$\vec{r}_{\text{AO}} = (0,\,0) - (-30,\,0) = (30,\,0) \rightarrow \vec{u}_{\text{r AO}} = \frac{\vec{r}_{\text{AO}}}{|\vec{r}_{\text{AO}}|} = \frac{30\,\vec{\text{i}}}{\sqrt{30^2}} = \vec{\text{i}}$$

$$\vec{r}_{\text{BO}} = (0,\,0) - (20,\,0) = (-20,\,0) \rightarrow \vec{u}_{\text{rBO}} = \frac{\vec{r}_{\text{BO}}}{|\vec{r}_{\text{BO}}|} = \frac{-20\,\vec{\text{i}}}{\sqrt{(-20)^2}} = -\vec{\text{i}}$$

Sustituimos valores en la expresión del campo gravitatorio:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 10^5\ \text{kg}}{(30\ \text{m})^2} \cdot \vec{\text{i}} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 10^5\ \text{kg}}{(20\ \text{m})^2} \cdot (-\vec{\text{i}}) =$$

$$= -7{,}41 \cdot 10^{-9}\,\vec{\text{i}}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} + 1{,}67 \cdot 10^{-8}\,\vec{\text{i}}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{\text{i}}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{\text{i}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

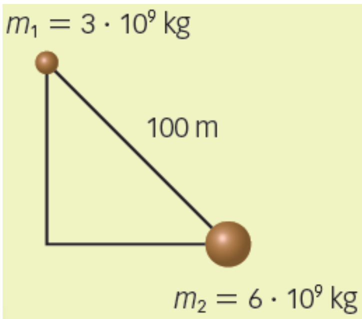
c) El principio de superposición de campos dice que la intensidad del campo gravitatorio creado por un conjunto de masas puntuales en un punto es la suma vectorial de los campos que crearía cada masa si solo estuviese ella en esa región del espacio.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \sum_{\text{i}} \vec{g}_{\text{i}} = \sum_{\text{i}} \left(-\frac{G \cdot M_{\text{i}}}{r_{\text{i}}^2} \right) \cdot \vec{u}_{\text{r i}}$$

10. Explica qué relación existe entre la «fuerza conservativa» y la «energía potencial».

Cuando las fuerzas son conservativas se puede definir una energía potencial asociada que se conserva.

11. Hay dos masas de $3 \cdot 10^9$ y $6 \cdot 10^9$ kg, respectivamente, en los extremos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles.



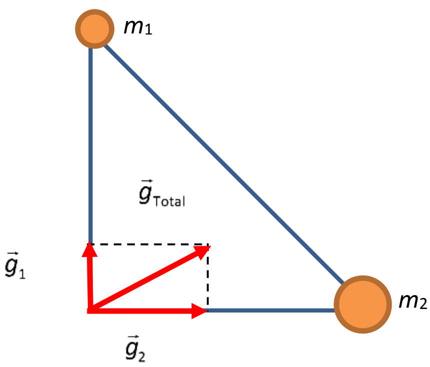
a) Haz un esquema del campo gravitatorio de cada masa y del campo total en el vértice.

b) Si la hipotenusa del triángulo mide 100 m, calcula el módulo del campo gravitatorio en dicho vértice.

c) ¿En qué punto del triángulo el campo gravitatorio será nulo?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) El esquema de la situación es el siguiente:



b) Dada la simetría del problema, podemos calcular los módulos de ambos campos gravitatorios y aplicar el teorema de Pitágoras, pues el módulo del campo total es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos. La distancia a ambas masas también es la misma ($d_1 = d_2 = d$), pues el triángulo es isósceles. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ($h = 100$ m):

$$h^2 = d_1^2 + d_2^2 \rightarrow h^2 = 2 \cdot d^2 \rightarrow d = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

Entonces:

$$g_{\text{Total}} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \sqrt{\left(G \cdot \frac{m_1}{d_1^2}\right)^2 + \left(G \cdot \frac{m_2}{d_2^2}\right)^2} = \frac{G}{d^2} \cdot \sqrt{(m_1)^2 + (m_2)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{(100 \text{ m})^2} \cdot \sqrt{(3 \cdot 10^9 \text{ kg})^2 + (6 \cdot 10^9 \text{ kg})^2} = 8{,}95 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg}$$

c) Para que el campo gravitatorio sea nulo los dos campos creados por ambas masas deben tener la misma dirección y sentidos opuestos. Esto ocurre en puntos situados sobre la hipotenusa. Como la masa m_2 es mayor que la masa m_1 (dos veces mayor), el punto deberá estar más cerca de la masa m_1. Si llamamos x a la distancia de dicho punto P a la masa m_1, en dicho punto los módulos de los campos son iguales, es decir:

$$g_{\text{Total}} = 0 \rightarrow g_1 = g_2 \rightarrow G \cdot \frac{m_1}{x^2} = G \cdot \frac{m_2}{(100 - x)^2} \rightarrow \frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{(100 - x)^2} \rightarrow m_1 \cdot (100 - x)^2 = 2 \cdot m_1 \cdot x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (100 - x)^2 = 2 \cdot x^2 \rightarrow x^2 + 10000 - 200 \cdot x = 2 \cdot x^2 \rightarrow x^2 + 200 \cdot x - 10000 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10000)}}{2} \begin{cases} x = 41{,}42 \text{ m} \\ x = -241{,}42 \text{ m} \end{cases}$$

La segunda solución no es válida, pues nos dicen que el punto se encuentra sobre el triángulo.

12. Tenemos dos masas de 4000 y 10 000 kg, respectivamente. La masa 1 se encuentra en el origen de coordenadas, punto (0, 0). A 200 m y a su derecha se encuentra la masa 2, en el punto (200, 0).

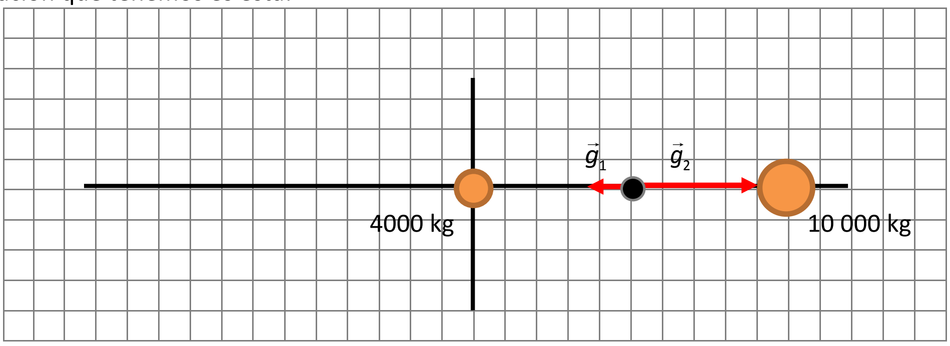
a) Dibuja y calcula el valor del campo gravitatorio en el punto medio C entre ambos.

b) Halla el potencial gravitatorio en el punto C.

c) Halla el trabajo necesario para llevar una masa de 1 kg desde el punto C hasta una distancia de 40 m a la izquierda de la primera masa, punto (–40, 0).

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) La situación que tenemos es esta:



Como se ve en el dibujo, los campos apuntan en sentidos opuestos. El campo resultante estará dirigido hacia la carga mayor, es decir, hacia la derecha. El módulo del campo resultante se puede obtener restando los valores de ambos campos:

$$g_{\text{Total}} = g_2 - g_1 = G \cdot \frac{m_2}{d_2^2} - G \cdot \frac{m_1}{d_1^2}$$

Como queremos calcularlo en el punto medio C entre ambos, $d_1 = d_2 = d = 100$ m, por tanto:

$$g_{\text{Total}} = \frac{G}{d^2} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{(100 \text{ m})^2} \cdot (10\,000 \text{ kg} - 4000 \text{ kg}) = 4 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}$$

Por tanto:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = 4 \cdot 10^{-11} \ \vec{\text{i}} \ \text{N/kg}$$

b) El potencial gravitatorio en un punto viene dado por la expresión:

$$V = -G \cdot \frac{m}{d}$$

En el punto C, según el principio de superposición, se calcula sumando las contribuciones de ambas masas:

$$V_{\text{Total}} = V_1 + V_2 = -G \cdot \frac{m_1}{d} - G \cdot \frac{m_2}{d} = -\frac{G}{d} \cdot (m_1 + m_2) =$$

$$= \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{100 \text{ m}} \cdot (10\,000 \text{ kg} + 4000 \text{ kg}) = -9{,}34 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

c) El trabajo necesario será igual a la diferencia de energía potencial entre ambos puntos. La energía potencial de una masa *m* en un punto P viene dada por la expresión:

$$E_{\text{P}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Por tanto, el trabajo necesario será igual a la energía potencial en el punto final, (–40, 0), menos la energía potencial en el punto inicial, (100, 0):

$$W = E_{\text{P final}} - E_{\text{P inicial}} = \left(-\frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_{\text{fin}1}} - \frac{G \cdot m_2 \cdot m}{r_{\text{fin}2}} \right) - \left(-\frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_{\text{inicio}1}} - \frac{G \cdot m_2 \cdot m}{r_{\text{inicio}2}} \right) =$$

$$= G \cdot m \cdot \left[\left(-\frac{m_1}{r_{\text{fin}1}} - \frac{m_2}{r_{\text{fin}2}} \right) - \left(-\frac{m_1}{r_{\text{inicio}1}} - \frac{m_2}{r_{\text{inicio}2}} \right) \right] =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot \left[\left(-\frac{4000}{40 \text{ m}} - \frac{10\,000}{240 \text{ m}} \right) - \left(-\frac{4000}{100 \text{ m}} - \frac{10\,000}{100 \text{ m}} \right) \right] = -1{,}11 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

El signo negativo del trabajo indica que no lo realizan las fuerzas de campo, sino que actúan fuerzas externas.

13. Si una persona de 75 kg de masa se encuentra en un planeta cuya masa y radio son la cuarta parte de los de la Tierra, ¿cuál sería su peso en dicho planeta?

Dato: $g_{0\ \text{Tierra}} = 9{,}8$ m/s².

El peso es la fuerza con la que el planeta atrae a la persona. Llamando *M* y *R* a la masa y al radio del planeta y *m* a la masa de la persona:

$$P = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow P = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Para resolver el problema relacionamos el radio y la masa del planeta con los valores correspondientes a la Tierra:

$$\frac{P_{\text{Planeta}}}{P_{\text{Tierra}}}=\frac{\cancel{G}\cdot\frac{M\cdot\cancel{m}}{R^2}}{\cancel{G}\cdot\frac{M_{\text{Tierra}}\cdot\cancel{m}}{R^2_{\text{Tierra}}}}=\frac{\frac{M}{R^2}}{\frac{M_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}}}=\frac{M}{M_{\text{Tierra}}}\cdot\left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{R}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{1}\right)^2=4$$

Es decir, en el planeta el peso es cuatro veces mayor que en la Tierra. Por tanto:

$$P=m\cdot g=4\cdot m\cdot g_0=4\cdot 75\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2=2940\text{ N}$$

14. La luz del Sol tarda 8 min y 20 s en llegar a la Tierra, y 43 min y 20 s en llegar a Júpiter. Suponiendo que las órbitas son circulares, calcula:

a) El periodo de Júpiter orbitando alrededor del Sol.

b) La velocidad orbital de Júpiter.

c) La masa del Sol.

Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol = $3{,}15\cdot 10^7$ s; $c = 3\cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

a) Podemos aplicar la tercera ley de Kepler que relaciona el periodo y el radio de la órbita de los planetas del sistema solar:

$$\frac{T^2}{d^3}=\text{cte.}\rightarrow\frac{T_{\text{T}}^2}{d_{\text{T}}^3}=\frac{T_{\text{J}}^2}{d_{\text{J}}^3}\rightarrow\frac{T_{\text{T}}^2}{(c\cdot t_{\text{T}})^3}=\frac{T_{\text{J}}^2}{(c\cdot t_{\text{J}})^3}\rightarrow\left(\frac{t_{\text{J}}}{t_{\text{T}}}\right)^3\cdot T_{\text{T}}^2=T_{\text{J}}^2\rightarrow$$

$$\rightarrow T_{\text{J}}=\sqrt{\left(\frac{t_{\text{J}}}{t_{\text{T}}}\right)^3}\cdot T_{\text{T}}=\sqrt{\left(\frac{43\cdot 60+20}{8\cdot 60+20}\right)^3}\cdot 3{,}15\cdot 10^7\text{ s}=3{,}735\cdot 10^8\text{ s}$$

b) La velocidad de Júpiter se puede conocer a partir del periodo y de la distancia al Sol:

$$v_{\text{J}}=\frac{2\pi\cdot d_{\text{J}}}{T_{\text{J}}}=\frac{2\pi\cdot(c\cdot t_{\text{J}})}{T_{\text{J}}}=\frac{2\pi\cdot\left[3\cdot 10^8\text{ m/s}\cdot(43\cdot 60+20)\text{ s}\right]}{3{,}735\cdot 10^8\text{ s}}=13\,121{,}51\text{ m/s}=1{,}312\cdot 10^4\text{m/s}$$

c) La masa del Sol puede deducirse conociendo la constante de la gravitación de Newton. Identificamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta.

$$F_{\text{G}}=F_{\text{C}}\rightarrow G\cdot\frac{M_{\text{S}}\cdot m_{\text{J}}}{d^2}=\frac{m_{\text{J}}\cdot v_{\text{J}}^2}{d}\rightarrow M_{\text{S}}=\frac{d}{G}\cdot v_{\text{J}}^2=\frac{c\cdot t_{\text{J}}}{G}\cdot v_{\text{J}}^2=$$

$$=\frac{3\cdot 10^8\text{ m/s}\cdot(43\cdot 60+20)\text{ s}}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}}\cdot(13\,121{,}51\text{ m/s})^2=2{,}013\cdot 10^{30}\text{ kg}$$

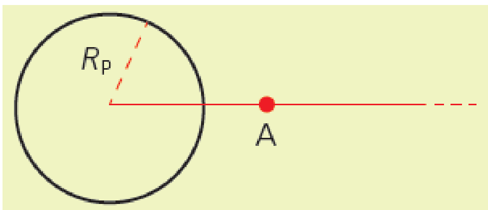
15. Se deja caer libremente un objeto desde una distancia «infinita» de un planeta de radio R_{P}. Calcula:

a) La masa del planeta si la intensidad de la gravedad en la superficie vale g_0.

b) La velocidad al llegar a la superficie del planeta.

c) La velocidad del objeto al pasar por un punto A en el que la gravedad vale $g_0/2$.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $g_0 = 9{,}8$ m/s²; $R_{\text{P}} = 6{,}37\cdot 10^6$ m.



a) En el planeta el peso de un objeto es igual a la fuerza gravitatoria.

$$P=\cancel{m}\cdot g_0=G\cdot\frac{M_{\text{P}}\cdot\cancel{m}}{R_{\text{P}}^2}\rightarrow M_{\text{P}}=\frac{g_0\cdot R_{\text{P}}^2}{G}=\frac{9{,}8\text{ m/s}^2\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6\text{ m}\right)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}}=5{,}96\cdot 10^{24}\text{ kg}$$

b) Si se deja caer desde el infinito, la energía inicial del objeto es cero. Por tanto, en la superficie del planeta la energía total debe seguir siendo cero. Es decir, la suma de la energía cinética y la potencial en la superficie:

$$\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot v^2-\frac{G\cdot M_P\cdot \cancel{m}}{R_P}=0\rightarrow v=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_P}{R_P}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37\cdot 10^{6}\ \text{m}}}=11\,172{,}01\ \text{m/s}$$

c) En ese punto la energía total debe ser la misma. Calculamos la distancia al planeta:

$$\frac{\cancel{m}\cdot g_0}{2}=G\cdot\frac{M_P\cdot \cancel{m}}{r_P^2}\rightarrow r_P=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_P}{g_0}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}}=9\cdot 10^{6}\ \text{m}$$

Ahora calculamos la velocidad en dicho punto sabiendo que, de nuevo, la energía total es cero.

$$\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot v^2-\frac{G\cdot M_P\cdot \cancel{m}}{r_P}=0\rightarrow v=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_P}{r_P}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{9\cdot 10^{6}\ \text{m}}}=9398{,}96\ \text{m/s}$$

16. Un planeta de 10^{25} kg de masa gira alrededor de una estrella siguiendo una órbita circular de radio $r = 10^8$ km y periodo $T = 2$ años terrestres. Calcula:

a) La masa *M* de la estrella.

b) La energía mecánica del planeta.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de otro planeta más alejado de la estrella que describe una órbita circular de radio igual al doble del primero, 2*r*.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻². Consi dera 1 año terrestre = 365 días.

a) La masa puede deducirse identificando la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta.

$$F_G=F_C\rightarrow G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{m}\cdot v^2}{\cancel{r}}\rightarrow G\cdot\frac{M}{r}=\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow M=\frac{4\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2}=\frac{4\pi^2\cdot\left(10^{11}\ \text{m}\right)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\left(2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)^2}=1{,}488\cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

b) La energía mecánica es la suma de la energía cinética del planeta más su energía potencial gravitatoria.

$$E_M=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2-\frac{G\cdot M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2-\frac{G\cdot M\cdot m}{r}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10^{25}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot 10^{11}\ \text{m}}{2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}}\right)^2-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 1{,}49\cdot 10^{29}\ \text{kg}\cdot 10^{25}\ \text{kg}}{10^{11}\ \text{m}}=-4{,}962\cdot 10^{32}\ \text{J}$$

c) El momento angular se calcula como el producto vectorial del vector de posición del planeta por su momento lineal. Como la órbita es circular, ambos vectores son perpendiculares y podemos escribir:

$$L=r\cdot p=r\cdot m\cdot v=r\cdot m\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)=m\cdot\frac{2\pi\cdot r^2}{T}=10^{25}\ \text{kg}\cdot\frac{2\pi\cdot\left(10^{11}\ \text{m}\right)^2}{2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}}=9{,}96\cdot 10^{39}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$$

d) La velocidad angular puede calcularse a partir de la velocidad lineal y el radio:

$$\omega=\frac{v_2}{r_2}=\frac{\dfrac{2\pi\cdot r_2}{T_2}}{r_2}=\frac{2\pi}{T_2}$$

Podemos aplicar la tercera ley de Kepler a ambos planetas. El planeta 1 será el que sigue una órbita de radio r, mientras que el planeta 2 sigue una órbita de radio $2r$.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3}=\frac{T_2^2}{r_2^3}\rightarrow\frac{T_1^2}{r_1^3}=\frac{T_2^2}{(2r_1)^3}\rightarrow T_1^2=\frac{T_2^2}{2^3}\rightarrow T_1^2\cdot 8=T_2^2\rightarrow T_2=T_1\cdot\sqrt{8}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\omega=\frac{2\pi}{T_2}=\frac{2\pi}{T_1\cdot\sqrt{8}}=\frac{2\pi}{2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\dfrac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\dfrac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\cdot\sqrt{8}}=3{,}52\cdot 10^{-8}\ \text{rad/s}$$

17. La masa de Marte, su radio y el radio de su órbita alrededor del Sol, referidos a las magnitudes de la Tierra, son, respectivamente: $M_{\text{Marte}}=0{,}107\cdot M_{\text{Tierra}}$, $R_{\text{Marte}}=0{,}532\cdot R_{\text{Tierra}}$, y $r_{\text{Marte}}=1{,}524\cdot r_{\text{Tierra}}$. Determina, en relación con la Tierra:

a) El periodo de rotación alrededor del Sol.

b) El valor de la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte en relación con las de la Tierra.

a) El periodo de Marte y el de la Tierra están relacionados por la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3}=\frac{T_T^2}{r_T^3}\rightarrow\frac{T_M^2}{(1{,}524\cdot r_T)^3}=\frac{T_T^2}{r_T^3}\rightarrow T_M^2=\frac{T_T^2}{r_T^3}\cdot(1{,}524\cdot r_T)^3\rightarrow$$

$$\rightarrow T_M^2=\frac{T_T^2}{r_T^3}\cdot 1{,}524^3\cdot r_T^3\rightarrow T_M=T_T\cdot\sqrt{1{,}524^3}\rightarrow T_M=1{,}88\cdot T_T$$

b) El valor de la gravedad puede calcularse sabiendo que la fuerza peso sobre la superficie de un planeta es la fuerza gravitatoria ejercida por dicho planeta. Es decir:

$$F_G=P\rightarrow G\cdot\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^2}=\cancel{m}\cdot g$$

Aplicamos esta expresión a Marte y a la Tierra:

$$G\cdot\frac{M_M}{R_M^2}=g_M\ ;\ G\cdot\frac{M_T}{R_T^2}=g_T$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{G\cdot\dfrac{M_M}{R_M^2}}{G\cdot\dfrac{M_T}{R_T^2}}=\frac{g_M}{g_T}\rightarrow\frac{g_M}{g_T}=\frac{M_M\cdot R_T^2}{M_T\cdot R_M^2}=\frac{M_M}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_M}\right)^2=\frac{0{,}107\cdot M_T}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{0{,}532\cdot R_T}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{g_M}{g_T}=\frac{0{,}107}{0{,}532^2}\rightarrow g_M=\frac{0{,}107}{0{,}532^2}\cdot g_T\rightarrow g_M=0{,}378\cdot g_T$$

Para calcular la velocidad de escape tenemos en cuenta que es aquella que permite a un objeto lanzado escapar del campo gravitatorio. Esto quiere decir que la energía total en el lugar del lanzamiento es cero. Por tanto, podemos escribir la siguiente expresión:

$$E_M=0\rightarrow E_C+E_P=0\rightarrow\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{\text{escape}}^2-\frac{G\cdot M\cdot m}{R}=0$$

Ahora aplicamos esta ecuación a ambos planetas:

$$\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape M}} - \frac{G\cdot M_{\text{M}}}{R_{\text{M}}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape M}} = \frac{G\cdot M_{\text{M}}}{R_{\text{M}}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape T}} - \frac{G\cdot M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape T}} = \frac{G\cdot M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}$$

Y de nuevo dividiendo una ecuación entre la otra obtenemos la relación entre las velocidades de escape en ambos planetas:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape M}}}{\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape T}}} = \frac{\frac{G\cdot M_{\text{M}}}{R_{\text{M}}}}{\frac{G\cdot M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}} \rightarrow \frac{v^2_{\text{escape M}}}{v^2_{\text{escape T}}} = \frac{M_{\text{M}}\cdot R_{\text{T}}}{M_{\text{T}}\cdot R_{\text{M}}} \rightarrow \frac{v_{\text{escape M}}}{v_{\text{escape T}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{M}}}{M_{\text{T}}}\cdot\frac{R_{\text{T}}}{R_{\text{M}}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_{\text{escape M}}}{v_{\text{escape T}}} = \sqrt{\frac{0{,}107}{0{,}532}} \rightarrow v_{\text{escape M}} = 0{,}448\cdot v_{\text{escape T}}$$

18. **Un agujero negro es un objeto tan masivo que tiene una velocidad de escape igual a la velocidad de la luz en el vacío. Determina el radio, denominado radio de Schwarzschild, para un agujero negro, a partir de la gravitación universal de Newton.**

a) Con una masa 10 veces la del Sol.

b) Con una masa de 1 kg.

Datos: $v_{\text{luz vacío}} = 3{,}00\cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{\text{Sol}} = 1{,}99\cdot 10^{30}$ kg.

a) La velocidad de escape es aquella que hace que la energía total en el momento del lanzamiento es nula. Por tanto:

$$E_{\text{M}} = 0 \rightarrow E_{\text{C}} + E_{\text{P}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2_{\text{escape}} - \frac{G\cdot M\cdot m}{R} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2_{\text{escape}} = \frac{G\cdot M\cdot m}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \frac{2\cdot G\cdot M}{v^2_{\text{escape}}} = \frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 10\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\left(3\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2} = 29\,496\ \text{m} \approx 29{,}5\ \text{km}$$

Como se aprecia, el agujero negro es un objeto muy, muy compacto. Tiene una masa diez veces mayor que el Sol concentrada en un radio de unos 30 km.

b) En el apartado anterior vemos que el radio del agujero negro es directamente proporcional a la masa. Por tanto, si la masa es menor que antes el radio del agujero negro será también menor que antes. El factor de relación entre ambos es la relación entre las masas. Es decir:

$$\frac{R_{1\,\text{kg}}}{R_{10\cdot M_{\text{Sol}}}} = \frac{1\ \text{kg}}{10\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_{1\,\text{kg}} = \frac{1\ \text{kg}}{10\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}}\cdot R_{10\cdot M_{\text{Sol}}} = \frac{1\ \text{kg}}{10\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}}\cdot 29{,}5\ \text{km} = 1{,}48\cdot 10^{-30}\ \text{km} = 1{,}48\cdot 10^{-27}\ \text{m}$$

19. **En febrero de 2013, la Agencia Espacial Europea colocó un nuevo satélite, Amazonas 3, en órbita circular alrededor de la Tierra. Calcula la altura *h* a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros) y su periodo (en horas) si la velocidad del satélite es de 3074 m/s.**

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{\text{T}} = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_{\text{T}} = 6370$ km.

En este caso la fuerza centrípeta que hace girar al satélite es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae. Entonces podemos escribir:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(3074\ m/s)^2} = 4{,}22 \cdot 10^7\ m$$

Esta distancia r es la distancia hasta el centro de la Tierra. La altura pedida será entonces:

$$h = r - R_T = 4{,}22 \cdot 10^7\ m - 6370 \cdot 10^3\ m = 3{,}583 \cdot 10^7\ m = 35\,830\ km$$

El periodo puede calcularse a partir del radio de la órbita y de la velocidad:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\ m}{3074\ m/s} = 86\,255{,}83\ s = 23{,}96\ h$$

Es decir, se trata de un satélite geoestacionario, puesto que su periodo coincide con el periodo de rotación de la Tierra. Esto quiere decir que el satélite está siempre situado sobre el mismo punto de la superficie terrestre.

20. Un satélite artificial gira en una órbita circular a 300 km de altura sobre la superficie terrestre.

a) Halla la velocidad del satélite.

b) Halla su periodo orbital.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza gravitatoria es responsable del giro del satélite. Igualamos la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae al satélite:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(6370 + 300) \cdot 10^3\ m}} = 7733{,}05\ m/s$$

b) El periodo orbital se calcula a partir de la velocidad y del radio de la órbita:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot (6370 + 300) \cdot 10^3\ m}{7733{,}05\ m/s} = 5419{,}45\ s = 1\ h\ 30\ min\ 19{,}45\ s$$

21. Con el fin de recoger información acerca del planeta rojo se quiere enviar tres naves a Marte para hacer de satélites «marte-estacionarios». Determina:

a) Qué tipo de órbita tendrían los satélites.

b) A qué altura sobre la superficie de Marte se encontrarían.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$; $M_{Marte} = 6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg; $R_{Marte} = 3397$ km; $T_{Marte} = 5{,}93 \cdot 10^7$ s.

a) Los satélites siguen una órbita cerrada. El periodo de los satélites debe coincidir con el periodo de rotación de Marte, de tal modo que cada satélite se encuentre siempre sobre el mismo punto de Marte.

El radio de la órbita puede calcularse teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es la que hace girar a los satélites:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_M}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_M}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_M}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{G \cdot M_M \cdot T^2}{4\pi^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}\ kg \cdot (5{,}93 \cdot 10^7\ s)^2}{4\pi^2}} = 1{,}59 \cdot 10^9\ m$$

22. El satélite de la NASA Terra está diseñado para recoger información sobre la superficie de la Tierra, los océanos y la atmósfera. Con estos datos conseguimos estudiar la interrelación entre los distintos medios y los sistemas biológicos existentes.

El satélite sigue una órbita circular en el plano que pasa por los polos a una altura de 760 km de la superficie de la Tierra (circumpolar). Sabiendo que la masa del satélite es de 4,86 · 10³ kg, calcula:

a) El periodo del movimiento del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.

b) La energía necesaria, que hay que suministrar, para lanzar el satélite desde la superficie de la Tierra a su órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite es la responsable del giro del satélite alrededor de nuestro planeta. Por tanto, podemos escribir:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left[(6370+760) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} = 5989{,}64\ \text{s}$$

b) La energía necesaria para lanzar el satélite es igual a la energía mecánica total del satélite en su órbita menos la energía del satélite en la superficie antes de lanzarlo.

$$E = \Delta E_M = E_{M\ \text{órbita}} - E_{M\ \text{superficie}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}}_{E_{M\ \text{órbita}}} - \underbrace{\left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R_T}\right)}_{E_{M\ \text{superficie}}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} + G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4{,}86 \cdot 10^3 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot \left[(6370+760) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^2}{(5989{,}64\ \text{s})^2} +$$

$$+ 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 4{,}86 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370+760) \cdot 10^3\ \text{m}}\right) = 3{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

23. Una lanzadera espacial pasa de una órbita circular a 200 km a otra a 520 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si la masa de la lanzadera es de 55 000 kg.

a) Calcula el periodo y la velocidad de la lanzadera en su órbita inicial.

b) ¿Qué energía necesita la lanzadera para desplazarse a la nueva órbita?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la lanzadera es responsable del giro de la aeronave alrededor de la Tierra. En la órbita inicial:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left[(6370+200) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} = 5298\ \text{s}$$

La velocidad se calcula partiendo de la igualdad anterior:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370+200) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7791{,}67\ \text{m/s}$$

b) Para pasar de una órbita a otra necesita una energía que será igual a la diferencia de energía mecánica de la lanzadera en ambas órbitas.

La energía mecánica viene dada por la expresión:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r}$$

Para la lanzadera la fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r^2} \rightarrow m\cdot v^2 = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r}$$

Entonces podemos sustituir esta expresión en la de la energía mecánica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r}$$

Para calcular la energía pedida hay que hacer la diferencia entre la energía final y la energía inicial:

$$\Delta E_M = E_{M\,\text{final}} - E_{M\,\text{inicial}} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right) = \frac{1}{2}\cdot G\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_{\text{inicial}}} - \frac{1}{r_{\text{final}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 55\,000\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{(6370+200)\cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370+520)\cdot 10^3\ \text{m}}\right) = 7{,}75\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

24. En un planeta esférico de radio 2200 km, la aceleración de la gravedad en la superficie es g_0 = 5,2 m · s⁻².

a) Determina la masa del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.

b) ¿A qué altura *h* debe orbitar un satélite de 400 kg de masa que describa una órbita circular en un día?

Datos: *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m²/kg².

a) La masa puede calcularse sabiendo que la fuerza peso sobre la superficie de un planeta es la fuerza gravitatoria ejercida por dicho planeta. Es decir:

$$F_G = P \rightarrow G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}\cdot g_0 \rightarrow M = \frac{g_0\cdot R^2}{G} = \frac{5{,}2\ \text{m/s}^2\cdot\left(2200\cdot 10^3\ \text{m}\right)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}} = 3{,}77\cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

Para calcular la velocidad de escape hemos de considerar que es aquella que permite a un objeto lanzado escapar del campo gravitatorio. Esto quiere decir que la energía total en el lugar del lanzamiento es cero. Por tanto, escribimos la siguiente expresión:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v^2_{\text{escape}} - \frac{G\cdot M\cdot\cancel{m}}{R} = 0 \rightarrow v^2_{\text{escape}} = \frac{2\cdot G\cdot M}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 3{,}77\cdot 10^{23}\ \text{kg}}{2200\cdot 10^3\ \text{m}}} = 4781{,}2\ \text{m/s}$$

b) Para calcular la altura partimos de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G\cdot M}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G\cdot M}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} = \frac{G\cdot M}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 3{,}77\cdot 10^{23}\ \text{kg}\cdot\left(24\ \cancel{\text{h}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)^2}{4\pi^2}} = 1{,}681\cdot 10^7\ \text{m}$$

Como el radio del planeta es de 2200 km:

$$h = r - R = 1{,}681\cdot 10^7\ \text{m} - 2200\cdot 10^3\ \text{m} = 1{,}462\cdot 10^7\ \text{m}$$

Como se puede observar, la altura a la que debe orbitar el satélite es independiente de su masa.

25. Un proyectil es lanzado desde el nivel del mar hasta una altura de 1,2 · 10⁶ m sobre la superficie de la Tierra. Si la masa del proyectil es de 600 kg, calcula:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del proyectil.

b) Qué energía hay que suministrar al proyectil para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa altura.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La energía potencial del cohete en un punto situado a una distancia *r* del centro de la Tierra es:

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Donde *M* es la masa de la Tierra y *m* la masa del cohete.

Por tanto, la diferencia entre la energía potencial final y la inicial es lo que ha aumentado la energía potencial del cohete:

$$\Delta E_P = E_{P\,\text{final}} - E_{P\,\text{inicial}} = \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R+h}\right) - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R}\right) = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 600\ \text{kg} \cdot \left[\frac{1}{6370 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370+1200) \cdot 10^3\ \text{m}}\right] = 5{,}976 \cdot 10^9\ \text{J}$$

b) Para escapar de la acción del campo gravitatorio terrestre la energía total debe ser cero. En la órbita inicial:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

La fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \rightarrow m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Entonces podemos sustituir esta expresión en la de la energía mecánica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para hallar la energía pedida hay que calcular la energía mecánica.

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 600\ \text{kg}}{(6370+1200) \cdot 10^3\ \text{m}}\right) = -1{,}586 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Por tanto, hay que comunicarle una energía de $1{,}586 \cdot 10^{10}$ J, pues de esta forma la energía total será nula y escapará de la atracción terrestre.

26. Responde las siguientes cuestiones. Justifica las respuestas.

a) ¿Cuál es la velocidad de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra? Deduce su expresión.

b) ¿Cómo varía la velocidad de escape de un cuerpo si cambia su altura sobre la superficie terrestre de 2 R_T a 3 R_T?

a) El satélite gira alrededor de la Tierra porque existe una fuerza centrípeta: la fuerza de atracción gravitatoria. Cuanto más cerca de la Tierra orbite el satélite, mayor será su velocidad orbital y menor será su periodo.

La velocidad orbital puede calcularse en función de la distancia al centro de la Tierra:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

b) La velocidad de escape es aquella que se necesita comunicar a un objeto para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra. Es decir, la velocidad necesaria para que la energía total sea cero.

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

Si la altura varía, la velocidad de escape también cambiará:

$$v_{\text{escape } 2R}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{2 \cdot R} \,;\; v_{\text{escape } 3R}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{3 \cdot R}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{v_{\text{escape } 2R}^2}{v_{\text{escape } 3R}^2} = \frac{\dfrac{\cancel{2 \cdot G \cdot M}}{2 \cdot \cancel{R}}}{\dfrac{\cancel{2 \cdot G \cdot M}}{3 \cdot \cancel{R}}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{v_{\text{escape } 2R}}{v_{\text{escape } 3R}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Por lo tanto al aumentar la altura a la que se encuentra un cuerpo orbitando, la velocidad de escape disminuye.

27. Indica qué dimensiones tiene la intensidad del campo gravitatorio en el sistema internacional.

Podemos emplear la expresión que identifica el peso con la fuerza gravitatoria:

$$F_G = P \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow [g] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}} \rightarrow [g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

28. Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifica la respuesta: «Si en un punto de un campo creado por varias masas la intensidad del campo es nula, también lo será el potencial gravitatorio».

La afirmación es falsa. El campo gravitatorio es una magnitud vectorial, y puede tener intensidad nula aunque haya varias masas creando el campo. Sin embargo, el potencial gravitatorio es una magnitud escalar, y las contribuciones de varias masas se suman, por lo que puede no anularse aunque sea nula la intensidad del campo gravitatorio.

Un ejemplo: si nos situamos en medio de dos masas iguales, el campo gravitatorio será nulo, mientras que el potencial total será la suma de los dos potenciales debidos a ambas masas en dicho punto.

29. Considera dos masas puntuales tales que $m_1 = m_2$. Situamos una tercera masa puntual entre ellas: m_3. ¿En qué punto entre las masas sería nula la fuerza? ¿Cuál sería la energía potencial de m_3 en esa posición?

La fuerza sería nula justo en el punto medio del segmento que une ambas masas iguales.

La energía potencial en esa posición sería:

$$E_P(m_3) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r_{13}} - \frac{G \cdot m_2 \cdot m_3}{r_{23}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r} - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r} = -2 \cdot \frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r}$$

Donde r es la distancia de m_3 a m_1 y a m_2.

30. Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razona la respuesta.

Si la fuerza es conservativa, su energía potencial puede aumentar o disminuir en función del sentido de su desplazamiento en relación con la variación del campo. La energía cinética disminuirá o aumentará de manera inversa a como lo haga la energía potencial por el principio de conservación de la energía.

Por ejemplo, si un objeto cae, su energía potencial va disminuyendo, mientras que al mismo tiempo la energía cinética va aumentando.

31. **Dos cuerpos de 2500 kg y 1500 kg, respectivamente, se encuentran separados una distancia de 4 m. Calcula:**

a) El módulo de la fuerza de atracción entre ambos.

b) El valor del campo gravitatorio total en el punto medio de la recta que los une.

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

a) La fuerza entre ambos se calcula aplicando la ley de la gravitación universal:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2500\ \text{kg} \cdot 1500\ \text{kg}}{(4\ \text{m})^2} = 1{,}56 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

b) El campo gravitatorio es la suma vectorial de ambos casos. En este caso los dos campos tienen la misma dirección y sentidos opuestos. El módulo del campo total será igual al módulo del campo que crea la masa mayor menos el módulo del campo que crea la masa menor. Vectorialmente sería:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = -\frac{G \cdot m_A}{r_A^2} \cdot \vec{u}_{rA} - \frac{G \cdot m_B}{r_B^2} \cdot \vec{u}_{rB}$$

Donde $\vec{u}_{rA}$ y $\vec{u}_{rB}$ son los vectores unitarios dirigidos desde la masa correspondiente hasta el punto medio de la recta que los une.

Como los campos tienen sentidos opuestos, los vectores son opuestos, y como el cálculo se realiza en el punto medio, las distancias son iguales. Po tanto, podemos escribir:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = -\frac{G \cdot m_A}{r_A^2} \cdot \vec{u}_{rA} - \frac{G \cdot m_B}{r_B^2} \cdot (-\vec{u}_{rA}) = -\frac{G \cdot m_A}{r_A^2} \cdot \vec{u}_{rA} + \frac{G \cdot m_B}{r_A^2} \cdot \vec{u}_{rA} = \frac{G}{r_A^2} \cdot (-m_A + m_B) \cdot \vec{u}_{rA} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{(2\ \text{m})^2} \cdot (-2500\ \text{kg} + 1500\ \text{kg}) \cdot \vec{u}_{rA} = -1{,}67 \cdot 10^{-8}\ \vec{u}_{rA}\ \text{N/kg}$$

32. **Según datos recogidos, la población mundial es de 7300 millones de habitantes (2015). Si suponemos que la masa media de una persona es de 60 kg, calcula:**

a) El peso de todos los habitantes del planeta.

b) La fuerza gravitatoria y la energía gravitatoria entre dos personas separadas 10 m.

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2; M_T = 5,98 · 10^{24} kg; R_T = 6370 km.

a) El peso es la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre las masas.

$$F_G = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7300 \cdot 10^6 \cdot 60\ \text{kg}}{(6370 \cdot 10^3\ \text{m})^2} = 4{,}31 \cdot 10^{12}\ \text{N}$$

b) De nuevo aplicamos la ley de la gravitación universal para calcular la fuerza gravitatoria:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{60\ \text{kg} \cdot 60\ \text{kg}}{(10\ \text{m})^2} = 2{,}40 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

33. **Un cuerpo de 2 kg de masa (m_1) se encuentra situado en el origen de coordenadas. Un segundo cuerpo de 3 kg de masa (m_2) se encuentra en el punto (6, 4) m. Calcula el módulo y el vector de la fuerza con que la masa m_1 atrae a la masa m_2.**

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

El vector con origen en una masa y extremo en la otra es el siguiente:

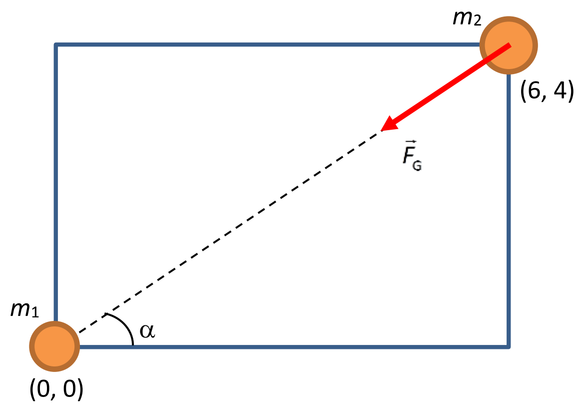
$$\vec{r} = (6, 4) - (0, 0) = (6 - 0, 4 - 0) = (6, 4) = 6\ \vec{i} + 4\ \vec{j}\ \text{m}$$

Su módulo es:

$$|\vec{r}| = r = |6\,\vec{i} + 4\,\vec{j}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}21 \text{ m}$$

Entonces el módulo de la fuerza ejercida es:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ kg}}{(7{,}21 \text{ m})^2} = 7{,}70 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$



Y podemos calcular las componentes para determinar la dirección:

$$\vec{F}_G = -\left(7{,}70 \cdot 10^{-12} \text{ N}\right) \cdot \cos\alpha\,\vec{i} - \left(7{,}70 \cdot 10^{-12} \text{ N}\right) \cdot \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$$

Donde α es el ángulo que forma la línea que una las masas con el eje horizontal.

Por definición de estas funciones trigonométricas podemos escribir:

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2}}\,;\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2}}$$

Y nos queda:

$$\vec{F}_G = -\left(7{,}70 \cdot 10^{-12} \text{ N}\right) \cdot \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2}}\,\vec{i} - \left(7{,}70 \cdot 10^{-12} \text{ N}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2}}\,\vec{j} = -6{,}41 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 4{,}27 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}$$

34. Dos partículas de masas 8 kg y 1 kg se encuentran en el vacío y separadas 40 cm. Calcula:

a) La energía potencial inicial del sistema y el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al aumentar la separación entre las partículas hasta 80 cm.

b) El trabajo necesario para separar las partículas desde la posición de partida hasta el infinito y el trabajo necesario para restablecer la distribución inicial.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) La energía potencial inicial del sistema es:

$$E_{\text{Pinicial}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8 \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{0{,}4 \text{ m}} = -1{,}334 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional para separar las partículas desde una separación inicial de 40 cm hasta una separación final de 80 cm vendrá dado por el incremento de energía potencial cambiado de signo, es decir:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{\text{P final}} - E_{\text{P inicial}}\right) = E_{\text{P inicial}} - E_{\text{P final}}$$

Calculamos la energía potencial final del sistema de la misma forma que la inicial:

$$E_{\text{Pfinal}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8 \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{0{,}8 \text{ m}} = -6{,}67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Por tanto:

$$W = E_{\text{P inicial}} - E_{\text{P final}} = -1{,}334 \cdot 10^{-9} \text{ J} - \left(-6{,}67 \cdot 10^{-10} \text{ J}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

b) El trabajo para separar las partículas desde la posición de partida hasta el infinito se calcula teniendo en cuenta que en el infinito, que es la nueva posición final, la energía potencial será cero. Por tanto:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,\text{final}} - E_{P\,\text{inicial}}\right) = E_{P\,\text{inicial}} - E_{P\,\text{final}} = -1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J} - 0 = -1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

Es un trabajo negativo. Por lo que se necesita una fuerza externa.

El trabajo necesario para restablecer la distribución inicial se calcula análogamente. Teniendo en cuenta que ahora la posición inicial es el infinito, por tanto, la energía potencial será nula y la posición final será la inicial del problema; es decir, cuando se encuentran a 40 cm.

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,\text{final}} - E_{P\,\text{inicial}}\right) = E_{P\,\text{inicial}} - E_{P\,\text{final}} = 0 - \left(-1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}\right) = 1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

En este caso será un trabajo positivo, por tanto, lo realiza el sistema.

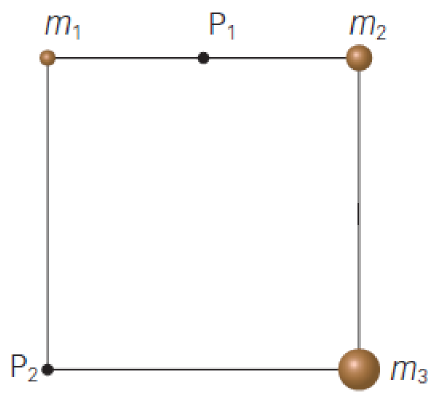
35. Tenemos tres masas puntuales en tres de los vértices de un cuadrado. Si m_2 y m_3 son el doble y el triple de m_1, respectivamente:

a) ¿Qué masa crea el campo más grande en el punto P_1?

b) Si el lado mide 100 m y $m_1 = 2{,}5$ Mt (millones de toneladas), ¿cuál es el valor del potencial gravitatorio creado por las tres masas en el punto P_1?

c) Calcula y representa gráficamente el campo gravitatorio total en el punto P_2.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².



a) Calculemos el módulo del campo para cada masa. $r_1 = r_2$.
Necesitamos conocer el valor de r_3 en función de r_1.

Del dibujo se deduce:

$$r_3^2 = r_1^2 + \left(2 \cdot r_1\right)^2 = 5 \cdot r_1^2 \rightarrow r_3 = \sqrt{5 \cdot r_1^2} = \sqrt{5} \cdot r_1$$

Entonces queda:

$$g_1 = G \cdot \frac{m_1}{r_1^2};\ g_2 = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} = G \cdot \frac{2 \cdot m_1}{r_1^2};\ g_3 = G \cdot \frac{m_3}{r_3^2} = G \cdot \frac{3 \cdot m_1}{\left(\sqrt{5} \cdot r_1\right)^2} = G \cdot \frac{3 \cdot m_1}{5 \cdot r_1^2}$$

Comparando vemos que la masa m_2 es la que crea el campo mayor en P_1.

b) En este caso hay que tener en cuenta las contribuciones de todas las masas al potencial en ese punto según el principio de superposición:

$$V = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} - G \cdot \frac{m_3}{r_3} = -G \cdot \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{2 \cdot m_1}{r_2} + \frac{3 \cdot m_1}{r_3}\right) = -G \cdot m_1 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{3}{r_3}\right) =$$

$$= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{9}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{50\ \text{m}} + \frac{2}{50\ \text{m}} + \frac{3}{\sqrt{(50\ \text{m})^2 + (100\ \text{m})^2}}\right) = -1{,}45 \cdot 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

c) El campo gravitatorio total en el punto P_2 viene dado según el principio de superposición por la expresión:

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 - G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 - G \cdot \frac{m_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3$$

Los vectores de posición ahora son diferentes a los de los apartados anteriores. Ahora están referidos al punto P_2.

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 - G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 - G \cdot \frac{m_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3 =$$

$$= G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \vec{j} + G \cdot \frac{2 \cdot m_1}{r_2^2} \cdot \left(\cos 45^\circ \, \vec{i} + \text{sen } 45^\circ \, \vec{j}\right) + G \cdot \frac{3 \cdot m_1}{r_3^2} \vec{i} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^9 \text{ kg}}{(100 \text{ m})^2} \vec{j} +$$

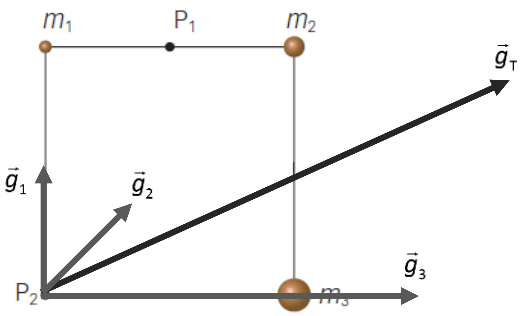
$$+ 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^9 \text{ kg}}{(100 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2} \cdot \left(\cos 45^\circ \, \vec{i} + \text{sen } 45^\circ \, \vec{j}\right) + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^9 \text{ kg}}{(100 \text{ m})^2} \vec{i} =$$

$$= 1{,}668 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg } \vec{j} + \left(1{,}179 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg } \vec{i} + 1{,}179 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg } \vec{j}\right) + 5{,}002 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg } \vec{i} =$$

$$= 6{,}181 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg } \vec{i} + 2{,}847 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg } \vec{j}$$

Nota: Este apartado se puede hacer de otra forma (calculando los vectores de posición y sus respectivos vectores unitarios).

Su representación gráfica es:



El ángulo α que forma el campo total con la horizontal es fácil de calcular:

$$\text{tg } \alpha = \frac{2{,}847 \cdot 10^{-5}}{6{,}181 \cdot 10^{-5}} \rightarrow \alpha = 24{,}73^\circ$$

36. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifica la respuesta: «El trabajo realizado al trasladar una masa entre dos puntos de una misma superficie equipotencial nunca es cero».

Es falsa. Si la superficie es equipotencial, eso significa que la energía potencial es constante en todos los puntos de la superficie, y entonces al pasar de un punto a otro no habrá variación de energía potencial y, en consecuencia, el trabajo necesario para trasladar una masa de un punto a otro de la superficie equipotencial siempre será nulo.

37. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y razona la respuesta: «La intensidad de un punto del campo gravitatorio terrestre es tanto mayor cuanto mayor es la altura a la que se encuentra desde la superficie terrestre».

Es falsa. La intensidad del campo gravitatorio disminuye con el cuadrado de la distancia a la masa que crea el campo. Si la altura es mayor, estamos más lejos de la masa que crea el campo gravitatorio y, por tanto, la intensidad será menor.

38. ¿Qué trabajo realiza una fuerza que actúa sobre una masa puntual que describe media órbita circular de radio *R* alrededor de otra masa? ¿Y si se desplazara desde esa distancia *R* hasta el infinito? Razona las respuestas.

El trabajo es nulo, puesto que si la órbita es circular no hay variación de energía potencial entre dos puntos de la misma.

Si se desplaza desde la órbita hasta el infinito, donde se considera que la energía total es cero, el trabajo necesario sería igual en valor absoluto y de signo positivo, a la energía total que tiene dicha masa en la órbita.

39. Contesta.

a) ¿Qué significa la velocidad de escape de un campo gravitatorio desde el punto de vista energético?

b) ¿Qué signo tiene la energía total de un cometa que describe una órbita hiperbólica?

a) La velocidad de escape es la velocidad necesaria para que la energía total de un cuerpo que se encuentra sometido a un campo gravitatorio sea nula.

b) Si la órbita es hiperbólica, la energía total del cometa es positiva porque el sistema no está ligado. Es negativa en caso de órbitas cerradas, como las elípticas.

40. Explica el concepto de energía potencial gravitatoria. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra partícula de masa *M*? ¿En qué caso se puede utilizar la expresión para la energía potencial gravitatoria $E_P = m \cdot g \cdot h$?

La energía potencial gravitatoria es aquella que posee una masa por encontrarse bajo la influencia gravitatoria de otra u otras masas.

La energía potencial de un cuerpo en un punto coincide con el trabajo que tienen que realizar las fuerzas del campo para llevarlo desde ese punto hasta fuera del campo con velocidad constante. Matemáticamente, un punto fuera del campo está a una distancia infinita de la masa que crea el campo.

La energía potencial gravitatoria que tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra de masa *M* viene dada por la expresión:

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para pequeñas distancias sobre la superficie de la Tierra se puede considerar que la E_P varía linealmente con la altura ($E_P = m \cdot g \cdot h$). A mayores distancias, la E_P varía con el inverso de la distancia *r* y se hace nula en el infinito. (Ver el apartado «¿De dónde viene $E_P = m \cdot g \cdot h$?» del epígrafe «Energía potencial gravitatoria» del libro de texto).

41. Sean dos planetas tal que el radio y la masa del primer planeta son el doble que los del segundo. Si el peso de una persona en el segundo planeta es *P*, ¿cuánto sería en el primero?

El peso es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce un planeta sobre la persona. Para el primer planeta:

$$P_1 = F_{G\,1} = G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{R_1^2}$$

De forma análoga, para el segundo planeta:

$$P_2 = F_{G\,2} = G \cdot \frac{M_2 \cdot m}{R_2^2} = G \cdot \frac{\frac{M_1}{2} \cdot m}{\left(\frac{R_1}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{M_1}{2} \cdot m}{\frac{R_1^2}{4}} = G \cdot \frac{4 \cdot M_1 \cdot m}{2 \cdot R_1^2} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{R_1^2} = 2 \cdot P_1$$

Por tanto:

$$P_2 = 2 \cdot P_1 \rightarrow P_1 = P_2 / 2 = P / 2$$

Es decir que el peso de la persona en el primer planeta es la mitad que en el segundo planeta.

42. Dos planetas tienen la misma densidad y distinto radio. Si el radio de uno es 7000 km y el del otro es 6000 km, calcula:

a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.

b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

a) Para cada planeta el peso es la fuerza de atracción gravitatoria, de esta igualdad obtenemos la expresión para el módulo de la intensidad del campo gravitatorio:

$$P = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Calculamos el cociente entre las intensidades del campo gravitatorio en la superficie de cada planeta:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{M_1}{R_1^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_2}{R_2^2}} = \frac{M_1 \cdot R_2^2}{M_2 \cdot R_1^2}$$

La densidad puede escribirse así:

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$$

Si las densidades son iguales:

$$d_1 = d_2 \rightarrow \frac{M_1}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot R_1^3} = \frac{M_2}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot R_2^3} \rightarrow \frac{M_1}{R_1^3} = \frac{M_2}{R_2^3} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Entonces podemos retomar la ecuación de arriba obteniendo:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1 \cdot R_2^2}{M_2 \cdot R_1^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7000\ \text{km}}{6000\ \text{km}} \rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{7}{6} \rightarrow g_1 = 1{,}167 \cdot g_2$$

b) La velocidad de escape es aquella necesaria para que una masa situada sobre la superficie del planeta escape de la atracción gravitatoria. Es decir, para que su energía total sea cero. Podemos escribir entonces:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

Para cada planeta:

$$v_{\text{escape 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_1}{R_1}}\ ;\ v_{\text{escape 2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_2}{R_2}}$$

Dividiendo ambas ecuaciones, y utilizando la relación de masas obtenida anteriormente a partir de la igualdad de las densidades de cada planeta, obtenemos:

$$\frac{v_{\text{escape 1}}}{v_{\text{escape 2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M_1}{R_1}}}{\sqrt{\frac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M_2}{R_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{M_1}{R_1}}{\frac{M_2}{R_2}}} = \sqrt{\frac{M_1 \cdot R_2}{M_2 \cdot R_1}} = \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{R_2}{R_1}} = \sqrt{\frac{R_1^2}{R_2^2}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7000\ \text{km}}{6000\ \text{km}} \rightarrow \frac{v_{\text{escape 1}}}{v_{\text{escape 2}}} = \frac{7}{6}$$

$$\rightarrow v_{\text{escape 1}} = 1{,}167 \cdot v_{\text{escape 2}}$$

43. Supongamos que en otra galaxia alejada de la nuestra existe un planeta cuya masa M es cuatro veces la masa de la Tierra ($M = 4M_T$). Además, la intensidad del campo gravitatorio en su superficie coincide con la existente en la superficie terrestre, $g = g_T$.

a) ¿Cuál será la relación entre los radios de ambos planetas, R/R_T?

b) ¿Desde la superficie de qué planeta será mayor la velocidad de escape? Determina la relación entre ambas.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) Si la intensidad del campo gravitatorio es igual en ambos planetas, podemos escribir:

$$g = g_\text{T} \rightarrow \cancel{G} \cdot \frac{M}{R^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_\text{T}}{R_\text{T}^2} \rightarrow \frac{M}{R^2} = \frac{M_\text{T}}{R_\text{T}^2} \rightarrow \frac{R^2}{R_\text{T}^2} = \frac{M}{M_\text{T}} \rightarrow \frac{R}{R_\text{T}} = \sqrt{\frac{M}{M_\text{T}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \cancel{M_\text{T}}}{\cancel{M_\text{T}}}} \rightarrow \frac{R}{R_\text{T}} = 2$$

Donde M y R son la masa y el radio del planeta.

Por tanto, el radio del planeta es el doble que el de la Tierra.

b) La velocidad de escape es aquella necesaria para que una masa situada sobre la superficie del planeta escape de la atracción gravitatoria. Es decir, para que su energía total sea cero. Podemos escribir entonces:

$$E_\text{M} = 0 \rightarrow E_\text{C} + E_\text{P} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\text{escape}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow v_\text{escape}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

Para cada planeta:

$$v_\text{escape P} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \;;\; v_\text{escape T} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\text{T}}{R_\text{T}}}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{v_\text{escape P}}{v_\text{escape T}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M}{R}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M_\text{T}}{R_\text{T}}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{M}{R}}{\dfrac{M_\text{T}}{R_\text{T}}}} = \sqrt{\frac{M \cdot R_\text{T}}{M_\text{T} \cdot R}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \cancel{M_\text{T}} \cdot \cancel{R_\text{T}}}{\cancel{M_\text{T}} \cdot 2 \cdot \cancel{R_\text{T}}}} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{v_\text{escape P}}{v_\text{escape T}} = \sqrt{2}$$

Es decir, es mayor la velocidad de escape desde la superficie del planeta situado en la otra galaxia.

44. El 28 de septiembre de 2015 hubo una «superluna»: la Luna estuvo a 356 876 km de la Tierra, la menor distancia en su órbita elíptica. El 11 de octubre se situó a 406 450 km, la mayor distancia. Calcula la diferencia entre el valor de la gravedad creada por la Luna en la Tierra esos días.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_\text{Luna} = 7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg.

Llamamos 1 a la posición más cercana y 2 a la más alejada. Escribimos la expresión de la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerció sobre la Luna en ambas situaciones:

$$g_\text{Luna} = G \cdot \frac{M_\text{L}}{r^2} \rightarrow g_\text{Luna1} - g_\text{Luna2} = G \cdot \frac{M_\text{L}}{r_1^2} - G \cdot \frac{M_\text{L}}{r_2^2} = G \cdot M_\text{L} \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{(356\,876\,000\ \text{m})^2} - \frac{1}{(406\,450\,000\ \text{m})^2} \right) = 8{,}65 \cdot 10^{-6}\ \text{N/kg}$$

45. Un satélite artificial de 200 kg orbita a una altura *h* sobre la superficie terrestre donde el valor de la gravedad es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra.

a) ¿Se realiza trabajo para mantener el satélite en órbita?

b) Calcula el radio, el periodo de la órbita y la energía mecánica del satélite.

Datos: $g_0 = 9{,}8$ m · s⁻² ; $R_\text{T} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) No, puesto que la energía del satélite es la misma en cualquier punto de su órbita.

b) Partiendo de que el peso es la fuerza de atracción gravitatoria, obtenemos la siguiente expresión para la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre:

$$P = F_\text{G} \rightarrow G \cdot \frac{M_\text{T} \cdot m}{R_\text{T}^2} = m \cdot g_0 \rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_\text{T}}{R_\text{T}^2}$$

De forma análoga obtenemos una expresión para la aceleración de la gravedad a una altura h:

$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Dividiendo esta ecuación entre la anterior y teniendo en cuenta que a la altura h el valor de la aceleración de la gravedad es la tercera parte de su valor en la superficie obtenemos:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G} \cdot \dfrac{\cancel{M_T}}{(R_T + h)^2}}{\cancel{G} \cdot \dfrac{\cancel{M_T}}{R_T^2}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{R_T}{R_T + h} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

La fuerza centrípeta responsable del giro del satélite es la fuerza gravitatoria. De esta igualdad obtenemos la expresión para la velocidad:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Como en el enunciado no nos facilitan la masa de la Tierra, utilizamos la expresión para la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}$$

Utilizando la relación entre la aceleración de la gravedad a una altura h y en la superficie terrestre obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T \cdot R_T}{R_T + h}} = \sqrt{g_0 \cdot R_T \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = 6003{,}47\ \text{m/s}$$

Ahora podemos partir de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria anterior y, utilizando las relaciones anteriores, despejar el radio de la órbita:

$$\frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{v^2} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{(6003{,}47\ \text{m/s})^2} = 1{,}103 \cdot 10^7\ \text{m}$$

A partir de aquí es sencillo calcular el periodo:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 1{,}103 \cdot 10^7\ \text{m}}{6003{,}47\ \text{m/s}} = 11\,543{,}9\ \text{s} = 3\ \text{h}\ 12\ \text{min}\ 23{,}9\ \text{s}$$

La energía total del satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{r} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 200\ \text{kg} \cdot (6003{,}47\ \text{m/s})^2 - \frac{9{,}8\ \text{m/s} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2 \cdot 200\ \text{kg}}{1{,}103 \cdot 10^7\ \text{m}} = -3{,}61 \cdot 10^9\ \text{J}$$

46. El satélite *Astra 2C*, empleado para emitir señales de televisión, es un satélite en órbita circular geoestacionaria.

a) Calcula la altura a la que orbita respecto de la superficie de la Tierra y su velocidad.

b) Calcula la energía invertida para llevar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta su órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $R_T = 6370$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; masa del satélite, $m = 4500$ kg.

a) Como su órbita es geoestacionaria, sabemos que su periodo de rotación alrededor de la Tierra es de 24 horas. Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} \rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot \cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T}{r^{\cancel{2}}}$$

Despejando el radio:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(24\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)^2}{4\pi^2}} = 4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m}$$

La altura será este valor menos el radio terrestre:

$$h = 4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m} - 6370 \cdot 10^3\ \text{m} = 3{,}588 \cdot 10^7\ \text{m} = 35\,880\ \text{km}$$

Para calcular la velocidad partimos, al igual que antes, de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m}}} = 3072{,}59\ \text{m/s}$$

b) La energía invertida será igual a la energía final del satélite en su órbita menos la energía que tenía antes de ponerlo en órbita. Por tanto, podemos escribir:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}}$$

Esta ecuación se puede escribir así:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) - \left(0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}\right) =$$

Donde *r* es la distancia desde el centro de la Tierra al satélite en su órbita y *v* la velocidad del satélite en órbita. Como no tenemos esta velocidad, debemos expresarlo en función de magnitudes conocidas. Esto lo hacemos a partir de la igualdad de la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

Por tanto:

$$E = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) - \left(0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r}\right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 4500\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{2 \cdot 4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m}}\right) = 2{,}61 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

47. La luna Ío de Júpiter tiene una masa de 8,94 · 10^{22} kg y una gravedad en su superficie de 1,81 m/s^2.

a) Calcula el radio en kilómetros de Ío y su volumen.

b) Una sonda está en caída libre hacia la superficie de Ío. A 5000 km del centro de la luna la velocidad de la sonda es de 1250 m/s. ¿Qué velocidad tendrá la sonda a 2000 km del centro?

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

a) El peso de un objeto sobre la superficie de Ío se debe a la fuerza gravitatoria que este ejerce:

$$P = F_G \rightarrow G\cdot\frac{M_{\text{Ío}}\cdot\cancel{m}}{R_{\text{Ío}}^2} = \cancel{m}\cdot g_{\text{Ío}} \rightarrow R_{\text{Ío}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_{\text{Ío}}}{g_{\text{Ío}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 8{,}94\cdot10^{22}\ \text{kg}}{1{,}81\ \text{m/s}^2}} = 1{,}815\cdot10^6\ \text{m} = 1815\ \text{km}$$

El volumen será entonces:

$$V_{\text{Ío}} = \frac{4}{3}\pi\cdot R_{\text{Ío}}^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(1{,}815\cdot10^6\ \text{m}\right)^3 = 2{,}50\cdot10^{19}\ \text{m}^3$$

b) El problema puede resolverse aplicando el principio de conservación de la energía. La suma de las energías cinética y potencial gravitatoria debe ser la misma en ambos puntos. Por tanto:

$$\left(E_C + E_P\right)_{\text{final}} = \left(E_C + E_P\right)_{\text{inicial}}$$

Podemos escribir la siguiente relación igualando la fuerza centrípeta a la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot M_{\text{Ío}}\cdot m}{r^2} \rightarrow m\cdot v^2 = \frac{G\cdot M_{\text{Ío}}\cdot m}{r}$$

Entonces la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\left(E_C + E_P\right)_{\text{final}} = \left(E_C + E_P\right)_{\text{inicial}} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G\cdot M_{\text{Ío}}\cdot\cancel{m}}{r_{\text{Final}}} = \frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G\cdot M_{\text{Ío}}\cdot\cancel{m}}{r_{\text{inicial}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{final}}^2 = v_{\text{inicial}}^2 + 2\cdot\left(\frac{G\cdot M_{\text{Ío}}}{r_{\text{final}}} - \frac{G\cdot M_{\text{Ío}}}{r_{\text{inicial}}}\right) \rightarrow v_{\text{Final}} = \sqrt{v_{\text{inicial}}^2 + 2\cdot G\cdot M_{\text{Ío}}\cdot\left(\frac{1}{r_{\text{final}}} - \frac{1}{r_{\text{inicial}}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1250\ \text{m/s}\right)^2 + 2\cdot 6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 8{,}94\cdot10^{22}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{2000\cdot10^3\ \text{m}} - \frac{1}{5000\cdot10^3\ \text{m}}\right)} = 2267{,}2\ \text{m/s}$$

48. En 1969 Michael Collins tripulaba el módulo del mando Columbia, de la misión Apollo 11, mientras Neil Armstrong y Edwin Aldrin caminaban sobre la Luna. La nave orbitaba a 100 km de altura sobre la superficie de la Luna con un periodo de 118 min. Calcula:

a) La masa de la Luna y la intensidad del campo gravitatorio en la superficie lunar.

b) La velocidad de escape desde la superficie lunar.

Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N · m²/kg²; $R_{\text{Luna}} = 1{,}74\cdot10^3$ km.

a) La Luna atraía al módulo de mando y lo hacía girar a su alrededor. En este movimiento podemos identificar la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G\cdot M_L\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G\cdot M_L}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G\cdot M_L}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} = \frac{G\cdot M_L}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_L = \frac{4\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\pi^2\cdot\left(1{,}74\cdot10^6\ \text{m} + 100\cdot10^3\ \text{m}\right)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\left(118\ \cancel{\text{min}}\cdot\frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right)^2} = 7{,}356\cdot10^{22}\ \text{kg}$$

En la superficie lunar la intensidad del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{G\cdot M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 7{,}36\cdot10^{22}\ \text{kg}}{\left(1{,}74\cdot10^6\ \text{m}\right)^2} = 1{,}62\ \text{N/m} = 1{,}62\ \text{m/s}^2$$

b) La velocidad de escape desde la superficie lunar es la velocidad necesaria para conseguir que una masa escape del campo gravitatorio de la Luna; es decir, para conseguir que su energía total sea cero. Por tanto:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M_L \cdot \cancel{m}}{R_L} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 2375{,}43\ \text{m/s} = 8551{,}55\ \text{km/h}$$

49. La Estación Espacial Internacional, de 280 000 kg de masa, gira a una altura media de 360 km sobre la superficie de la Tierra siguiendo una órbita circular. Debido al rozamiento con la alta atmósfera, su altura disminuye continuamente. Por este motivo, la estación ha descendido hasta una órbita circular de 340 km de altura.

Calcula:

a) Las velocidades orbitales a 340 km y 360 km de altura.

b) La energía necesaria para recuperar la órbita inicial.

c) La diferencia en el periodo de las órbitas.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza centrípeta que obliga a girar a la estación espacial es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre ella. Por tanto:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v_{360\ \text{km}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_{360\ \text{km}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370 + 360) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7698{,}5\ \text{m/s}$$

Análogamente:

$$v_{340\ \text{km}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_{340\ \text{km}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370 + 340) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7710{,}0\ \text{m/s}$$

b) Para recuperar la órbita inicial hay que proporcionar a la Estación Espacial una energía igual a la diferencia de energía entre la órbita de más altura y la de menos altura, es decir:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}}$$

Podemos escribir esta relación utilizando la igualdad de la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

Entonces la ecuación anterior se puede escribir así:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right) =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{r_{\text{inicial}}} - \frac{1}{r_{\text{final}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 2{,}8 \cdot 10^5\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{(6370 + 340) \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370 + 360) \cdot 10^3\ \text{m}}\right) = 2{,}47 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

c) El periodo de cada órbita se puede calcular a partir de la ecuación que identifica la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$$

Es decir, el periodo depende únicamente de la distancia a la que se encuentra la Estación Espacial en la órbita. Por tanto, aplicando la ecuación anterior a ambas órbitas:

$$T_{360\text{ km}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{360\text{ km}}}{G \cdot M_T}} \text{ ; } T_{340\text{ km}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{340\text{ km}}}{G \cdot M_T}}$$

Será mayor el periodo correspondiente a la órbita de mayor altura. Como nos piden la diferencia entre ambos periodos:

$$T_{360\text{ km}} - T_{340\text{ km}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{360\text{ km}}}{G \cdot M_T}} - \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{340\text{ km}}}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}} \cdot \left(\sqrt{r^3_{360\text{ km}}} - \sqrt{r^3_{340\text{ km}}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} \cdot \left(\sqrt{\left[(6370 + 360) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3} - \sqrt{\left[(6370 + 340) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3}\right) =$$

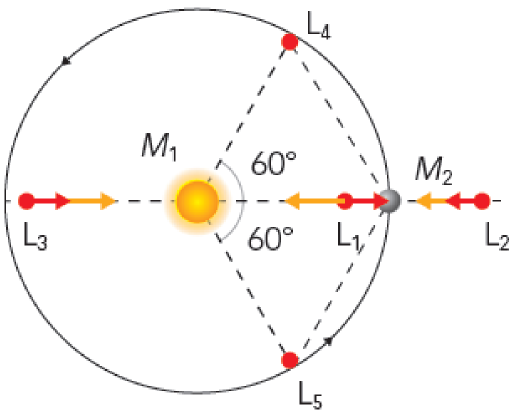
$$= 24{,}47\ \text{s}$$

50. Prepara una presentación acerca de los distintos tipos de satélites, LEO, MEO y GEO. Incluye su aplicación, las características de las naves, órbita, periodo, etc.

Respuesta libre.

51. Los puntos de Lagrange son los cinco puntos en los que un cuerpo de masa despreciable, en el campo gravitatorio creado por otros dos cuerpos de masa M_1 y M_2, siendo $M_1 > M_2$, tiene una órbita síncrona a la que describe M_2 al girar en torno a M_1. Tres de estos puntos, L_1, L_2 y L_3, están en la línea que une M_1 y M_2. Localízalos en un diagrama y razona por qué la distancia que separa L_1 de M_1 es la menor, y la que separa L_2 de M_1 es la mayor.

Respuesta gráfica. La situación de los puntos de Lagrange es la siguiente:



Los puntos de Lagrange son aquellos en los que un objeto de masa despreciable respecto a M_1 y M_2 describe una órbita con un periodo igual que el que tiene M_2 en su giro alrededor de M_1.

La distancia de L_1 es la menor porque ese punto se encuentra entre las dos masas, donde el campo gravitatorio es nulo. Está más cerca de la masa más pequeña. En el diagrama, más cerca de M_2 que de M_1.

L_2 está más lejos de M_1 que L_3. Esto es así porque el cuerpo de masa M_2 contribuye poco a la fuerza neta que actúa sobre el tercer cuerpo en L_3.

FÍSICA EN TU VIDA

1. ¿De qué manera obtienen los satélites la energía para funcionar?

De los paneles solares.

2. ¿Cómo se comunican los satélites con las estaciones terrestres para emitir las imágenes captadas?

Los satélites disponen de antenas que les sirven para emitir la información a las estaciones terrestres de seguimiento, y también para recibir las posibles órdenes que se les envían desde la Tierra.

3. ¿Cómo será el periodo de los satélites que orbitan más allá de la órbita geoestacionaria?

El periodo será mayor de 24 horas.

4. ¿Cómo se modifica el periodo de un satélite si le comunicamos energía hasta situarlo en una órbita más alta?

El periodo es mayor cuanto más elevada sea la órbita. Por tanto, si le damos energía, subirá a una órbita más alta y el periodo aumentará.

5. Se denomina basura espacial a los restos de satélites, cohetes y demás desperdicios que orbitan en el espacio alrededor de la Tierra.

a) ¿Cuáles son los peligros de la basura espacial?

b) ¿Por qué son tan peligrosos residuos incluso de unos pocos centímetros de tamaño?

a) La basura espacial puede chocar contra satélites que estén operativos y causar daños, pues las colisiones tienen lugar a una velocidad relativa de miles de metros por segundo.

b) Cuanto mayor sea el tamaño, más peligroso es el resto de basura espacial, pues su energía cinética es mayor. Un fragmento de unos pocos centímetros, aunque tiene una masa pequeña, se mueve a una velocidad muy alta, por lo que lleva una energía cinética muy elevada y puede causar graves daños si colisiona con un satélite artificial, por ejemplo.

6. Las imágenes captadas por los satélites meteorológicos tienen más usos, además del pronóstico meteorológico. Piensa en ello y anota algunos.

Respuesta personal. Las imágenes pueden emplearse para comprobar el alcance de un incendio forestal o el área de extensión de las emisiones de un volcán, por ejemplo.

7. Contesta:

a) ¿Te parece interesante destinar grandes sumas de dinero al desarrollo de satélites meteorológicos? ¿Por qué?

b) ¿Y al desarrollo de otros tipos de satélites: militares, comunicaciones, telescopios espaciales, sistemas de navegación (como el GPS)…?

a) Respuesta personal. Aunque cuestan mucho dinero, los satélites meteorológicos prestan un servicio excepcional. Basta con pensar, por ejemplo, en la detección de tormentas tropicales, huracanes, tifones, etc., que permiten avisar a la población afectada para que se tomen las medidas de protección adecuadas.

b) Respuesta personal. Para convencer a los alumnos y alumnas se puede poner el ejemplo de los satélites que forman el sistema GPS. ¿Cuántos millones de teléfonos y navegadores usan este sistema en todo el mundo?

8. **¿Qué medidas se deberían tomar para reducir en lo posible la existencia de basura espacial?**

No es fácil controlar la basura espacial. Se podría reducir con la instauración de medidas más severas a la hora de lanzar cohetes para evitar que los restos de los propulsores quedaran a la deriva en el espacio. Pero el problema son los restos que ya están en órbita y aquellos que se producen como consecuencia del malfuncionamiento de satélites que ya orbitan nuestro planeta.