PROYECTO SABER HACER

8

Relatividad

SANTILLANA

Relatividad

8

PARA COMENZAR

- **¿Qué representa cada una de las letras que aparecen en la fórmula de Einstein?**

  La *E* simboliza la energía; la *m*, la masa; y la *c*, la velocidad de la luz en el vacío. La fórmula indica que la energía y la masa son equivalentes y están relacionadas por el cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío.

- **¿Por qué es necesario acelerar las partículas a velocidades tan altas para generar nuevas partículas de mayor masa?**

  Porque al acelerar las partículas estas adquieren mucha energía, y según la fórmula de Einstein la energía puede ser convertida en masa. Como el valor de la velocidad de la luz en el vacío es muy elevado, para poder generar partículas, aunque sean de pequeña masa, es necesario utilizar una gran cantidad de energía.

ACTIVIDADES

1. **Un niño está dentro de un tren en reposo, lanza una pelota hacia arriba y la recoge a continuación.**

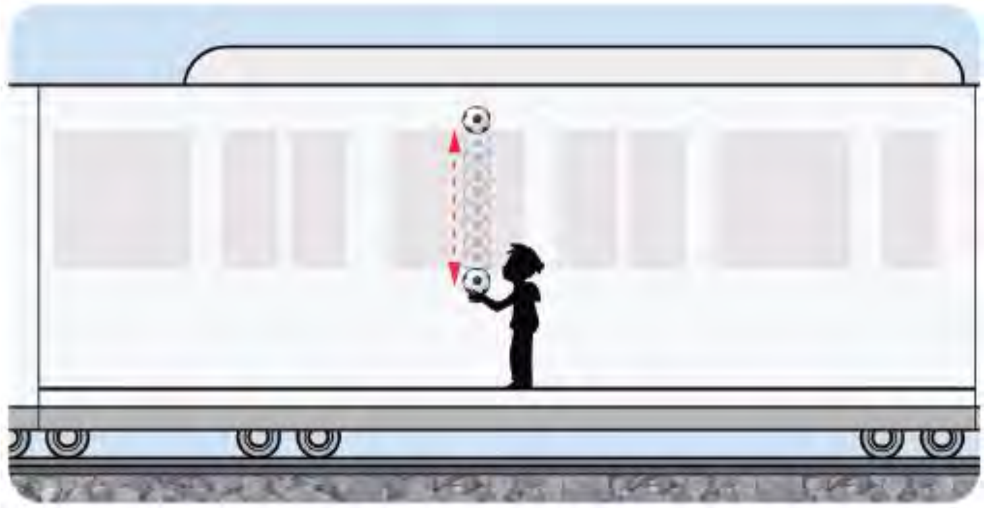
   a) Explica cómo es la trayectoria descrita por la pelota con respecto al niño. Al rato el tren arranca y el niño vuelve a lanzar la pelota, que cae nuevamente en su mano. Describe la nueva trayectoria descrita por la pelota.

   b) Cierto tiempo después el tren pasa por una estación y una joven que espera en el andén observa cómo el niño situado dentro del tren lanza y recoge la pelota tal y como se indica en el apartado a. ¿Qué trayectoria observa la joven del andén en la pelota?

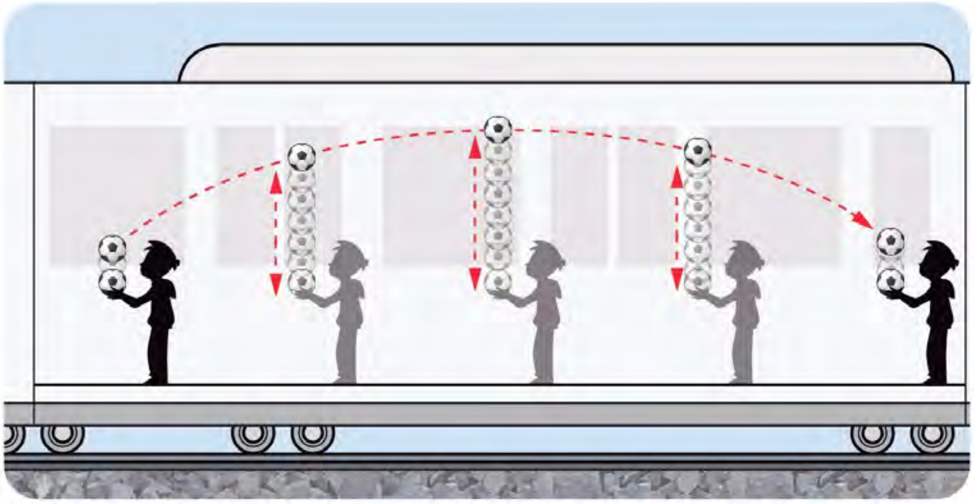
   Explica con un dibujo las trayectorias de cada apartado.

   a) Con respecto al niño, la pelota sigue una trayectoria recta. Primero sube verticalmente, luego se para y comienza de nuevo a caer verticalmente hasta que el niño la recoge de nuevo.

   Luego, con el tren moviéndose con velocidad constante, la trayectoria de la pelota respecto al niño sigue siendo una recta. La pelota sube verticalmente y luego cae verticalmente.



b) Para la joven, la trayectoria no es una recta, puesto que mientras la pelota va subiendo el tren se va desplazando respecto a ella. Para ella la trayectoria es una parábola, puesto que es la composición de dos movimientos: uno vertical con aceleración constante, la aceleración de la gravedad terrestre, y otro movimiento horizontal con velocidad constante.



2. Imagina que dos motocicletas A y B se desplazan por una carretera recta con velocidad constante. Cuando la moto B persigue a la moto A, esta comprueba que se le acerca a una velocidad de 40 km/h. Y si las motos van una al encuentro de la otra, el conductor de la moto A comprueba que la moto B se le acerca a una velocidad que es 4,5 veces mayor que la velocidad anterior.

a) Señala a qué velocidad se desplazan las motocicletas A y B.

b) Indica cuál es la aceleración de la moto A con respecto a la moto B en cada situación descrita.

a) Del primer caso se puede deducir que la velocidad de la moto B es 40 km/h mayor que la velocidad de la moto A.

$$v_B = v_A + 40$$

Del segundo caso se deduce que la suma de ambas velocidades es 4,5 veces mayor que 40 km/h. Es decir:

$$v_A + v_B = 4{,}5 \cdot 40$$

Nos queda, pues, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Restando ambas ecuaciones:

$$v_B - (v_A + v_B) = v_A + 40 - 4{,}5 \cdot 40 \rightarrow -v_A = v_A + 40 - 4{,}5 \cdot 40 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4{,}5 \cdot 40 - 40 = 2 \cdot v_A \rightarrow \frac{3{,}5 \cdot 40}{2} = v_A \rightarrow v_A = 70 \text{ km/h}$$

Y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones:

$$v_B = v_A + 40 = 70 + 40 = 110 \text{ km/h}$$

b) En ambos casos la aceleración de las dos motos es nula, pues se mueven con velocidad constante.

3. Mortimer es un gran aficionado a los viajes espaciales. Su mayor ilusión sería llegar a algún lugar de Alfa Centauro, el sistema estelar más próximo al Sol y que se encuentra a 4,36 años luz de distancia.

a) ¿A qué velocidad debe viajar la nave espacial para que su hija de diez años pueda ver regresar a su padre el día que ella cumple setenta años?

b) Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso?

c) A la vista del resultado, discute la posibilidad real de realizar viajes interestelares.

a) El viaje debe producirse de tal modo que en la Tierra transcurran 60 años (Δt).

La velocidad y el tiempo que emplea Mortimer desde el sistema de referencia de su hija están relacionados mediante la expresión:

$$v = \frac{2 \cdot d}{\Delta t}$$

Sustituimos los valores conocidos para d y Δt:

$$v = \frac{2 \cdot 4{,}36 \text{ años} \cdot c}{60 \text{ años}} = 0{,}145 \cdot c$$

b) La teoría de la relatividad nos permite relacionar el intervalo de tiempo experimentado por Mortimer con el que experimenta su hija:

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los valores conocidos calculamos el tiempo que tarda Mortimer en su viaje desde un sistema de referencia de Mortimer:

$$\Delta t' = 60 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}145 \cdot c)^2}{c^2}} = 59{,}36 \text{ años}$$

Para el padre han transcurrido menos de 60 años, pues se ha movido con una velocidad del orden de la velocidad de la luz en el vacío.

Por tanto, la edad del padre cuando regrese será 30 + 59,36 años; es decir 89,36 años.

c) A partir de los resultados obtenidos podemos afirmar que sí es posible realizar viajes interestelares viajando a velocidades próximas a la de la luz aunque estemos hablando de viajes en los que las distancias son muy grandes y por ello el tiempo invertido. Además, hay que tener en cuenta que las naves que realizasen dichos viajes sufrirían el efecto de la dilatación del tiempo, este efecto los favorecería ya que disminuiría el tiempo invertido medido en el sistema de referencia de la nave en cuestión.

4. Un tren de altísima velocidad que mide 1 km de longitud en reposo pasa junto a otro tren en reposo. Para el conductor del tren en reposo, este mide 800 m y percibe que el tren en movimiento tiene la misma longitud que el suyo propio. ¿Cómo es esto posible? ¿A qué velocidad se mueve el tren?

El conductor en reposo aprecia una longitud contraída para el tren en movimiento. Por eso le parece que ambos trenes son iguales aunque cuando están en reposo la longitud del tren que está en movimiento es mayor.

La relación entre ambas longitudes viene dada por la expresión relativista correspondiente:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \rightarrow 1 - \left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{L'}{L}\right)^2} = \frac{v}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{800 \text{ m}}{1000 \text{ m}}\right)^2} = 0{,}6 \rightarrow v = 0{,}6c$$

5. Un muon pasa junto a la Tierra a una velocidad 0,6 · *c*. Visto desde el muon, ¿cuál es el valor del diámetro terrestre medio en una dirección paralela al movimiento del muon?

Dato: diámetro de la Tierra, medido en la Tierra = $1{,}3 \cdot 10^7$ m.

Para el muon la Tierra se desplaza a una velocidad de 0,6c. Por tanto, observará un diámetro de menor longitud:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}6 \cdot c}{c}\right)^2} =$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 1{,}04 \cdot 10^7 \text{ m}$$

6. Supón una bombilla encendida en un tren que viaja a una velocidad de 80 km/h. Un viajero espacial pasa cerca de él a una velocidad igual a *c*. Calcula la velocidad de la luz que percibirá el viajero si avanza acercándose al tren o alejándose del mismo.

El viajero notará que la velocidad de la luz es igual a *c*, independientemente de si se aleja de la fuente de luz o se acerca. Es uno de los postulados de la relatividad especial: la velocidad de la luz es una constante; no depende de la velocidad relativa entre un observador y una fuente de luz.

7. Supón una nave espacial que viaja a la velocidad de la luz en cuyo interior hay un foco de luz encendido. Un tren que viaja a la velocidad de 80 km/h ve la luz de ese foco. Calcula la velocidad de la luz que percibirán los viajeros del tren si viaja acercándose a la nave o si viaja alejándose de la misma.

Los viajeros del tren percibirán que la velocidad de la luz procedente del foco es igual a *c*, independientemente de si se alejan de la fuente de luz o se acercan. Es uno de los postulados de la relatividad especial: la velocidad de la luz es una constante; no depende de la velocidad relativa entre un observador y una fuente de luz.

8. Contesta:

a) ¿Cuál debe ser la velocidad de una partícula para que su energía total sea un 20 % mayor que la energía que tiene en reposo?

b) Expresa el resultado obtenido en relación con el valor de la velocidad de la luz en el vacío, *c*.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Si la energía total es un 20 % mayor que su energía en reposo, se puede escribir:

$$E = 1{,}2 \cdot E_0 \rightarrow m \cdot \cancel{c^2} = 1{,}2 \cdot m_0 \cdot \cancel{c^2} \rightarrow \frac{m}{m_0} = 1{,}2$$

Por otra parte, podemos escribir la relación entre la masa relativista y la masa en reposo:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$1{,}2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1{,}2} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2 \rightarrow 1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \cdot c \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1{,}66 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) En función de *c*:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \cdot c = 0{,}553 \cdot c$$

9. Se acelera una partícula de $m_0 = 2$ mg de modo que alcanza una velocidad igual a la mitad de la velocidad de la luz en el vacío ($3 \cdot 10^8$ m/s).

a) Calcula la masa de la partícula al moverse a la velocidad *v*.

b) Calcula la energía necesaria para que la partícula alcance dicha velocidad *v*.

a) La relación entre la masa relativista y la masa en reposo es:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \text{ mg}}{\sqrt{1-\frac{(0{,}5\cdot c)^2}{c^2}}} \rightarrow m = \frac{2 \text{ mg}}{\sqrt{1-0{,}5^2}} = 2{,}31 \text{ mg}$$

b) La energía necesaria será igual a la energía total relativista menos la energía en reposo, es decir:

$$E = E_\text{T} - E_0 = m\cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = c^2 \cdot (m - m_0) = \left(3\cdot 10^8 \text{ m/s}\right)^2 \cdot \left(2{,}31 \cancel{\text{mg}} - 2 \cancel{\text{mg}}\right)\cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000000 \cancel{\text{mg}}} = 2{,}79\cdot 10^{10} \text{ J}$$

10. Señala qué aportó Einstein a la física en relación con el resultado obtenido por Michelson y Morley en su famoso experimento en el que pretendían medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter.

Einstein postuló en su teoría de la relatividad especial que la velocidad de la luz en un invariante: no depende del sistema de referencia elegido ni de la velocidad entre la fuente de luz y el observador. La interpretación de Einstein es que el éter no existe, y por eso no se obtenían los resultados esperados por los científicos en el experimento de Michelson-Morley.

11. ¿Cuáles son los dos postulados de la teoría de la relatividad especial de Einstein? Explica el significado de ambos postulados con tus palabras.

Postulados de la teoría de la relatividad especial:

1. Primer postulado: todas las leyes de la física se cumplen por igual en todos los sistemas de referencia inerciales. Al precisar todas, Einstein se refiere tanto a las leyes de la mecánica como a las del electromagnetismo y la óptica. Esto significa que la forma que adoptan las ecuaciones que describen las leyes de la física son la misma en dos sistemas de referencia si uno de ellos se mueve con velocidad constante respecto al otro.
2. Segundo postulado. La velocidad de la luz en el vacío, *c*, es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales y es independiente del movimiento relativo entre la fuente emisora y el observador. Esto quiere decir que mediremos el mismo valor aunque nos movamos hacia la fuente de luz o nos alejemos de ella.

12. Una niña en reposo mide el tiempo que transcurre entre dos sucesos. Un niño en movimiento mide también el tiempo transcurrido entre ambos sucesos. Di si el niño y la niña obtienen el mismo resultado. Explica tu respuesta.

Los resultados son diferentes. La diferencia es mayor cuanto mayor sea la velocidad relativa del niño respecto de la niña. En realidad, solo se podrán diferenciar ambos tiempos cuando esta velocidad es del orden de la velocidad de la luz en el vacío.

13. Se coordinan dos relojes de forma que marquen la misma hora. Uno de ellos se deja en la Tierra y el otro se lleva a una nave espacial que despega a las 12:00 con $v = 0{,}9c$ y vuelve a la Tierra cuando su reloj marca las 13:00. ¿Qué hora marcará el reloj que ha quedado en la Tierra?

En el sistema de referencia de la nave ha pasado una hora. Para calcular cuánto tiempo ha pasado en la Tierra usamos las expresiones relativistas que ligan ambos intervalos de tiempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 \text{ h}}{\sqrt{1-\frac{(0{,}9\cdot c)^2}{c^2}}} == \frac{1 \text{ h}}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}29 \text{ h} = 2 \text{ h } 17' \ 24''$$

Por tanto, el reloj que ha quedado en Tierra marcará las 14:17:24.

14. Se mide el tiempo de vida de una partícula en movimiento y se comprueba que es de $3{,}8 \cdot 10^{-8}$ s, mientras que el tiempo de vida de la misma partícula en reposo es $4 \cdot 10^{-8}$ s. ¿Es posible? ¿A qué velocidad se movería?

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Si empleamos la expresión relativista que liga ambos intervalos, tendríamos.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2 \rightarrow 1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2} = \frac{v}{c} \rightarrow v = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2} \cdot c = \sqrt{1-\left(\frac{4\cdot 10^{-8}\ \text{s}}{3{,}8\cdot 10^{-8}\ \text{s}}\right)^2} \cdot 3\cdot 10^8\ \text{m/s} = \text{No existe solución}$$

Esto quiere decir que no es posible la situación planteada. En efecto, cuando la partícula está en movimiento su tiempo de vida es mayor. (Revisar el ejemplo de los muones).

15. Imagina una nave espacial de 100 m de longitud. Los habitantes de una colonia espacial la observan pasar y dicen que mide 99 m. ¿Cuál es la velocidad de la nave respecto de los habitantes de la colonia?

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

De nuevo aplicando las expresiones relativistas:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \rightarrow 1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2} = \frac{v}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = 0{,}14 \rightarrow v = 4{,}23\cdot 10^7\ \text{m/s}$$

16. Una barra se mueve a una velocidad 0,9*c*. Si en reposo su longitud es de 2 m, ¿cuál es la longitud de la barra cuando está en movimiento?

Procediendo análogamente a casos anteriores:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow L' = L\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2\ \text{m}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{0{,}9\cdot c}{c}\right)^2} = 2\ \text{m}\cdot\sqrt{1-0{,}9^2} = 0{,}87\ \text{m}$$

17. Un observador ve pasar una regla de 50 cm junto a él moviéndose a una velocidad muy alta en la dirección de la longitud de la regla. Mide la longitud y obtiene un valor de 46 cm. ¿A qué velocidad se desplaza la regla?

La contracción observada por el observador se debe a la elevada velocidad con que se mueve la regla.

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \rightarrow 1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2} = \frac{v}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{46\ \text{cm}}{50\ \text{cm}}\right)^2} = 0{,}39 \rightarrow v = 0{,}39c$$

18. La distancia Madrid-Sevilla es de 470 km, que el AVE recorre a una velocidad media de 300 km/h. Utilizando la corrección relativista, determina la distancia Madrid-Sevilla que percibe un pasajero de dicho tren.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Como la velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío, los efectos relativistas no serán apreciables. En cualquier caso, hacemos los cálculos para comprobarlo:

$$L=\frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow L'=L\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=470\text{ km}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{300\text{ km/h}\cdot\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}}{3\cdot10^8\text{ m/s}}\right)^2}\simeq470\text{ km}$$

19. **Una nave se aleja de la Tierra a 1,5 · 10⁸ m/s mientras una estación de seguimiento terrestre emite un haz láser hacia la nave. ¿Qué velocidad para el haz miden los astronautas de la nave?**

La velocidad que miden es exactamente la velocidad de la luz en el vacío: $3\cdot10^8$m/s. Incluso aunque la nave se mueva a velocidades relativistas.

20. **Una partícula se mueve con $v = 0{,}98c$. Calcula la relación entre su masa relativista y su masa en reposo.**

En este caso aplicamos la fórmula de Einstein para la masa relativista:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}98\cdot c)^2}{c^2}}}\simeq5$$

21. **¿Qué velocidad máxima podría alcanzar una partícula si le damos cada vez más energía? ¿Cuál sería su masa relativista si la partícula pudiera alcanzar la velocidad de la luz? Explica tus respuestas.**

Si le damos cada vez más energía a una partícula, su velocidad va aumentando, pero también su masa, con lo cual cada vez nos cuesta más acelerarla. En el momento en que alcanzase la velocidad de la luz en el vacío sería necesaria una energía infinita para poder acelerarla más. Así, la velocidad máxima que puede alcanzar es *c*, la velocidad de la luz en el vacío.

22. **La energía total relativista de un cuerpo ¿puede ser mayor que su energía en reposo? ¿Puede ser igual? ¿Y menor?**

La energía total relativista sí puede ser mayor que su energía en reposo. Puede ser igual si el cuerpo está en reposo. Pero no puede ser menor que la energía en reposo. La expresión de la energía total relativista es:

$$E=m\cdot c^2$$

Expresándolo en función de la masa:

$$E=m\cdot c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot c^2$$

Cuando la velocidad es nula, la energía relativista coincide con la energía en reposo. Cualquier otro valor de la velocidad hace que el denominador de la expresión anterior sea menor que uno y, por tanto, la energía relativista es siempre mayor o igual que la energía en reposo.

23. **La masa del bosón de Higgs es $2{,}24\cdot10^{-25}$ kg. Comprueba que equivale a 126 GeV, según la ecuación de Einstein.**

Datos: 1 eV = $1{,}6\cdot10^{-19}$ J; $c = 3\cdot10^8$ m/s.

Aplicando la expresión de la energía relativista:

$$E=m_0\cdot c^2=2{,}24\cdot10^{-25}\text{ kg}\cdot\left(3\cdot10^8\text{ m/s}\right)^2=2{,}016\cdot10^{-8}\text{ J}$$

Utilizando la equivalencia entre electronvoltio y julio:

$$2{,}016\cdot 10^{-8}\ \cancel{\text{J}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{eV}}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}}}\cdot\frac{1\ \text{GeV}}{10^{9}\ \cancel{\text{eV}}}=126\ \text{GeV}$$

24. En el sincrotrón ALBA se aceleran electrones de modo que su masa llega a ser 6000 veces la masa en reposo. Calcula la energía de los electrones en J y en MeV.

Datos: $c = 3\cdot 10^{8}$ m/s; $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.

La energía se puede calcular a partir de su masa relativista:

$$E=m\cdot c^2=6000\cdot m_0\cdot c^2=6000\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2=4{,}914\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Ahora lo expresamos en electronvoltios teniendo en cuenta que la equivalencia eV-J coincide con el valor numérico de la carga del electrón:

$$4{,}914\cdot 10^{-10}\ \cancel{\text{J}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{eV}}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{J}}}\cdot\frac{1\ \text{MeV}}{10^{6}\ \cancel{\text{eV}}}=3071{,}25\ \text{MeV}$$

25. ¿Con qué velocidad se mueve una partícula si su energía total es el triple que su energía en reposo?

En este caso:

$$E=3\cdot E_0\rightarrow m\cdot c^2=3\cdot m_0\cdot c^2\rightarrow\frac{m}{m_0}=3$$

Por otra parte, podemos escribir la relación entre la masa relativista y la masa en reposo:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$3=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{3}\rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\rightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{v}{c}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\rightarrow v=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot c=0{,}943c$$

26. En un experimento chocan dos haces de protones con la misma velocidad. Tras la colisión se genera un par protón (p^+)-antiprotón (p^-). Calcula:

a) La mínima energía relativista que debe tener cada protón para que se produzca ese hecho.

b) La masa relativista de cada protón.

c) La energía cinética de cada protón.

Datos: $m_{p+} = m_{p-} = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3\cdot 10^{8}$ m/s.

a) Si ambas partículas llevan la misma velocidad, como su masa es la misma, ambas tendrán la misma energía relativista. Tras el choque se generan dos nuevas partículas. La energía de los protones será mínima cuando todas las partículas generadas estén en reposo. En ese caso podemos escribir la siguiente expresión:

$$E_{p+}+E_{p+}=m_{0\,p+}\cdot c^2+m_{0\,p+}\cdot c^2+m_{0\,p+}\cdot c^2+m_{0\,p-}\cdot c^2\rightarrow 2\cdot E_{p+}=4\cdot m_{0\,p+}\cdot c^2\rightarrow E_{p+}=\frac{4\cdot m_{0\,p+}\cdot c^2}{2}$$

$$\rightarrow E_{p+}=2\cdot m_{0\,p+}\cdot c^2=2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2=3\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) La masa relativista de cada protón la podemos obtener a partir de la energía:

$$E_{p+} = m_{p+} \cdot c^2 \rightarrow m_{p+} = \frac{E_{p+}}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{\left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2} = 3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

c) Para calcular la energía cinética de cada protón no se puede emplear la fórmula clásica, pues los protones se mueven a velocidades relativistas. Entonces se puede calcular la energía cinética como la energía relativista total menos la energía en reposo. Es decir:

$$E_C = m_{p+} \cdot c^2 - m_{0\,p+} \cdot c^2 = c^2 \cdot \left(m_{p+} - m_{0\,p+}\right) =$$
$$= \left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 \cdot \left(3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} - 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\right) = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

27. La energía del Sol llega a la Tierra con una potencia de 1,4 kW/m². Si la Tierra está a 1,5 · 10¹¹ m del Sol, calcula la masa que pierde diariamente el Sol.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Simplemente hay que convertir la energía perdida por el Sol en la masa equivalente usando la fórmula de Einstein. Como el dato nos indica la potencia, para calcular la energía queda:

$$1{,}4\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1{,}4\ \frac{\text{J/s}}{\text{m}^2}$$

Con el dato de la distancia Sol-Tierra podemos calcular la potencia total que llega a la Tierra multiplicando por la superficie de una esfera con radio igual a la distancia Tierra-Sol:

$$1{,}4\ \frac{\text{W}}{\cancel{\text{m}^2}} \cdot 4\pi \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^{11}\ \cancel{\text{m}}\right)^2 = 3{,}96 \cdot 10^{23}\ \text{W} = 3{,}96 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Ahora multiplicamos por los segundos que tiene un día:

$$3{,}96 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{J}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \text{día}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}42 \cdot 10^{28}\ \frac{\text{J}}{\text{día}}$$

Ahora calculamos la masa equivalente:

$$E = m \cdot c^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}42 \cdot 10^{28}\ \frac{\text{J}}{\text{día}}}{\left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2} = 3{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{kg/día}$$

Aunque parezca una masa muy grande, es una cantidad pequeña comparada con la masa total del Sol.

FÍSICA EN TU VIDA

1. Explica por qué existe una diferencia entre el tiempo medido por un satélite y un reloj en suelo firme al cabo de cinco años debido a la teoría general de la relatividad.

Porque los campos gravitatorios afectan al espacio-tiempo. En concreto, los relojes en las inmediaciones de un campo gravitatorio van más despacio. Por esto un reloj en un satélite, donde el campo gravitatorio es ligeramente inferior al campo gravitatorio en la superficie terrestre, marcará una hora ligeramente diferente.

2. Calcula el desfase anual introducido en los relojes de los satélites del sistema GPS debido al hecho de que se mueven a una velocidad de 14 000 km/h (3,87 km/s). ¿Es mayor o menor que el comentado en el texto?

Cuando en suelo firme ha transcurrido un año. En un satélite con cierta velocidad el tiempo será ligeramente menor.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \Delta t' = 1\text{ año}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3870\text{ m/s}}{3\cdot 10^8\text{ m/s}}\right)^2} = 0{,}9999999999167\text{ años} = 31557599{,}9974\text{ s}$$

En un año hay 31 557 600 s. Es decir, hay una diferencia de 26 ms al año. Menor que la que se indica en el texto, pues aquí no se han tenido en cuenta los efectos predichos por la relatividad general.

3. El sistema de navegación Galileo, impulsado por muchos países europeos, ha tenido un coste de varios miles de millones de euros.

a) ¿Te parece bien gastar este dinero teniendo en cuenta que ya existe un sistema, el GPS, que ofrece un servicio parecido?

b) ¿Qué ventajas crees que aporta el sistema Galileo, de carácter civil, frente al sistema GPS estadounidense, de carácter militar?

a) Respuesta personal.

b) Las ventajas de un sistema civil es que no se desactivaría en tiempos de conflictos armados, como ya ha ocurrido en alguna ocasión con el sistema GPS.