3 MAGNITUDES CINEMÁTICAS

3.1. POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA

1. ¿Puede estar un cuerpo en reposo y en movimiento a la vez? Explícalo ayudándote con un ejemplo.

Sí; depende del sistema de referencia respecto al cual midamos. Si viajamos en un tren, por ejemplo, otro pasajero que viaja sentado junto a nosotros se encontrará en reposo respecto a nuestro sistema de referencia, y en movimiento respecto a otra persona que se encuentra fija en el suelo fuera del tren.

2. Cita tres movimientos, al menos, en los que la trayectoria sea circular.

— El movimiento de los neumáticos en un coche.

— El movimiento del tambor de una lavadora.

— El movimiento que describen las aspas de un ventilador.

3. ¿Qué trayectoria describe un cuerpo cuando cae hacia el suelo?

El cuerpo, cuando cae, describe una trayectoria rectilínea. Se desplaza en línea recta, desde la posición inicial hasta que llega al suelo.

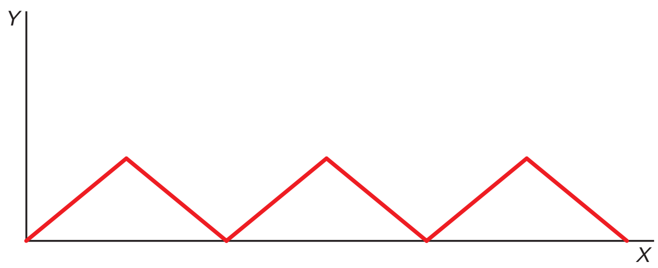
Se puede comentar a los estudiantes que esto es así porque el cuerpo es atraído por la Tierra, hacia su centro, es decir, en una trayectoria radial y, por tanto, perpendicular a la superficie de la Tierra.

4. ¿Qué movimiento describe un niño cuando se mueve sobre un tiovivo? Supón que va sentado en un caballito que se mueve verticalmente arriba y abajo. Haz un dibujo aclaratorio.

Visto desde arriba, el niño describe un movimiento circular. Si nos situamos en el tiovivo, al lado del niño, este realiza un movimiento de traslación de arriba abajo y de abajo arriba, periódicamente.

Si lo observamos desde el suelo, fuera del tiovivo, describe un movimiento compuesto: circular y de traslación.

Si representamos este movimiento en el plano del papel, obtenemos la siguiente gráfica:



5. ¿Qué desplazamiento realizas al rodear por completo una mesa? ¿Qué distancia recorres al hacerlo?

El desplazamiento que realizamos es nulo, pues al final nos encontramos en el punto de partida. Nuestra posición no varía respecto a la posición de salida. Un corredor de maratón, que llega al mismo punto en el estadio del que partió, tampoco se desplaza. Sin embargo, en el primer caso, la distancia recorrida es algo más que el perímetro de la mesa, y en el segundo, ¡más de 42 kilómetros!

3.2. VELOCIDAD

1. Calcula la velocidad con que se traslada la Luna en su órbita circular alrededor de la Tierra. Se sabe que la Luna dista 384 000 km de la Tierra y tarda 28 días en dar una vuelta completa. Considera que la trayectoria que describe es circular.

Para obtener la velocidad de traslación de la Luna, necesitamos conocer la distancia que recorre en un intervalo de tiempo. Teniendo en cuenta la distancia Tierra-Luna, en una vuelta completa recorre la siguiente distancia:

$$\Delta r = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 384 \cdot 10^6 = 2{,}41 \cdot 10^9 \text{ m}$$

El tiempo que emplea, en unidades del S.I., es:

$$\Delta t = 28 \text{ días} = 28 \text{ días} \cdot 86\,400 \ \frac{\text{s}}{\text{día}} = 2\,419\,200 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de traslación de la Luna es:

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{2{,}41 \cdot 10^9}{2\,419\,200} = 997{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Un nadador tarda 10 minutos en recorrer una distancia de 800 metros. Calcula la diferencia que existe entre su velocidad media y la de un competidor suyo que tarda 10 segundos más en recorrer la misma distancia.

La velocidad media del primer nadador es:

$$v_1 = \frac{\Delta r}{\Delta t_1} \rightarrow v_1 = \frac{800}{600} = 1{,}33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y la del segundo nadador:

$$v_2 = \frac{\Delta r}{\Delta t_2} \rightarrow v_2 = \frac{800}{600 + 10} = 1{,}31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la diferencia entre sus velocidades medias resulta:

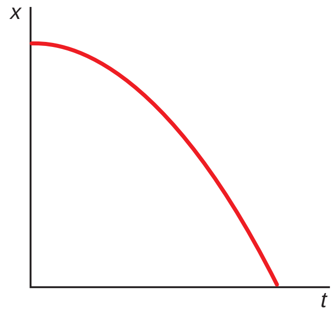
$$\Delta v = v_1 - v_2 = 0{,}02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3.3. VELOCIDAD Y GRÁFICOS POSICIÓN-TIEMPO

1. ¿Cómo es el movimiento de caída de un cuerpo? Dibuja el gráfico posición-tiempo que corresponde a este tipo de movimiento.

Es un movimiento vertical hacia la superficie de la Tierra, en el que la velocidad es variable, y la aceleración, constante.

Al representar la posición de un objeto que se mueve con caída libre en un gráfico posición-tiempo, obtenemos una parábola:



2. Diseña una experiencia que permita estudiar el movimiento de caída de un cuerpo.

Para estudiar la caída de un cuerpo, podemos utilizar un plano inclinado. El proceso que se debe seguir puede ser el siguiente:

- En el plano, medimos distancias iguales y las señalamos con alguna marca (cinta aislante).
- Dejamos rodar una bola por el plano inclinado y medimos el tiempo que tarda en recorrer la distancia que separa dos marcas.
- Con esa información, podemos obtener la velocidad media con que se mueve la bola en ese tramo.
- Una vez conocida la velocidad media en cada intervalo y el tiempo que tarda en recorrerlo, estamos en condiciones de calcular la aceleración media del movimiento. Para ello, basta con aplicar las expresiones analíticas que veremos en el epígrafe 3.5. del libro del alumnado.

El resultado de la experiencia es el siguiente:

- La velocidad varía regularmente en cada tramo, aumentando a medida que nos alejamos del punto del que se deja caer el objeto.
- La aceleración se mantiene constante en todos los tramos. El movimiento es un m.r.u.a.

3. Un móvil describe un movimiento rectilíneo del que se tiene la siguiente información:

t **(min)**	0	2	4	6	8	10
r **(km)**	20	23,2	26,4	30,8	30,8	32

Calcula la velocidad media del móvil en cada intervalo y representa, en función del tiempo, estas velocidades medias.

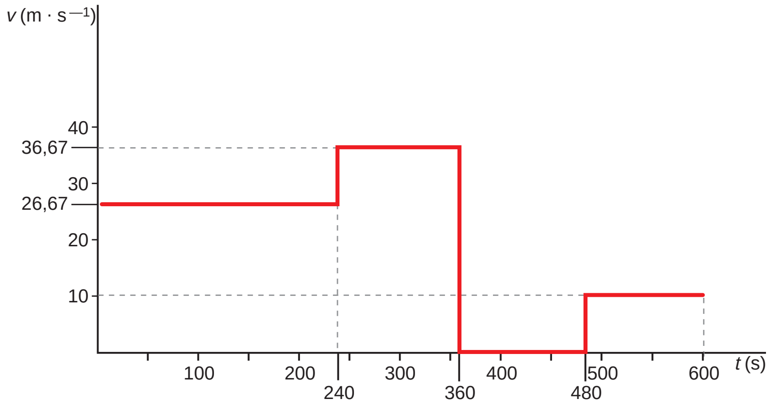
Para obtener la velocidad media en cada intervalo, calculamos el cociente de la distancia que recorre el móvil en dicho intervalo de tiempo:

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Al realizar los cálculos, obtenemos los siguientes valores:

Intervalo (s)	Distancia recorrida (m)	v (m · s^{-1})
0 – 120	3 200	26,67
120 – 240	3 200	26,67
240 – 360	4 400	36,67
360 – 480	0	0
480 – 600	1 200	10

Con estos valores de la velocidad media, construimos la siguiente gráfica, que indica cómo varía la velocidad media con el tiempo:



4. Un automóvil circula por una carretera rectilínea uniforme a 120 km/h, cuando el límite está en 90 km/h. Al pasar junto a un policía de tráfico, este percibe la infracción y, al cabo de diez segundos, sale en su persecución. Si transcurridos dos minutos le alcanza:

a) ¿Qué distancia recorre el policía durante la persecución?

b) ¿Con qué velocidad media se desplaza?

c) Representa gráficamente los dos movimientos.

En primer lugar, expresamos las magnitudes que intervienen en el ejercicio en unidades del S.I.:

$$v_{automóvil} = 120\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 33{,}33\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t_1 = 10\ \text{s}$$

$$t_2 = 2\ \text{min} = 120\ \text{s}$$

a) La distancia que recorre el policía es la misma que la que recorre el automóvil en el tiempo que transcurre desde que pasa por la posición del policía hasta que este le alcanza:

$$\Delta r_{policía} = v_{automóvil} \cdot (t_1 + t_2)$$

$$\Delta r_{policía} = 33{,}33 \cdot (10 + 120) = 4\,333 \text{ m}$$

b) Para calcular la velocidad media con que se desplaza el policía, debemos tener en cuenta solo el tiempo que dura su movimiento:

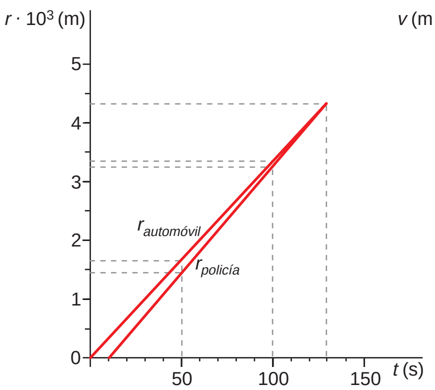
$$v_{policía} = \frac{\Delta r_{policía}}{t_2} \rightarrow v_{policía} = \frac{4\,333}{120} = 36{,}11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

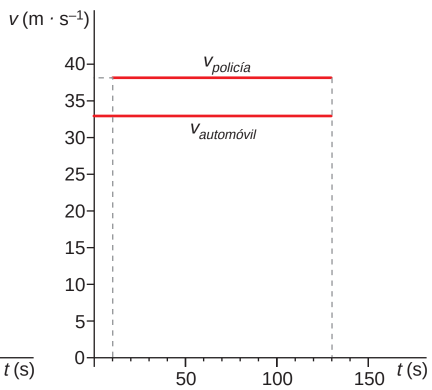
$$v_{policía} = 36{,}11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Para representar la posición que ocupa cada uno de ellos en función del tiempo, calculamos el valor de la posición para algunos valores del tiempo, obteniendo los valores:

t (s)	50	100	130
$r_{automóvil} = v_{automóvil} \cdot t$ (m)	1 667	3 333	4 333
$r_{policía} = v_{policía} \cdot (t - 10)$ (m)	1 444	3 250	4 333

Las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo que resultan son las siguientes:





5. Cita tres movimientos en los que la velocidad varíe. ¿En alguno de esos movimientos cambia la velocidad de modo regular?

— El instante en que un ciclista arranca en una contrarreloj.

— El movimiento de una piedra que cae por la ladera de una montaña.

— El despegue de una nave espacial.

Lo más probable es que en ninguno de ellos varíe la velocidad de modo regular, ya que se trata de movimientos reales, en los que intervienen múltiples factores. El movimiento uniforme y el uniformemente acelerado son dos modelos de comprensión de la realidad que, en sentido estricto, se dan muy pocas veces, aunque en muchas ocasiones es posible aproximar la realidad a estos modelos.

Esta es una buena ocasión para hacer reflexionar a los estudiantes sobre el significado que tiene en física la idea de "modelo" y lo útil que resulta dicho concepto, a pesar de que el modelo es, generalmente, mucho más simple que la realidad que intenta explicar.

6. ¿Cómo podríamos aminorar la velocidad con que cae un objeto dejado en libertad?

Para "aminorar" la aceleración de caída, podemos utilizar, al igual que hizo Galileo, un plano inclinado por el que podemos dejar que se deslice o que ruede un objeto. De ese modo, se consigue que, en cada instante, la velocidad con que se desplaza el objeto sobre el plano sea menor que la velocidad de caída vertical.

3.4. DISTANCIA RECORRIDA Y GRÁFICOS VELOCIDAD-TIEMPO

1. Calcula la velocidad y su módulo para un cuerpo que se mueve según la expresión:

$$\vec{r} = t \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j} - \frac{t^2}{2} \cdot \vec{k}$$

en ella, $\vec{r}$ se mide en metros y t, en segundos.

Para obtener la velocidad instantánea, calculamos la velocidad media entre dos instantes muy próximos, t y $t + \Delta t$:

$$v = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{(t + \Delta t) \cdot \vec{i} + 2 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{j} - [(t + \Delta t)^2/2] \cdot \vec{k} - (t \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j} - t^2/2 \cdot \vec{k})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{t \cdot \vec{i} + \Delta t \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j} + 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{j} - t^2/2 \cdot \vec{k} - 2 \cdot t \cdot \Delta t/2 \cdot \vec{k} - (\Delta t)^2/2 \cdot \vec{k} - t \cdot \vec{i} - 2 \cdot t \cdot \vec{j} + t^2/2 \cdot \vec{k}}{\Delta t} =$$

$$= \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - t \cdot \vec{k} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{k}$$

Como Δt tiende a cero, el vector que proporciona la velocidad instantánea es:

$$\vec{v} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - t \cdot \vec{k}$$

El módulo de la velocidad será, por tanto:

$$v = \sqrt{1 + 4 + t^2} = \sqrt{5 + t^2}$$

y se expresará en $m \cdot s^{-1}$ si la posición se mide en metros y el tiempo en segundos.

2. En la cuestión anterior, calcula el instante en el que el objeto que se mueve alcanza la velocidad de $3\ m \cdot s^{-1}$.

A partir de la expresión del módulo obtenida en la cuestión anterior, obtenemos el instante en que el objeto alcanza la velocidad de $3\ m \cdot s^{-1}$:

$$v(t) = 3 \rightarrow \sqrt{5 + t^2} = 3 \rightarrow 5 + t^2 = 9 \rightarrow t = 2\ s$$

La otra solución que se obtiene analíticamente, –2, carece de sentido físico.

3. La afirmación: un automóvil lleva una velocidad de 80 km/h, ¿es correcta? ¿Por qué?

Físicamente, es una afirmación incompleta, puesto que solo informa del módulo de la velocidad, y no de su dirección ni de su sentido.

3.5. ACELERACIÓN

1. Calcula la aceleración con que se mueve un objeto que parte del reposo y recorre una distancia en línea recta de 100 m en un tiempo de 10 s, acelerando de modo uniforme.

Al resolver la cuestión, hemos de tener en cuenta que, de acuerdo con el enunciado, el movimiento del objeto es rectilíneo y, como nos indican que el móvil acelera de modo uniforme, el valor de la aceleración será constante. Recuerda, además, que el curso pasado estudiaste las expresiones que proporcionan la velocidad y la posición en el m.r.u.a. (En la unidad 4 profundizaremos en el estudio de estas expresiones):

$$v = v_0 + a \cdot t \quad ; \quad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

En estas expresiones hemos supuesto que el móvil parte del origen del sistema de referencia ($s_0 = 0$), y empezamos a contar el tiempo en el instante en que se pone en movimiento ($t_0 = 0$). De acuerdo con ello, como el objeto parte del reposo ($v_0 = 0$), la aceleración con que se moverá es:

$$a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{2 \cdot 100}{10^2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. ¿Con qué velocidad se mueve el objeto del ejercicio anterior cuando han transcurrido dos segundos? ¿Qué tiempo debe transcurrir para que la velocidad sea de 10 m · s^{-1}?

Sustituyendo valores en la expresión que permite calcular la velocidad, y teniendo en cuenta la aceleración del objeto, obtenida en el ejercicio anterior, obtenemos de inmediato el resultado que nos piden:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \rightarrow \begin{cases} v(t = 2 \text{ s}) = 0 + 2 \cdot 2 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v(t) = 10 \rightarrow t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{10 - 0}{2} = 5 \text{ s} \end{cases}$$

3. Un móvil parte del reposo y se mueve con una aceleración constante de 5 m · s^{-2}. Calcula la velocidad media del período incluido entre el instante inicial y un instante veinte segundos posterior.

Para poder calcular la velocidad media en el intervalo [0 – 20]s, debemos obtener, en primer lugar, la posición que ocupará el móvil en el instante t = 20 s, suponiendo que parte del origen del sistema de referencia. Para ello, utilizaremos de nuevo la expresión de la posición en el m.r.u.a.

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$r = 0 + 0 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20^2 = 1\,000 \text{ m}$$

La velocidad media entre estos dos instantes resulta:

$$v_m = \frac{r - r_0}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{1\,000 - 0}{20} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. ¿Qué diferencia existe entre trayectoria y desplazamiento?

La trayectoria es la curva que describen los puntos posición de un móvil, mientras que el desplazamiento es la distancia que separa dos puntos de la trayectoria, medida sobre esta.

2. ¿Por qué decimos que la aceleración es una magnitud vectorial?

Porque la aceleración es la relación entre la variación de la velocidad, que es una magnitud vectorial, y el tiempo, que es escalar, dando como resultado otra magnitud vectorial.

3. En una carrera de velocidad, ¿qué corredor gana?

a) El que acelera más rápido.

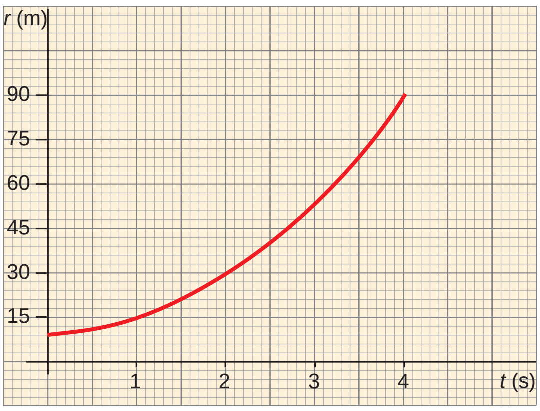
b) El que alcanza mayor velocidad media.

c) El que alcanza mayor velocidad instantánea.

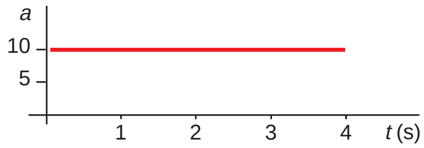
La respuesta correcta es la **b)**, porque el corredor que alcance mayor velocidad media empleará el menor tiempo en recorrer la distancia de la carrera:

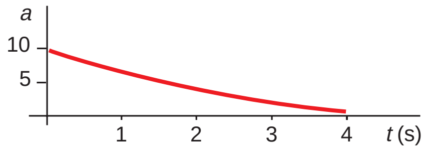
$$v'_m > v_m \rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta t'} > \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow \Delta t' < \Delta t$$

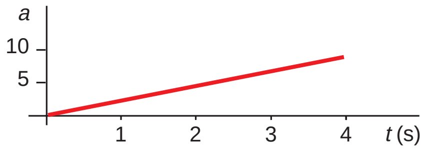
4. La gráfica que sigue muestra cómo varía la posición de un objeto que se mueve partiendo del reposo:

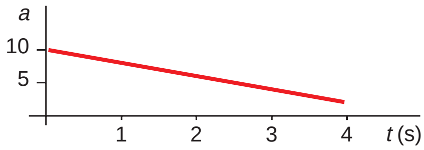


La gráfica que muestra la aceleración del móvil en ese período de tiempo debe ser:

a) 

b) 

c) 

d) 

Tan solo con ver la curva posición-tiempo debemos deducir que el movimiento es acelerado.

Observa que la tangente a la curva varía, dependiendo del punto en el que la tracemos. Ello significa que el valor de la velocidad varía; por tanto, la aceleración no puede ser nula.

Profundizando un poco más en la cuestión, nos podemos preguntar si la aceleración es constante a lo largo del movimiento. Para responder a esa pregunta, tomamos distintos instantes de tiempo y trazamos la tangente a la curva en esos instantes, calculando así la velocidad. Al analizar luego los valores obtenidos para la velocidad en cada instante, podremos obtener conclusiones.

Los resultados que obtenemos, calculados a partir de la gráfica que nos proporcionan, son los siguientes:

Δr (m)	15 – 10	30 – 15	55 – 30	90 – 55
Δt (s)	1 – 0	2 – 1	3 – 2	4 – 3
v (m · s^{-1})	$\frac{15-10}{1-0} = 5$	$\frac{30-15}{2-1} = 15$	$\frac{55-30}{3-2} = 25$	$\frac{90-55}{4-3} = 35$

Observa que la velocidad se incrementa de modo uniforme. Por tanto, la aceleración es constante. Para calcular el valor de la aceleración que corresponde a cada intervalo, podemos utilizar la expresión que permite calcular la aceleración media, con la que se obtiene, de acuerdo con la tabla anterior, un valor para la aceleración igual a 10 m · s^{-2}. Por tanto, el gráfico *a-t* que representa el movimiento es el gráfico **a).**

5. Representa en un diagrama posición-tiempo el gráfico que corresponde a cada una de las siguientes situaciones:

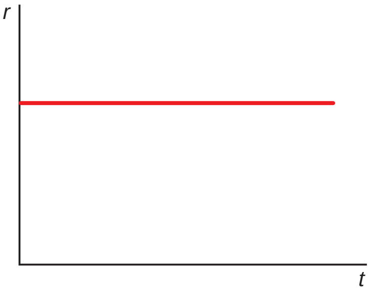
a) Móvil en reposo.

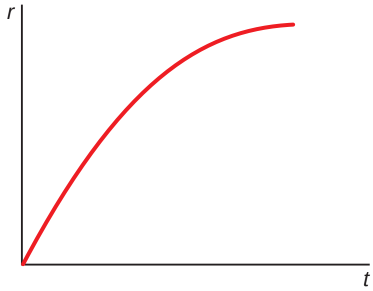
b) Móvil con velocidad positiva y aceleración negativa.

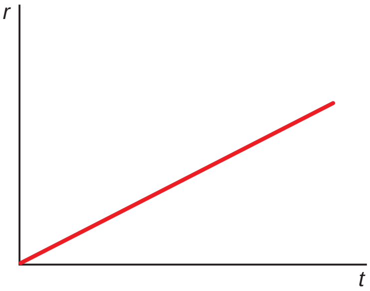
c) Móvil con velocidad constante.

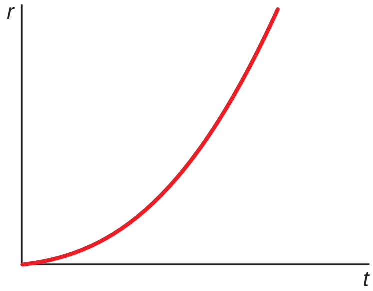
d) Móvil con velocidad positiva y aceleración positiva.

Las gráficas que corresponden a esas situaciones son las siguientes:

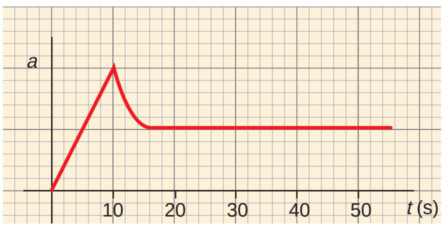
a) 

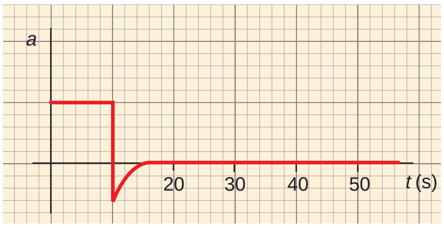
b) 

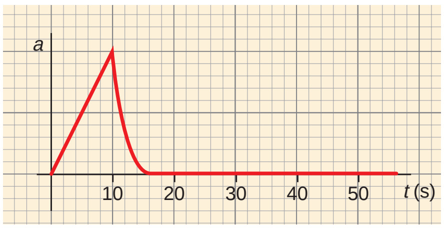
c) 

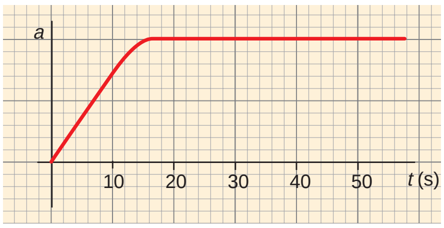
d) 

6. Un paracaidista salta desde un avión y cae libremente durante 10 segundos antes de abrir el paracaídas. ¿Cuál de los gráficos *a-t* que siguen representa mejor la aceleración vertical que actúa sobre él durante los cincuenta primeros segundos del movimiento?

a) 

b) 

c) 

d) 

Para contestar a esta pregunta, debemos estudiar con cierto detalle el movimiento.

Despreciando el efecto del aire durante los 10 primeros segundos (lo que puede hacerse en una primera aproximación), el paracaidista cae con aceleración constante, sometido a la acción de la gravedad. Por tanto, en un diagrama *a-t*, lo que representaremos será una línea horizontal (a = cte).

Pero ¿qué ocurre cuando se abre el paracaídas (t = 10)?

Observa que, lo que se produce, tras tirar de la anilla, es un frenado muy brusco, casi instantáneo.

Como sabes, un frenado es una aceleración negativa, ya que, seleccionado un intervalo de tiempo, la velocidad será menor en el instante final que en el inicial.

Pasado este instante, la aceleración sigue siendo negativa, aunque menor, ya que la velocidad con que se mueve el paracaidista se va aproximando a la velocidad de caída con el paracaídas abierto, velocidad que es menor, lo que hace que la aceleración siga siendo negativa, aunque cada vez menor, en valor absoluto.

Transcurrido cierto tiempo desde que abrió el paracaídas, el paracaidista se mueve con velocidad constante (la velocidad con que llegará al suelo), y su aceleración se anula (t = 16 s).

La gráfica que se corresponde con el movimiento que describe el paracaidista es, por tanto, la **b):**

- Existe un primer intervalo de tiempo [(0, 10) segundos] en el que la aceleración se mantiene constante e igual a la de caída libre.
- En el instante $t = 10$ se aprecia el brusco descenso que se produce en la aceleración (pasa a ser negativa), consecuencia del frenado que se produce al abrir el paracaídas.
- Finalmente, la aceleración de frenado va disminuyendo (en valor absoluto), hasta llegar a anularse, lo que significa que la velocidad de caída alcanza un valor constante que se mantiene hasta que el paracaidista llega al suelo.

Las gráficas **a), c)** y **d)** no reflejan lo sucedido. En las tres se observa que la aceleración aumenta en los diez primeros segundos, lo que está en contra del razonamiento seguido.

7. Traza cualitativamente en un diagrama *v-t* las gráficas que corresponden a los siguientes movimientos:

a) v_0 positiva y a_t nula.

b) v_0 positiva y a_t constante positiva.

c) v_0 negativa y a_t constante negativa.

a) v_0 positiva y a_t nula:

Al ser $a_t = 0$, el módulo de la velocidad no experimenta cambios y, por tanto, al representar la velocidad en el diagrama v-t, obtenemos una recta paralela al eje de abscisas ($v = v_0$ = cte).

b) v_0 positiva y a_t constante positiva:

En este caso, al ser la aceleración constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Esta expresión corresponde a una recta de pendiente positiva a y ordenada en el origen v_0.

c) v_0 negativa y a_t constante negativa:

La representación gráfica también es una recta de pendiente negativa, con ordenada en el origen $-v_0$ en este caso, que tiene por ecuación:

$$v = -v_0 - a \cdot t$$

8. **Si dos objetos experimentan el mismo desplazamiento en el mismo tiempo, podemos afirmar que poseen la misma:**

a) Velocidad final.

b) Velocidad inicial.

c) Aceleración.

d) Velocidad media.

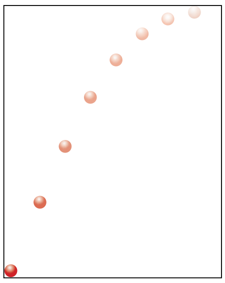
Lo que indica el enunciado tan solo es posible si los dos objetos se mueven con la misma velocidad media. Recuerda que la velocidad media es la relación que existe entre el cambio de posición de un cuerpo, caracterizado por el vector desplazamiento, y el tiempo que transcurre hasta que se produce dicho cambio. La respuesta correcta es, de acuerdo con esta definición, la **d)**.

9. **Una bola está suspendida mediante un electroimán del techo de un vagón de tren, que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 2 m · s^{-1}.**

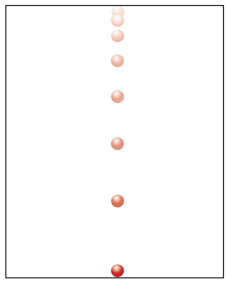
El vagón se ilumina con luz de flas y se toma una foto de la bola al caer al suelo del vagón. La cámara también se mueve hacia la derecha, siendo su velocidad de 2 m · s^{-1}.

La fotografía que se obtiene es:

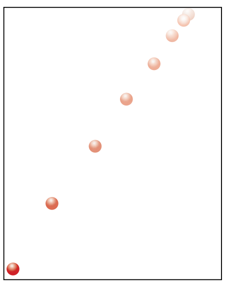
a)



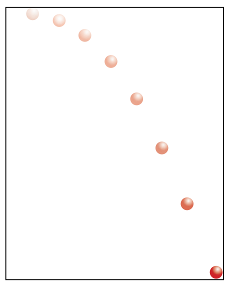
b)



c)



d)



La cámara está en reposo respecto al vagón. Por tanto, para un observador que acompaña a la cámara en su movimiento, el objeto no posee componente horizontal de la velocidad y, entonces, se encuentra en reposo antes de que el electroimán lo suelte.

Dicho con otras palabras: si un objeto se mueve en la misma dirección y sentido que otro y con la misma rapidez, no existirá un movimiento relativo entre ambos, pues ninguno de los dos recorre una distancia mayor que el otro (para ello tendría que ir más deprisa). Por tanto, si no se modifica la posición relativa de uno respecto al otro, la velocidad horizontal (en ese sistema de referencia) será nula.

Piensa, por ejemplo, que puedes ir hablando con otra persona mientras caminas y, aunque los dos os estáis moviendo, ninguno ve que el otro escape, es decir, ninguno "lleva velocidad" respecto al otro.

Aclarado esto, lo que registrará la cámara (situada dentro del vagón) es tan solo **un objeto cayendo verticalmente, en línea recta,** igual que veríamos nosotros una pelota dejada caer desde lo alto de la azotea de casa y que observamos pasar por delante de nuestra ventana. Por tanto, la gráfica que representa este movimiento es la gráfica **b).**

10. La ecuación de dimensiones de la aceleración es:

a) $L \cdot T^{-2}$ **b)** $L^2 \cdot T^{-2}$ **c)** $L \cdot T^2$ **d)** $L^{-1} \cdot T^2$

A partir de la definición de la aceleración:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow [a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = \frac{L \cdot T^{-1}}{T} = L \cdot T^{-2}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **a)**.

11. Indica cómo son la trayectoria y la velocidad de un móvil cuyas componentes intrínsecas de la aceleración son nulas.

Analizamos cada una de las componentes intrínsecas de la aceleración:

• Componente tangencial nula:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow v = \text{cte}$$

Indica que se trata de un movimiento uniforme.

• Componente normal nula:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = 0 \rightarrow R = \infty$$

Indica que se trata de un movimiento rectilíneo.

Por tanto, se trata de un movimiento rectilíneo uniforme.

12. Del párrafo que sigue a continuación, coloca en la tabla las palabras que sean magnitudes físicas y las que sean unidades. Pon al lado de cada magnitud su unidad, caso de que ambas aparezcan en el texto.

"Este automóvil puede alcanzar una velocidad de 180 km/h. Sin embargo, su principal defecto es la aceleración, que no llega a 4 km/h². Por otra parte, el motor tiene un consumo reducido, unos 6 litros cada 100 km.

Otro dato de interés es que puede recorrer una distancia de 1 200 km sin repostar, lo que da una idea de la gran autonomía de este vehículo".

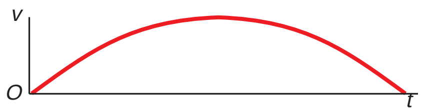
Magnitudes	Unidades

Después de leer el párrafo, las magnitudes, con sus correspondientes unidades, que encontramos en el texto, son las siguientes:

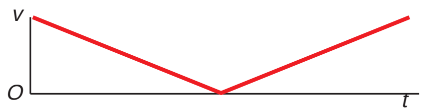
Magnitudes	Unidades
Velocidad	km/h
Aceleración	km/h^2
Distancia	km
Consumo	l/100 km

13. **¿Cuál de los gráficos muestra correctamente la relación que existe entre el módulo de la velocidad de una bola lanzada verticalmente hacia arriba y el tiempo que dura el movimiento?**

a)

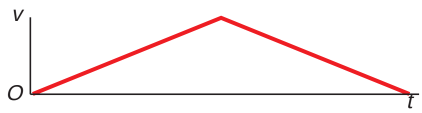


b)



c)

d)



En el instante en que lanzamos la bola hacia arriba, su velocidad es máxima.

A partir del instante en que sale de nuestras manos, la bola se ve sometida a una aceleración de frenado constante, ya que la aceleración de la gravedad atrae los cuerpos hacia el suelo y, por tanto, en sentido opuesto al movimiento de la bola.

Por tanto, la velocidad con que esta se mueve irá disminuyendo linealmente, hasta que se anule. En ese momento se invertirá el sentido del movimiento y, sometida a la misma aceleración constante (gravedad), su velocidad irá aumentando en valor absoluto de forma lineal, siendo máxima de nuevo cuando retorne a nuestras manos. Por tanto, el gráfico que expresa la evolución que hemos descrito es el gráfico **b).**

14. Al hablar del vector aceleración hemos visto un nuevo concepto, el de componentes intrínsecas. ¿Por qué no hablamos de componentes intrínsecas del vector velocidad?

Cuando definimos la velocidad instantánea dijimos que su “dirección es tangente a la trayectoria, y su sentido, el de avance del movimiento”. Partiendo de esa definición, resulta innecesario definir las componentes intrínsecas de la velocidad, pues su dirección y sentido siempre están definidos con claridad, en relación con la propia trayectoria.

Sin embargo, cuando hablamos de la aceleración sí lo hacemos, pues la dirección de la aceleración no está referida, necesariamente, a la trayectoria: el vector aceleración no posee una dirección única respecto al movimiento. Por eso utilizamos las direcciones tangencial y normal a la trayectoria, en el punto donde se encuentra el móvil en cada caso, para definir con precisión la dirección, el sentido y el valor del vector aceleración.

15. ¿Es posible que, en un instante dado, un móvil posea velocidad y aceleración, de tal modo que sus módulos y direcciones sean iguales y sus sentidos opuestos? Razona, si es posible, cuándo se da el caso.

Esta coincidencia puede darse, por ejemplo, cuando un objeto que se mueve con movimiento rectilíneo, frena. Veamos con detalle la razón de que sea así.

En primer lugar, es evidente que tan solo pueden coincidir en dirección la aceleración y la velocidad si el movimiento es rectilíneo.

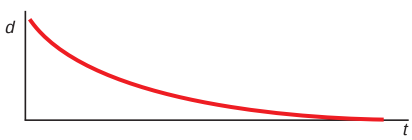
En un movimiento que no sea rectilíneo, la velocidad será tangente a la trayectoria (siempre lo es), pero la aceleración tendrá una componente tangencial y otra normal, siendo esta última perpendicular a la trayectoria. Por tanto, tan solo será tangente la aceleración tangencial, pero no la aceleración total, que es la suma vectorial de la aceleración tangencial y la normal.

Por otra parte, los sentidos de la velocidad y de la aceleración son opuestos, por ejemplo, en un proceso de frenado, esto es, cuando un cuerpo avanza rectilíneamente con cierta velocidad (velocidad positiva) y frena (aceleración negativa).

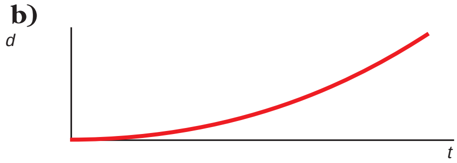
En el ejemplo que se indica puede ocurrir que el módulo de la aceleración de frenado coincida con el de la velocidad. Cuando esto suceda, se cumplirán las tres condiciones que nos indica el enunciado.

16. Se lanza un carrito por una mesa horizontal, dándole un impulso inicial y dejándolo posteriormente en libertad. ¿Cuál de los gráficos que siguen representa el movimiento del carrito, si la distancia se mide a partir del punto desde el que se lanza?

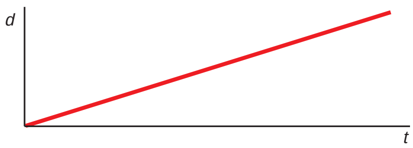
a)



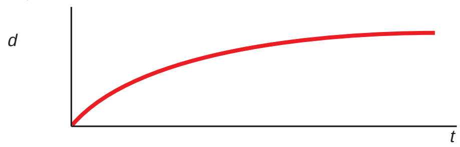
b)



c)



d)



En principio, parece claro que la gráfica será creciente, puesto que, una vez impulsado, el carrito recorrerá cada vez más espacio, a medida que avance el tiempo.

Sin embargo, en los primeros instantes la distancia recorrida será mayor, ya que el carrito va deteniendo poco a poco su movimiento, debido a la acción de las fuerzas de rozamiento.

Ello significa que en los primeros instantes la velocidad instantánea es mayor, disminuyendo esta a medida que transcurre el tiempo. Por tanto, es la gráfica **d)** la que nos muestra con claridad la evolución del movimiento.

EJERCICIOS

17 **La ecuación que permite calcular la posición en un movimiento rectilíneo, viene dada por:**

$$x = t^3 + 2 \cdot t - 6$$

En esta ecuación, la posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos. Calcula la distancia que recorre el móvil durante el tercer segundo.

El tercer segundo es el que va del instante $t_1 = 2$ s al instante $t_2 = 3$ s. En esos instantes, las posiciones correspondientes son:

$$x_1 = 2^3 + 2 \cdot 2 - 6 = 6 \text{ m} \quad ; \quad x_2 = 3^3 + 2 \cdot 3 - 6 = 27 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia recorrida en ese intervalo es:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 27 - 6 = 21 \text{ m}$$

18 **La ecuación que permite calcular la posición en un movimiento rectilíneo, viene dada por:**

$$x = 3 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 3$$

En esta expresión, la posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos. Calcula:

a) La distancia que recorre el móvil en los dos primeros segundos.

b) El valor de la velocidad, transcurridos tres segundos.

a) La distancia que recorre el móvil en los dos primeros segundos es la distancia que separa su posición en los instantes $t_1 = 0$ s y $t_2 = 2$ s:

$$x_1 = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3 \text{ m}$$

$$x_2 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 19 \text{ m}$$

Por tanto, el móvil se encuentra en la posición $x = 19$ m, y la distancia recorrida es:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 19 - 3 = 16 \text{ m}$$

NOTA: La solución proporcionada en el apéndice del libro de texto se corresponde con la posición del móvil al cabo de dos segundos, no con la distancia recorrida.

b) Para calcular la velocidad en el instante $t = 3$ s, calculamos la velocidad media entre dos instantes muy próximos, t y $t + \Delta t$:

$$v_m = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad ; \; v = v_m \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

Sustituyendo los valores $t + \Delta t$ y t en la expresión de la posición, obtenemos:

$$v_m = \frac{3 \cdot (t + \Delta t)^2 + 2 \cdot (t + \Delta t) + 3 - 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t - 3}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{3 \cdot t^2 + 6 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 3 - 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t - 3}{\Delta t} =$$

$$= 6 \cdot t + 3 \cdot \Delta t + 2$$

Si hacemos $\Delta t \rightarrow 0$, resulta:

$$v = (6 \cdot t + 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow v\ (3) = 6 \cdot 3 + 2 = 20 \text{ m/s}$$

NOTA: La resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

19 Las ecuaciones que permiten calcular la posición de sendos cuerpos que se mueven con movimiento rectilíneo son:

$$\boldsymbol{x_1 = 3 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 5}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 7 \cdot t - 2}$$

En esta expresión, la posición se expresa en metros si el tiempo lo hace en segundos.

¿En qué instante son iguales los valores de sus respectivas velocidades?

Para obtener las expresiones de las velocidades de ambos cuerpos, procedemos del mismo modo que en el ejercicio anterior:

$$v_{m1} = \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}$$

$$v_{m1} = \frac{3 \cdot (t + \Delta t)^2 + 4 \cdot (t + \Delta t) + 5 - 3 \cdot t^2 - 4 \cdot t - 5}{\Delta t} =$$

$$= \frac{3 \cdot t^2 + 6 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot (\Delta t)^2 + 4 \cdot t + 4 \cdot \Delta t + 5 - 3 \cdot t^2 - 4 \cdot t - 5}{\Delta t} =$$

$$= 6 \cdot t + 3 \cdot \Delta t + 4$$

Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, resulta:

$$v_1 = (6 \cdot t + 4) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Para el otro cuerpo, obtenemos:

$$v_{m2} = \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t}$$

$$v_{m2} = \frac{7 \cdot (t + \Delta t) - 2 - 7 \cdot t + 2}{\Delta t} = \frac{7 \cdot t + 7 \cdot \Delta t - 2 - 7 \cdot t + 2}{\Delta t} = 7 \text{ m/s}$$

En este caso:

$$v_2 = v_{m2} = 7 \text{ m/s}$$

Para obtener el instante en que se igualan las velocidades, igualamos ambas expresiones:

$$v_1 = v_2 \rightarrow 6 \cdot t + 4 = 7 \rightarrow t = \frac{7-4}{6} = 0{,}5 \text{ s}$$

Fe de erratas de la primera edición: hay un error en el cálculo del tiempo ofrecido en el apéndice de soluciones. El resultado correcto es el que aquí aparece.

20. Representa los gráficos *s-t* y *v-t* para un cuerpo que, partiendo del reposo y del origen, se desplaza a 8 m · s^{-1}, desde el instante inicial hasta que transcurren 20 s.

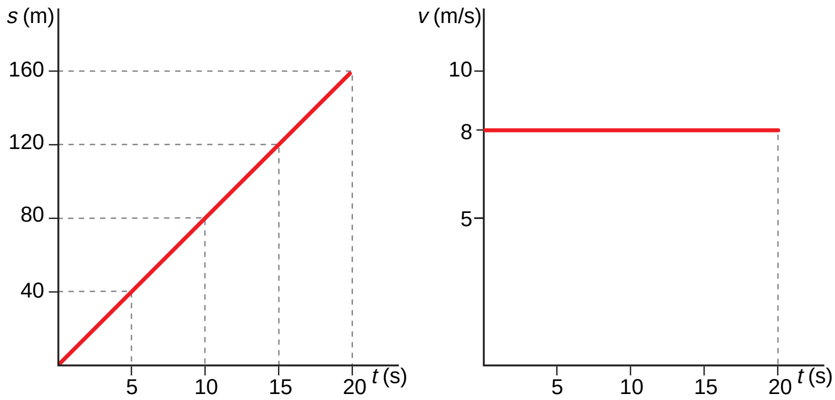
Para poder representar los gráficos que nos piden, necesitamos calcular la posición que ocupará el cuerpo en distintos instantes. Teniendo en cuenta que la velocidad es constante, el módulo de esta coincide con el módulo de la velocidad media:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta s = v \cdot \Delta t$$

Dando valores al tiempo en la expresión anterior, construimos la siguiente tabla:

t (s)	0	5	10	15	20
s (m)	0	40	80	120	160

Con estos valores, representamos las gráficas que nos piden:



NOTA: La resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

21. El movimiento de un ciclista se estudia durante tres cuartos de hora, a partir de cierto instante en el que su velocidad es constante e igual a 36 km/h. Transcurrido ese tiempo, el ciclista se detiene y descansa durante un cuarto de hora. Inicia el regreso y tarda 50 minutos en regresar al punto de partida. Dibuja los gráficos *s-t* y *v-t* que representan este desplazamiento.

Podemos distinguir tres fases distintas en el movimiento del ciclista:

1. Movimiento uniforme. El ciclista se mueve con velocidad constante:

$$v_1 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s} \ ; \ t_1 = 45 \text{ min} = 2\,700 \text{ s}$$

La distancia que recorre en este tiempo es:

$$r_1 = v_1 \cdot t_1 = 27 \cdot 10^3 \text{ m} = 27 \text{ km}$$

2. Reposo. El ciclista descansa durante un cuarto de hora:

$$v_2 = 0$$

$$t_2 = 15 \text{ min} = 900 \text{ s} \;\; ; \;\; t_1 + t_2 = 3\,600 \text{ s}$$

3. Movimiento uniforme. El ciclista recorre de nuevo la distancia de la primera fase, pero en sentido contrario, tardando 50 minutos en el trayecto:

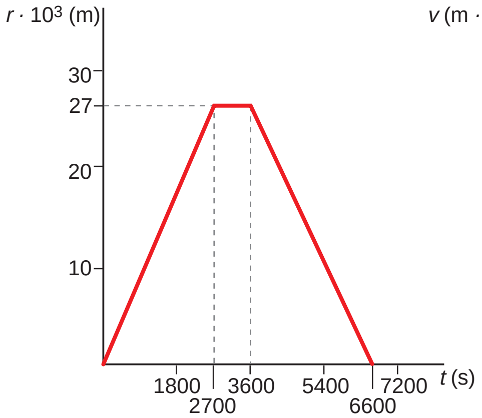
$$t_3 = 50 \text{ min} = 3\,000 \text{ s}$$

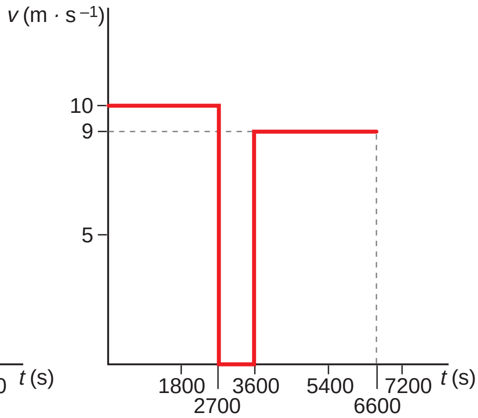
$$t_1 + t_2 + t_3 = 6\,600 \text{ s}$$

Por tanto, su velocidad en el regreso es:

$$v_3 = \frac{r_1}{t_3} = \frac{27 \cdot 10^3}{3\,000 \text{ s}} = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con estos valores, las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo que representan el movimiento del ciclista son:



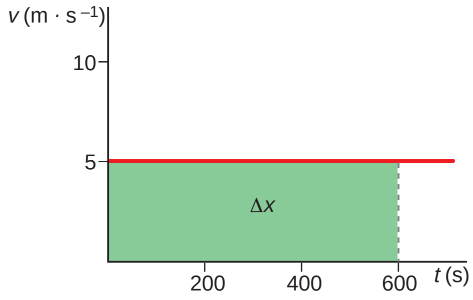


22. A 4 m del origen del sistema de referencia, un cuerpo se mueve con velocidad constante e igual a 18 km · h^{-1}. Con ayuda de los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo, calcula la posición en que se encuentra y la distancia que ha recorrido transcurridos 10 minutos.

En primer lugar, expresamos la velocidad del cuerpo en unidades del Sistema Internacional:

$$v = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con este valor de la velocidad, dibujamos la correspondiente gráfica v-t:



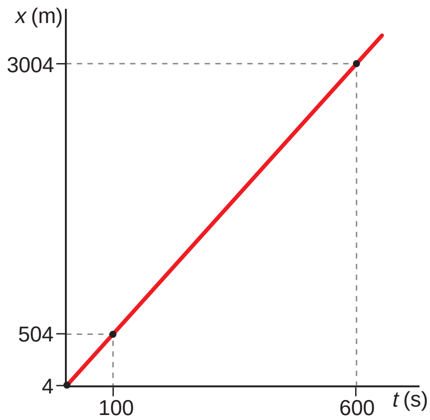
La distancia recorrida por el cuerpo coincide con el área encerrada por la gráfica *v*-*t* entre los instantes $t = 0$ s y $t = 600$ s. Como se aprecia en la figura anterior, esta área resulta:

$$\Delta x = 600 \cdot 5 = 3\,000 \text{ m}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que en el instante $t = 0$ s el cuerpo se encuentra en la posición $x_1 = 4$ m, en el instante $t = 600$ s su posición será:

$$x_2 = x_1 + \Delta x \longrightarrow x_2 = 4 + 3\,000 = 3\,004 \text{ m}$$

Con estos dos valores de la posición podemos representar la gráfica posición-tiempo:



23. En un movimiento sobre el plano *XY*, la ecuación que expresa dicho movimiento es:

$$\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} + (160 - 4 \cdot t^2) \cdot \vec{j}$$

a) Calcula la ecuación de la trayectoria.

b) Dibuja en papel milimetrado la ecuación de la trayectoria para un intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ s y $t = 7$ s.

a) Ecuación de la trayectoria:

La ecuación de la trayectoria es el lugar geométrico que describe la relación que existe, en cualquier instante, entre los componentes del vector posición de un objeto en movimiento. Para calcularla, procedemos del siguiente modo:

1. Obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = 2 \cdot t$$

$$y = 160 - 4 \cdot t^2$$

2. Y eliminamos la variable tiempo entre las dos ecuaciones. De ese modo, queda:

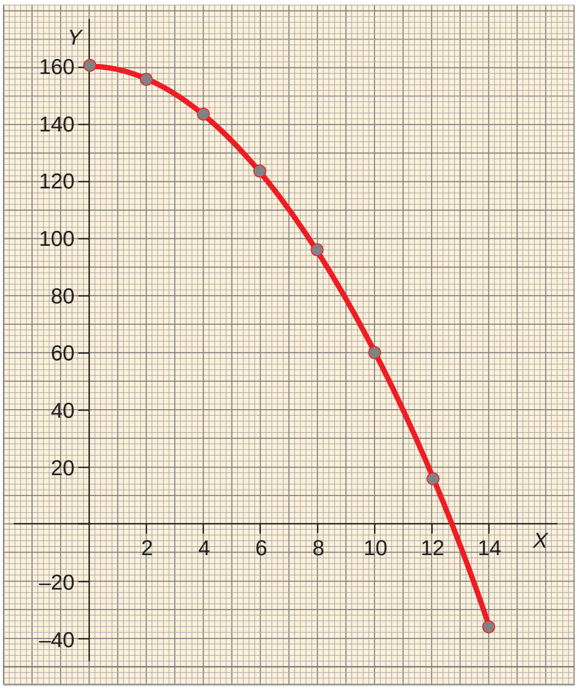
$$x = 2 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y = 160 - 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 160 - x^2$$

Para dibujar ahora la trayectoria en el intervalo $t = [0, 7]$, calculamos la posición (x, y) del punto en distintos instantes comprendidos en el intervalo. De ese modo, obtenemos la siguiente tabla de resultados:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	2	4	6	8	10	12	14
y	160	156	144	124	96	60	16	–36

b) Al representar los valores que hemos calculado para la posición, obtenemos para la trayectoria la siguiente gráfica:



NOTA: La resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

24 **El movimiento de una partícula viene dado por la expresión:**

$$\vec{r} = (2 \cdot t^2 + 2) \cdot \vec{i} + \left(\frac{8}{3} \cdot t^3 + 1\right) \cdot \vec{j} + (t + 3) \cdot \vec{k}$$

En esta expresión la posición aparece en metros si el tiempo se expresa en segundos.

Calcula:

a) El vector velocidad.

b) El módulo del vector velocidad.

c) El vector aceleración.

d) El módulo del vector aceleración.

a) Vector velocidad:

El cálculo del vector velocidad lo hacemos procediendo del mismo modo que en la actividad 1 del epígrafe 3.4. del libro del alumnado:

$$v = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{[2 \cdot (t + \Delta t)^2 + 2] \cdot \vec{i} + \left[\frac{8}{3} \cdot (t + \Delta t)^3 + 1\right] \cdot \vec{j} + (t + \Delta t + 3) \cdot \vec{k}}{\Delta t} +$$

$$+ \frac{-\left[(2 \cdot t^2 + 2) \cdot \vec{i} + \left(\frac{8}{3} \cdot t^3 + 1\right) \cdot \vec{j} + (t + 3) \cdot \vec{k}\right]}{\Delta t}$$

Operando y simplificando en la expresión anterior, llegamos a la siguiente:

$$\vec{v} = 4 \cdot t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{i} + 8 \cdot t^2 \cdot \vec{j} + 8 \cdot t \cdot \Delta t \cdot \vec{j} + \frac{8}{3} \cdot (\Delta t)^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$$

Cuando Δt tiende a cero, el vector velocidad es:

$$\vec{v} = (4 \cdot t \cdot \vec{i} + 8 \cdot t^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Módulo del vector velocidad:

El módulo del vector velocidad será, por tanto:

$$v = \sqrt{(4 \cdot t)^2 + (8 \cdot t^2)^2 + 1} = \sqrt{64 \cdot t^4 + 16 \cdot t^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{(8 \cdot t^2 + 1)^2} = (8 \cdot t^2 + 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Es importante que cuando realices una operación matemática compleja tengas en cuenta las simplificaciones que puedan existir: cuadrados perfectos, relaciones trigonométricas, etc.

Un buen ejemplo de lo que decimos lo tienes en el cálculo del módulo de la velocidad que acabamos de realizar: la existencia de un cuadrado perfecto nos permite eliminar la raíz cuadrada, lo que simplifica extraordinariamente los cálculos. De no haberlo hecho así, imagina la complejidad en que nos hubiésemos visto envueltos al calcular, por ejemplo, la aceleración tangencial.

Pensar antes de actuar ayuda a simplificar los problemas y permite evitar cálculos y expresiones incómodas con las que, a buen seguro, nos encontramos al actuar de modo mecánico.

c) Vector aceleración:

El cálculo del vector aceleración lo hacemos del siguiente modo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{i} + 8 \cdot (t + \Delta t)^2 \cdot \vec{j} + \vec{k} - (4 \cdot t \cdot \vec{i} + 8 \cdot t^2 \cdot \vec{j} + \vec{k})}{\Delta t}$$

Operando y simplificando, obtenemos:

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} + 16 \cdot t \cdot \vec{j} + 8 \cdot \Delta t \cdot \vec{j}$$

Y, cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} + 16 \cdot t \cdot \vec{j}$$

d) Módulo del vector aceleración:

El módulo del vector aceleración será, por tanto:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + (16 \cdot t)^2} = 4 \cdot \sqrt{(1 + 16 \cdot t^2)} \ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

NOTA: La resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

25 La posición de un punto, *M*, viene dada en cada instante por las ecuaciones:

$$x = 2 \cdot t \qquad y = t^2 + 3 \qquad z = 0$$

En dichas ecuaciones, la posición se expresa en metros si *t* se expresa en segundos.

a) Calcula las componentes y el módulo de la velocidad con que se mueve el punto *M* en función del tiempo.

b) Halla la ecuación que corresponde a la trayectoria que describe el punto *M*.

a) Calculamos las componentes de la velocidad del mismo modo en que lo hicimos en ejercicios anteriores; es decir, calculando la velocidad media de cada componente entre dos instantes muy próximos:

$$v_x = v_{xm} = \frac{2 \cdot (t + \Delta t) - 2 \cdot t}{\Delta t} = \frac{2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t - 2 \cdot t}{\Delta t} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_{ym} = \frac{(t + \Delta t)^2 + 3 - t^2 - 3}{\Delta t} = \frac{t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 + 3 - t^2 - 3}{\Delta t} = 2 \cdot t + \Delta t$$

Para $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v_y = 2 \cdot t \text{ m/s}$$

Y la componente en el eje Z es nula, puesto que la componente Z de la posición es constante.

$$v_z = 0$$

Por tanto, el vector velocidad es:

$$\vec{v} = (2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y su módulo:

$$v = \sqrt{2^2 + (2 \cdot t)^2} = 2 \cdot \sqrt{t^2 + 1} \text{ m/s}$$

b) La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando el tiempo en las ecuaciones de la posición:

$$x = 2 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{2}$$

Sustituyendo en las otras dos ecuaciones:

$$y = \frac{x^2}{4} + 3$$

La trayectoria es una parábola en el plano XY.

26. El vector que describe la posición en que se encuentra una partícula que se mueve es:

$$\vec{r} = t^2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot t \cdot \vec{j}$$

En esta expresión, *r* se mide en metros si *t* se mide en segundos.

Calcula, en el instante *t* = 2 s, las componentes intrínsecas de la aceleración a que está sometida la partícula.

Para obtener el vector aceleración, debemos calcular, en primer lugar, el vector velocidad. Para ello, calculamos la velocidad media de la partícula entre dos instantes muy próximos:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(t + \Delta t)^2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{j} - t^2 \cdot \vec{i} - 4 \cdot t \cdot \vec{j}}{\Delta t} = \Delta t \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$$

Cuando Δt tiende a cero, la velocidad resulta:

$$\vec{v} = (2 \cdot t \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

A partir de la expresión de la velocidad, obtenemos el vector aceleración:

$$\vec{a}_m = \frac{2 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 2 \cdot t \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}}{\Delta t} = 2 \cdot \vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Como este valor de la aceleración media es constante, la aceleración instantánea es igual a la aceleración media:

$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Para poder descomponer el vector aceleración en sus componentes intrínsecas (tangencial y normal al vector velocidad) debemos determinar previamente el ángulo, θ, que forman entre sí los vectores velocidad y aceleración en el instante que nos piden; $t = 2$ s.

Despejando en la expresión del producto escalar de dos vectores:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = |\vec{v}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v \cdot a}$$

donde:

$$\vec{v}(t = 2\ \text{s}) = 2 \cdot 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} = 4 \cdot (\vec{i} + \vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 4 \cdot \sqrt{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{i}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

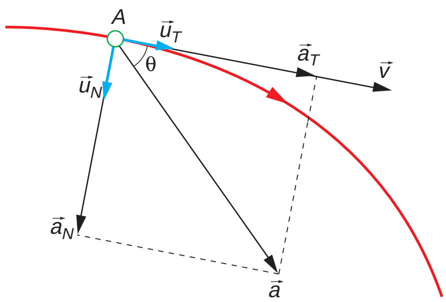
Por tanto, sustituyendo en la expresión del coseno del ángulo:

$$\cos\theta = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 0}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

Este resultado indica que el vector aceleración forma un ángulo de 45° con el vector velocidad. Conocido este ángulo, podemos calcular las componentes intrínsecas de la aceleración, como se aprecia en la figura:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T \cdot \vec{u}_T + a_N \cdot \vec{u}_N$$



donde:

$$a_T = a \cdot \cos\theta$$

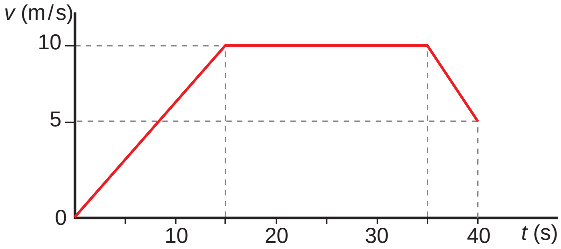
$$a_N = a \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Sustituyendo valores, obtenemos:

$$a_T = 2 \cdot \cos 45° = \sqrt{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_N = 2 \cdot \operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

27. El gráfico muestra cómo varía con el tiempo la velocidad con que se mueve una chica que viaja en bicicleta.

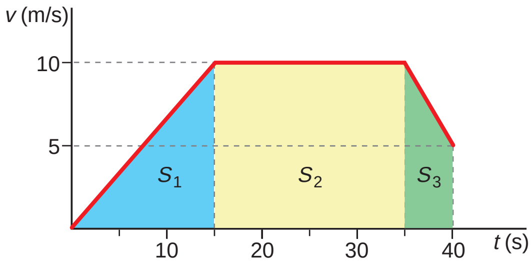


a) Calcula la velocidad media con que se mueve la ciclista durante los primeros 40 s de su movimiento.

b) Calcula la distancia total, en metros, que recorre durante ese intervalo de tiempo.

Por comodidad, resolvemos en primer lugar el segundo apartado:

b) A partir de la gráfica de la velocidad de la ciclista, calculamos la distancia recorrida como el área encerrada por la curva entre los instantes $t = 0$ s y $t = 40$ s; es decir, la suma de las superficies S_1, S_2 y S_3 representadas en la siguiente figura:



$$\Delta r = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 + (35 - 15) \cdot 10 + \frac{5 + 10}{2} \cdot (40 - 35) = 312{,}5 \text{ m}$$

a) La velocidad media la calculamos como el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo empleado en recorrerla:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{312{,}5}{40} = 7{,}81 \text{ m/s}$$

28 **El vector posición de una partícula en movimiento es:**

$$\vec{r} = t^3 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}$$

En esta expresión, la posición se expresa en metros si el tiempo se expresa en segundos. Calcula:

a) La ecuación de la trayectoria.

b) La velocidad y la aceleración en cualquier instante.

a) Ya hemos mencionado antes el significado físico que tiene la ecuación de la trayectoria (ejercicio 23). Por tanto, procedemos ahora a calcularla. Para ello:

1. Obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^3$$

$$y = t$$

2. Y eliminamos la variable tiempo entre las dos ecuaciones. De este modo, queda:

$$t = \sqrt[3]{x} \rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

b) El cálculo de la velocidad lo haremos como en ejercicios anteriores:

$$v = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{(t + \Delta t)^3 \cdot \vec{i} + (t + \Delta t) \cdot \vec{j} - [t^3 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}]}{\Delta t}$$

Operando y simplificando, llegamos a la siguiente expresión:

$$\vec{v} = 3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot t \cdot \Delta t \cdot \vec{i} + (\Delta t)^2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$$

que, cuando Δt tiende a cero, queda como:

$$\vec{v} = (3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + \vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Para calcular la aceleración instantánea, aplicamos el mismo método, ahora sobre el vector velocidad instantánea:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{3 \cdot (t + \Delta t)^2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - (3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + \vec{j})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{3 \cdot [t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] \cdot \vec{i} + \vec{j} - 3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} - \vec{j}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6 \cdot t \cdot \Delta t \cdot \vec{i} + 3 \cdot (\Delta t)^2 \cdot \vec{i}}{\Delta t} = 6 \cdot t \cdot \vec{i} + 3 \cdot \Delta t \cdot \vec{i}$$

Cuando Δt tiende a cero, la aceleración resulta:

$$\vec{a} = 6 \cdot t \cdot \vec{i}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

NOTA: La resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

29 Un móvil se desplaza sobre el plano *XY* tal como indican las ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 \cdot t^3 - \frac{1}{2} \cdot t^2 + 6$$

$$y = 6 \cdot t^2 + sen(2 \cdot t)$$

$$z = 0$$

En esta expresión, *x*, *y*, *z* se expresan en metros y *t*, en segundos.

a) Calcula la velocidad y la aceleración del móvil en cualquier instante.

b) Concreta el resultado para el instante *t* = 15 s.

a) La velocidad y la aceleración se calculan del mismo modo que en los ejercicios anteriores. En este caso, calcularemos cada componente por separado:

• Eje *X*:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v_x = \frac{3 \cdot (t + \Delta t)^3 - (t + \Delta t)^2/2 + 6 - [3 \cdot t^2 - t^2/2 + 6]}{\Delta t}$$

Operando y simplificando, llegamos a la siguiente expresión:

$$v_x = 9 \cdot t^2 + 9 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot (\Delta t)^2 - t - \frac{\Delta t}{2}$$

Finalmente, como Δt tiende a cero, la componente x de la velocidad queda como:

$$v_x = 9 \cdot t^2 - t$$

- Eje Y:

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$v_y = \frac{6 \cdot (t + \Delta t)^2 + sen[2 \cdot (t + \Delta t)] - [6 \cdot t^2 + sen(2 \cdot t)]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6 \cdot (t + \Delta t)^2 + sen(2 \cdot t + 2 \cdot \Delta t) - 6 \cdot t^2 - sen(2 \cdot t)}{\Delta t}$$

Si aplicamos al segundo sumando del numerador la fórmula que relaciona las razones trigonométricas del ángulo suma, obtenemos:

$$v_y = \frac{6 \cdot [t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] + sen(2 \cdot t) \cdot cos(2 \cdot t) + cos(2 \cdot \Delta t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t) - 6 \cdot t^2 - sen(2 \cdot t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{6 \cdot t^2 + 12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t) \cdot [cos(2 \cdot \Delta t) - 1] + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t) - 6 \cdot t^2}{\Delta t}$$

Haciendo ahora uso de la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t) \cdot [cos^2 \Delta t - sen^2 \Delta t - 1] + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t)}{\Delta t}$$

y teniendo en cuenta que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha - 1 = -sen^2\alpha$:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + sen(2 \cdot t) \cdot [-2 \cdot sen^2 \Delta t] + cos(2 \cdot t) \cdot sen(2 \cdot \Delta t)}{\Delta t}$$

A continuación, aplicamos la fórmula del seno del ángulo doble y operamos:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 - 2 \cdot sen(2 \cdot t) \cdot sen^2 \Delta t + 2 \cdot sen \Delta t \cdot cos \Delta t \cdot cos(2 \cdot t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot sen \Delta t \cdot [cos \Delta t \cdot cos(2 \cdot t) - sen \Delta t \cdot sen(2 \cdot t)]}{\Delta t}$$

Finalmente, aplicando la fórmula trigonométrica del coseno del ángulo suma y operando:

$$v_y = \frac{12 \cdot t \cdot \Delta t + 6 \cdot (\Delta t)^2 + 2 \cdot sen \Delta t \cdot cos(\Delta t + 2 \cdot t)}{\Delta t} =$$

$$= 12 \cdot t + 6 \cdot \Delta t + \frac{2 \cdot sen \Delta t}{\Delta t} \cdot cos(\Delta t + 2 \cdot t)$$

Para ángulos muy pequeños, el valor del seno del ángulo es aproximadamente igual al ángulo; es decir, cuando Δt tiende a cero, $sen \Delta t \simeq \Delta t$, y, por tanto:

$$\frac{sen \Delta t}{\Delta t} = 1 \quad \text{cuando} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

En consecuencia, el valor de la componente en el eje Y del vector velocidad es:

$$v_y = 12 \cdot t + 2 \cdot cos(2 \cdot t)$$

El vector velocidad es:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = (9 \cdot t^2 - t) \cdot \vec{i} + [12 \cdot t + 2 \cdot cos(2 \cdot t)] \cdot \vec{j}$$

siendo su módulo:

$$v = \sqrt{(9 \cdot t^2 - t)^2 + [12 \cdot t + 2 \cdot cos(2 \cdot t)]^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En este momento, sugerimos que se le indique funcionalmente al alumnado cómo se realizan las derivadas del seno y del coseno, sin que sea necesario entrar a analizar los aspectos formales de la derivación, que verán en Matemáticas.

De este modo, se puede comprobar la utilidad de este operador matemático, y darse cuenta del diferente grado de dificultad que entraña la resolución de un problema según el método que se aplique; en este caso, la diferencia entre el método incremental y el derivativo.

Derivando, por tanto, cada componente del vector velocidad, obtenemos el vector aceleración:

$$\vec{a} = (18 \cdot t - 1) \cdot \vec{i} + [12 - 4\, sen(2 \cdot t)] \cdot \vec{j}$$

siendo su módulo:

$$a = \sqrt{(18 \cdot t - 1)^2 + [12 - 4 \cdot sen(2 \cdot t)]^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) En el instante $t = 15$ s, el valor de la velocidad y la aceleración instantáneas son, respectivamente:

$$v(t = 15 \text{ s}) = \sqrt{(9 \cdot 15^2 - 15)^2 + [12 \cdot 15 + 2 \cdot cos(2 \cdot 15)]^2} = 2\,018 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a(t = 15 \text{ s}) = \sqrt{(18 \cdot 15 - 1)^2 + [12 - 4 \cdot sen(2 \cdot 15)]^2} = 269{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$