

## UNIDAD 12: APLICACIONES DE LA DINÁMICA

### CUESTIONES INICIALES-ACTIVIDADES PÁG. 269

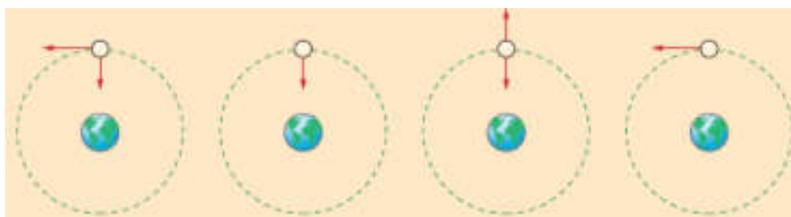
1. Encima de una mesa horizontal se deja un libro y un lápiz. Haz un esquema de las fuerzas que actúan sobre cada objeto y estima su módulo. ¿Será muy grande el módulo de la fuerza de rozamiento?

Las únicas fuerzas que actúan son el peso y la fuerza normal. Si no se aplica ninguna fuerza para desplazar a los objetos, entonces la fuerza de rozamiento es igual a cero.

2. Dos niñas se columpian en un balancín. La mayor está situada a una cierta distancia del punto de apoyo. ¿Dónde se colocará la menor, cuya masa es igual a la mitad de la de la mayor, para que la barra del balancín permanezca horizontal?

La niña menor se debe colocar a una distancia igual al doble de la de la mayor ( $2 \cdot d$ ), para que el producto de sus pesos por las respectivas distancias sea el mismo y, así, el columpio esté en equilibrio.

3. La Luna describe una trayectoria, alrededor de la Tierra, que se puede considerar circular y la recorre con rapidez constante. ¿Cuál de los siguientes esquemas crees que representa mejor las fuerzas que actúan sobre la Luna?



La única fuerza que actúa sobre la Luna es la atracción gravitatoria que aplica la Tierra. Por tanto, el esquema correcto es el segundo.

### ACTIVIDADES PROPUESTAS-PÁG. 271

1. Un objeto de 8 kg de masa se desliza por una superficie horizontal con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$ , por la acción de una fuerza de 40 N. Calcula el módulo de la fuerza de rozamiento al deslizamiento.

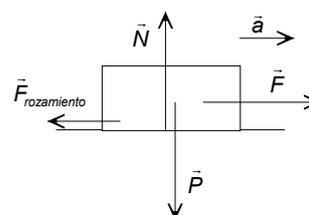
Sobre el objeto actúan su peso, la fuerza normal, la fuerza horizontal y la fuerza de rozamiento.

a) Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento, se tiene que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}; \vec{F} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}; F - F_{\text{rozamiento}} = m \cdot a$$

$$\text{Sustituyendo: } 40 \text{ N} - F_{\text{rozamiento}} = 8 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F_{\text{rozamiento}} = 16 \text{ N}$$

b) Cuando el objeto se desliza con velocidad constante, la fuerza resultante es igual a cero y la fuerza aplicada es igual a la fuerza de rozamiento.



$$\Sigma \vec{F} = 0; \vec{F} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = 0; F - F_{\text{rozamiento}} = 0 \Rightarrow F = F_{\text{rozamiento}} = 16 \text{ N}$$

### ACTIVIDADES PROPUESTAS-PÁG. 274

2. Escribe la expresión de la fuerza centrípeta en función de la velocidad angular de un objeto que recorre un movimiento circular uniforme.

Aplicando las relaciones:  $v = \omega \cdot R$ ;  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot v$ , se tiene:

$$F_n = m \cdot a_n = m \frac{v^2}{R} = m \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R = 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot R$$

### ACTIVIDADES PROPUESTAS-PÁG. 278

3. Un tornillo ofrece una resistencia a ser soltado de  $250 \text{ m} \cdot \text{N}$ . ¿Cuál es el módulo de la fuerza que se debe aplicar en el extremo de una llave de  $30 \text{ cm}$  de largo para soltarlo?

El momento de la fuerza aplicada respecto del eje del tornillo tiene que ser mayor que el momento de la fuerza resistente. Si se aplica la fuerza perpendicularmente al extremo de la llave, resulta que:

$$M_0 = r \cdot F; 250 \text{ m} \cdot \text{N} = 0,3 \text{ m} \cdot F \Rightarrow F = 833,3 \text{ N}$$

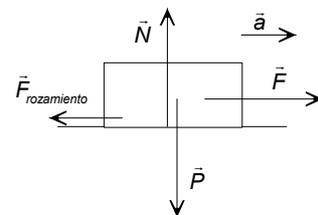
### ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 284

1. Al arrastrar un objeto por el suelo, ¿por qué es más fácil mantener su movimiento que iniciarlo?

Es más fácil mantener un objeto en movimiento que iniciarlo porque el coeficiente de rozamiento estático es mayor que el coeficiente de rozamiento dinámico.

2. Sobre una superficie horizontal está situado un objeto de  $20 \text{ kg}$  de masa y se observa que para ponerlo en movimiento debe actuar una fuerza de  $80 \text{ N}$ , mientras si el objeto está en movimiento solamente debe actuar una fuerza de  $40 \text{ N}$  para mantener la velocidad constante. Calcula los valores de los coeficientes de rozamiento estático y dinámico. Calcula la aceleración del movimiento cuando actúa una fuerza de  $100 \text{ N}$ . Si con el objeto en movimiento se abandona a su suerte, calcula la aceleración con la que se frena.

Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X la horizontal y el eje Y la vertical. Sobre el objeto actúan su peso, la fuerza normal, la fuerza aplicada y la fuerza de rozamiento estática o dinámica según si no se desliza o si se desliza.



a) El objeto está en equilibrio tanto al iniciar el movimiento como cuando no se desliza por efecto de la fuerza aplicada.

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N - P = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = 0; \vec{F} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = 0; F - F_{\text{rozamiento}} = 0; F = F_{\text{rozamiento}} \end{array} \right\} \Rightarrow F = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$$

El coeficiente de rozamiento estático se calcula con la fuerza necesaria para iniciar el movimiento.

$$F_{\text{iniciar el movimiento}} = \mu_{\text{estático}} \cdot m \cdot g; 80 \text{ N} = \mu_{\text{estático}} \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \mu_{\text{estático}} = 0,41$$

El coeficiente de rozamiento dinámico se calcula con la fuerza aplicada mantener la velocidad constante.

$$F_{\text{mantener velocidad}} = \mu_{\text{dinámico}} \cdot m \cdot g; 40 \text{ N} = \mu_{\text{dinámico}} \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \mu_{\text{dinámico}} = 0,2$$

b) Al aplicar una fuerza de 100 N el objeto está en movimiento y su aceleración es:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N - P = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot a; \vec{F} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot a; F - F_{\text{rozamiento}} = m \cdot a \end{aligned} \right\}$$

$$F = \mu_{\text{dinámico}} \cdot N + m \cdot a = \mu_{\text{dinámico}} \cdot m \cdot g + m \cdot a$$

$$\text{Sustituyendo: } 100 \text{ N} = 0,2 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 + 20 \text{ kg} \cdot a \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

c) Al abandonar el objeto a su suerte la fuerza de rozamiento lo frena.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N - P = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot a; \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot a; -F_{\text{rozamiento}} = m \cdot a \end{aligned} \right\} - \mu_{\text{dinámico}} \cdot N = m \cdot a; - \mu_{\text{dinámico}} \cdot g = a$$

$$\text{Sustituyendo: } a = - 0,2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = -1,96 \text{ m/s}^2$$

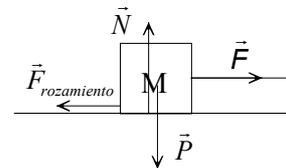
### 3. ¿En qué unidades se mide el coeficiente de rozamiento? ¿El coeficiente de rozamiento puede tener un valor mayor que la unidad?

El coeficiente de rozamiento no tiene dimensiones, ya que es la constante de proporcionalidad entre los módulos de dos fuerzas:  $F_{\text{rozamiento}} = \mu \cdot N$ .

El coeficiente de rozamiento puede tener cualquier valor positivo.

**4. Un objeto de 2 kg de masa está situado sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático es 0,5 y el coeficiente de rozamiento dinámico es 0,1. Calcula el módulo de la fuerza mínima que se debe aplicar para iniciar el movimiento y para mantenerlo con velocidad constante. Si el objeto está en movimiento, ¿con qué aceleración se deslizará al aplicar una fuerza, en el sentido del movimiento, de 15 N de módulo?**

Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X la horizontal y el eje Y la vertical. Sobre el objeto actúan su peso, la fuerza normal, la fuerza aplicada y la fuerza de rozamiento.



El objeto está en equilibrio tanto al iniciar el movimiento como cuando se desliza con velocidad constante.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N - P = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = 0; \vec{F} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = 0; F - F_{\text{rozamiento}} = 0; F = F_{\text{rozamiento}} = \mu \cdot N \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \mu \cdot m \cdot g$$

Para iniciar el movimiento hay que vencer la fuerza de rozamiento estático.

$$F = \mu_{\text{estático}} \cdot m \cdot g = 0,5 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 9,8 \text{ N}$$

Para mantener el movimiento hay que vencer la fuerza de rozamiento dinámico:

$$F = \mu \cdot m \cdot g = 0,1 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 1,96 \text{ N}$$

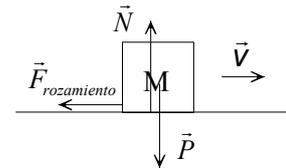
c) Aplicando la Segunda ley de Newton:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N - P = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}; \vec{F} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}; F - F_{\text{rozamiento}} = m \cdot a; F - \mu \cdot N = m \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

$$\text{Despejando: } a = \frac{F - \mu \cdot m \cdot g}{m} = \frac{15\text{N} - 0,1 \cdot 2\text{kg} \cdot 9,8\text{m/s}^2}{2\text{kg}} = 6,5\text{m/s}^2$$

**5. Un objeto de 200 g de masa se desliza por una superficie horizontal con una velocidad de 4 m/s. Si se detiene después de recorrer una distancia de 5 m, calcula el coeficiente de rozamiento entre las superficies que se deslizan.**

Las fuerzas que actúan sobre un objeto que se desliza por una superficie con rozamiento son: su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento es la que produce la aceleración necesaria para que el cuerpo se detenga. Se elige un sistema de referencia con el origen en el objeto en el instante de comenzar la observación, el eje X la superficie de deslizamiento y eje Y la vertical y se aplican las leyes de Newton:

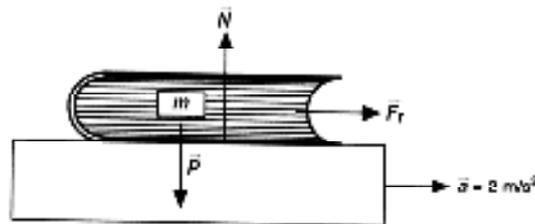


$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}; \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}; \mu \cdot N = m \cdot a \end{aligned} \right\} \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \mu \cdot g$$

La aceleración con que se frena el objeto es independiente de su masa. Aplicando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, y como la aceleración es negativa, se tiene:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \Delta x; 0 \text{ m/s} - (4 \text{ m/s})^2 = -2 \cdot \mu \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m} \Rightarrow \mu = 0,82$$

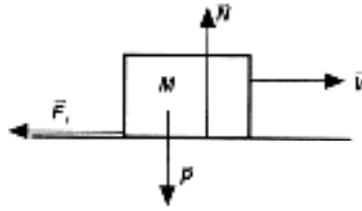
**6. En la repisa posterior de un coche descansa un libro de 250 g de masa. ¿Cuál debe ser el valor del coeficiente de rozamiento, entre el libro y la repisa, para que al arrancar el coche con una aceleración de 2 m/s<sup>2</sup> no se deslice?**



El libro es arrastrado gracias a la fuerza de rozamiento con la que actúa la superficie sobre él. Las otras fuerzas que actúan son su peso y la fuerza normal. Para que el objeto no se deslice debe poseer la misma aceleración que el coche. Se elige un sistema de referencia con el eje X la dirección del movimiento, la horizontal y el eje Y la vertical y se aplica la segunda ley de Newton:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}; \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a} \end{aligned} \right\} F_{\text{rozamiento}} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow \mu = \frac{a}{g} = \frac{2 \text{ m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2} = 0,2$$

7. Dos objetos contruidos con el mismo material y que tienen una masa de  $m$  y  $2m$ , se deslizan por una superficie horizontal con una velocidad de  $72 \text{ km/h}$ . Si el coeficiente de rozamiento con la superficie es  $\mu = 0,5$ , ¿Cuál recorre más distancia antes de detenerse? Calcula esas distancias.



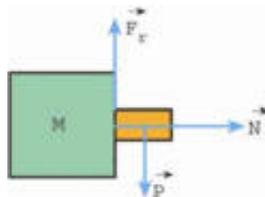
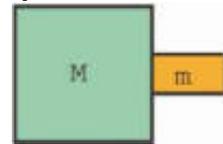
Las fuerzas que actúan sobre un objeto que se desliza por una superficie con rozamiento son: su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento es la que produce la aceleración necesaria para que el cuerpo se detenga. Se elige un sistema de referencia con el origen en el objeto en el instante de comenzar la observación, el eje X la superficie de deslizamiento y eje Y la vertical y se aplican las leyes de Newton:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}; \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}; \mu \cdot N = m \cdot a \end{aligned} \right\} \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \mu \cdot g$$

La aceleración con que se frenan los dos objetos es independiente de sus masas respectivas. Por tanto, emplean la misma distancia para detenerse. Aplicando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, y como la aceleración es negativa, se tiene:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot \Delta x; 0 \text{ m/s} - (20 \text{ m/s})^2 = -2 \cdot 0,5 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \Delta x \\ \Rightarrow \Delta x = 40 \text{ m}$$

8. La figura adjunta muestra a dos objetos de masas  $M$  y  $m$ , que se mueven conjuntamente por la acción de una fuerza de intensidad  $F$  y que actúa sobre el más voluminoso. Si el coeficiente de rozamiento entre las dos superficies de los objetos es igual a  $\mu$ , deduce la expresión de la aceleración con la que debe moverse el sistema para que el objeto más pequeño no caiga.



Las fuerzas que actúan sobre el objeto de masa  $m$  son: su peso, la fuerza de rozamiento que impide que caiga y la fuerza normal con la que actúa el objeto mayor. Se elige un sistema de referencia con el eje X la horizontal y el eje Y la vertical.

En el eje vertical el objeto está en equilibrio:

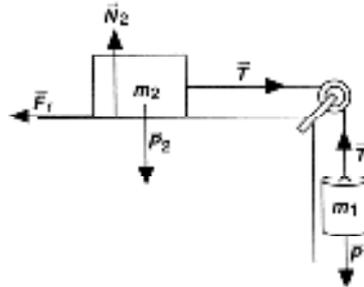
$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{F}_{\text{rozamiento}} + \vec{P} = 0 \Rightarrow F_{\text{rozamiento}} = P \\ F_{\text{rozamiento}} = \mu \cdot N \end{aligned} \right\} \mu \cdot N = P \Rightarrow N = \frac{m \cdot g}{\mu}$$

Aplicando la Segunda ley de Newton al eje horizontal:  $\Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a} \Rightarrow N = m \cdot a$

Igualando las dos ecuaciones en la que aparece la fuerza normal:

$$m \cdot a = \frac{m \cdot g}{\mu} \Rightarrow a = \frac{g}{\mu}$$

9. Un objeto de 20 kg de masa se encuentra sobre en una mesa horizontal con la que presenta un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,2$ . El objeto está unido mediante un hilo, que pasa por la garganta de una polea, a otro objeto que cuelga y de masa  $m$ . Calcula la masa  $m$  del objeto que cuelga para que: el sistema comience a deslizarse ¿Con qué aceleración se deslizará el sistema cuando  $m$  sea igual a 8 kg? Calcula la tensión del hilo en los dos casos.



Sobre el objeto que cuelga actúan: su peso y la tensión de la cuerda que lo sostiene. Sobre el colocado en la superficie horizontal actúan su peso, la fuerza normal, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento. Como la cuerda y polea son ideales, la tensión que actúa sobre los dos cuerpos es la misma y la aceleración con la que se mueven también. Para cada objeto se elige un sistema de referencia con el eje X la horizontal y el eje Y la vertical. Aplicando las leyes de la dinámica a los dos objetos considerados individualmente, se tiene:

Objeto apoyado sobre la superficie de la mesa:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N}_2 + \vec{P}_2 = 0; N_2 = P_2 = m_2 \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m_2 \cdot \vec{a}; \vec{T} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m_2 \cdot \vec{a}; T - F_{\text{rozamiento}} = m_2 \cdot a \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a; T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Objeto que cae:  $\Sigma \vec{F}_y = m_1 \cdot \vec{a}; \vec{T} + \vec{P}_1 = m_1 \cdot \vec{a}; T - P_1 = m_1 \cdot (-a); m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a$

Sumando las dos ecuaciones, se elimina la tensión:

$$m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a \Rightarrow a = \frac{g \cdot (m_1 - \mu \cdot m_2)}{m_1 + m_2}$$

a) Cuando el objeto comienza a deslizarse y cuando lo hace con velocidad constante, la aceleración es igual a cero.

$$a = 0 \Rightarrow g (m_1 - \mu \cdot m_2) = 0 \Rightarrow m_1 = \mu \cdot m_2 = 0,2 \cdot 20 \text{ kg} = 4 \text{ kg}$$

La tensión de la cuerda es:  $m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a = 0 \Rightarrow$

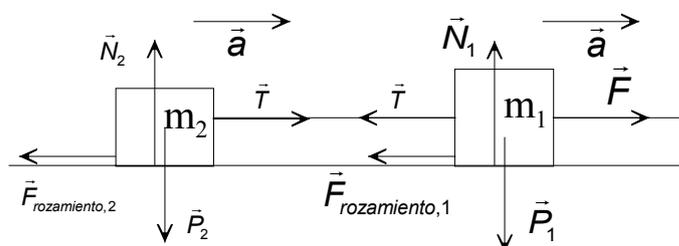
$$\Rightarrow T = m_1 \cdot g = 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 39,2 \text{ N}$$

b) Al colocar el objeto de masa igual a 8 kg, se tiene que el sistema se desliza con un movimiento uniformemente acelerado:

$$a = \frac{g \cdot (m_1 - \mu \cdot m_2)}{m_1 + m_2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{8 \text{ kg} - 0,2 \cdot 20 \text{ kg}}{8 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} = 1,4 \text{ m/s}^2$$

La tensión de la cuerda es:  $T = m_1 \cdot (g + a) = 8 \text{ kg} \cdot (9,8 \text{ m/s}^2 + 1,4 \text{ m/s}^2) = 89,6 \text{ N}$

10. En una superficie horizontal está situado un objeto de 6 kg de masa que arrastra con una cuerda a otro de 3 kg de masa. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2, calcula el módulo de la fuerza que actuará sobre el objeto mayor y el de la tensión de la cuerda para que el conjunto se deslice con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$ .



Sobre los dos objetos actúan sus pesos, las fuerzas normales y las fuerzas de rozamiento. Sobre el objeto de masa  $m_1$  actúa la fuerza que tira de él y la tensión de la cuerda que se opone al movimiento. Y sobre el objeto de masa  $m_2$  actúa la tensión de la cuerda que tira de él.

La tensión que actúa sobre los dos objetos es la misma y la aceleración con la que se mueven también.

Para cada objeto se elige un sistema de referencia con el eje X la horizontal y el eje Y la vertical y se aplican las leyes de la dinámica a los dos objetos considerados individualmente.

Sobre el objeto de masa  $m_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N}_2 + \vec{P}_2 = 0; N_2 - P_2 = 0; N_2 = P_2 = m_2 \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m_2 \cdot \vec{a}; \vec{T} + \vec{F}_{\text{rozamiento},2} = m_2 \cdot \vec{a}; T - F_{\text{rozamiento},2} = m_2 \cdot a \end{aligned} \right\} T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a; T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Operando y sustituyendo:  $T = m_2 \cdot (a + \mu \cdot g) = 3 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m/s}^2 + 0,2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2) = 14,9 \text{ N}$

Sobre el objeto de masa  $m_1$ :

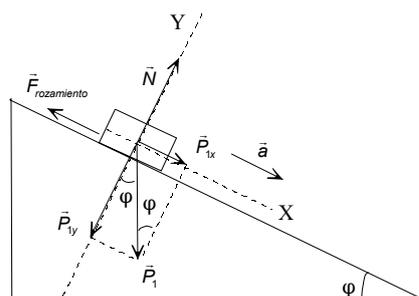
$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N}_1 + \vec{P}_1 = 0; N_1 - P_1 = 0; N_1 = P_1 = m_1 \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m_1 \cdot \vec{a}; \vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{rozamiento},1} = m_1 \cdot \vec{a}; F - T - F_{\text{rozamiento},1} = m_1 \cdot a \end{aligned} \right\}; F - T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

Operando:  $F = T + m_1 \cdot (a + \mu \cdot g) = 14,9 \text{ N} + 6 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m/s}^2 + 0,2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2) = 44,7 \text{ N}$

11. Calcula la aceleración con la que se desliza un objeto situado sobre un plano inclinado que forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal cuando el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,2$ . Calcula el módulo dirección y sentido de la fuerza mínima que se debe aplicar sobre el objeto para que no se deslice.

Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma.

a) Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento y se aplican las leyes de la dinámica.



$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N - P_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}; \vec{P}_x + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}; P_x - F_{\text{rozamiento}} = m \cdot a; P \cdot \sin \varphi - \mu \cdot N = m \cdot a \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Operando: } m \cdot g \cdot \sin \varphi - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi = m \cdot a \Rightarrow a = g \cdot (\sin \varphi - \mu \cdot \cos \varphi)$$

$$\text{Sustituyendo: } a = 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (\sin 60^\circ - 0,2 \cdot \cos 60^\circ) = 7,5 \text{ m/s}^2$$

b) Ahora la fuerza de rozamiento tiene sentido hacia abajo, contrario al del movimiento.

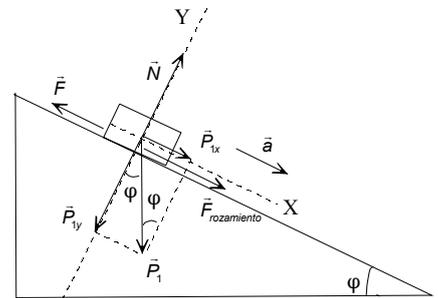
Para que el objeto no se deslice hay que aplicar una fuerza paralela al plano inclinado y de sentido hacia arriba.

Como el objeto asciende con velocidad constante está en equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cos \varphi \\ \Sigma \vec{F}_x = 0; \vec{F} + \vec{P}_x + \vec{F}_r = 0 \Rightarrow F = P_x + F_{\text{rozamiento}} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \cdot \sin \varphi + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi = m \cdot g \cdot (\sin \varphi + \mu \cdot \cos \varphi)$$

$$\text{Sustituyendo: } F = m \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 (\sin 60^\circ + 0,2 \cdot \cos 60^\circ) = 9,5 \cdot m \text{ N}$$

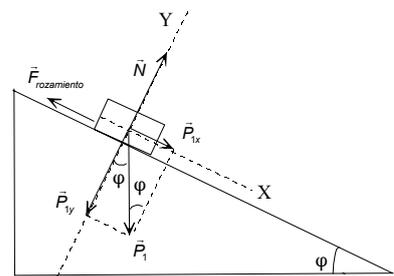


## 12. Cuál debe ser la inclinación de una superficie con la horizontal para que un objeto se deslice cuando el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0,4$ .

Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma. Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento. Cuando el objeto comienza a deslizarse está en equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N - P_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ \Sigma \vec{F}_x = 0; \vec{P}_x + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = 0; P_x - F_{\text{rozamiento}} = 0; P \cdot \sin \varphi = \mu \cdot N \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Operando: } m \cdot g \cdot \sin \varphi = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi; \text{tg } \varphi = \mu = 0,4 \\ \Rightarrow \varphi = 21^\circ 48' 5,1''$$



## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 285

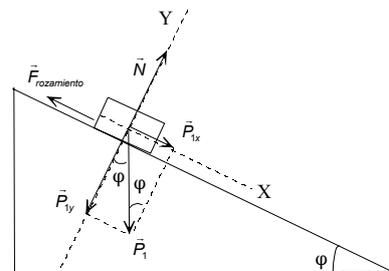
### 13. Un objeto comienza a deslizarse cuando la inclinación de un plano inclinado es de $20^\circ$ . Calcula el coeficiente de rozamiento.

Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma. Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.

Cuando el objeto comienza a deslizarse está en equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N - P_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ \Sigma \vec{F}_x = 0; \vec{P}_x + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = 0; P_x - F_{\text{rozamiento}} = 0; P \cdot \sin \varphi = \mu \cdot N \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Operando: } m \cdot g \cdot \sin \varphi = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi; \mu = \text{tg } \varphi = \text{tg } 20^\circ = 0,36$$

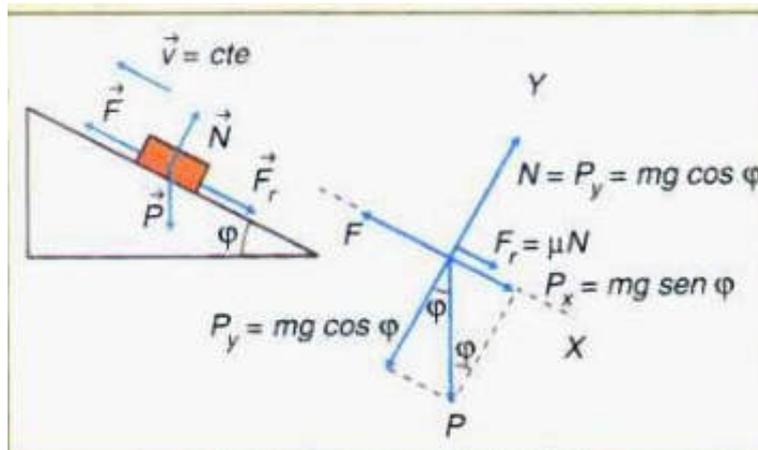


14. Un objeto de masa  $m$  está situado sobre la superficie de un plano inclinado que forma un ángulo  $\varphi$  con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento entre las superficies es igual a  $\mu$ , deduce la expresión de la fuerza mínima que hay que aplicar, paralelamente al plano inclinado, sobre el objeto para que ascienda con velocidad constante.

Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma.

Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal, la fuerza aplicada y la fuerza de rozamiento de sentido contrario a la fuerza aplicada.

Cuando el objeto asciende con velocidad constante está en equilibrio.



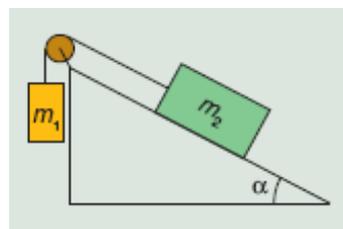
$$\Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{p}_y = 0 \Rightarrow N = P_y = m \cdot g \cdot \cos \varphi$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_x = 0; \vec{F} + \vec{p}_x + \vec{F}_r = 0 \Rightarrow F = P_x + F_{\text{rozamiento}} \\ P_x = m \cdot g \cdot \sin \varphi \\ F_{\text{rozamiento}} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \sin \varphi + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \varphi$$

Sacando factor común:  $F = m \cdot g \cdot (\sin \varphi + \mu \cdot \cos \varphi)$

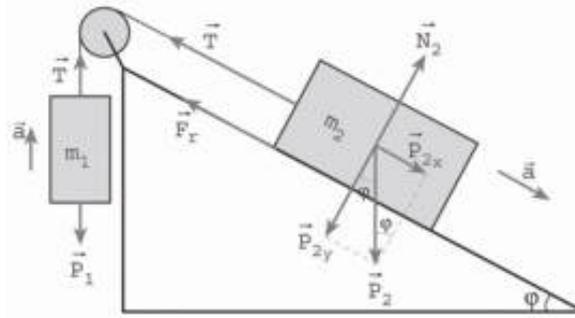
En el supuesto de que el coeficiente de rozamiento sea igual a cero, la fuerza aplicada es igual a la componente del peso en la dirección del plano inclinado:  $F = m \cdot g \cdot \sin \varphi$

15. Estudia el sistema de la figura adjunta. ¿En qué condiciones, en función de la masa de los objetos, del coeficiente de rozamiento y del ángulo del plano inclinado, el sistema evoluciona hacia la derecha, hacia la izquierda o permanece en equilibrio?



Sobre el objeto que cuelga actúa su peso y la tensión de la cuerda. Sobre el apoyado en el plano inclinado actúan su peso, la fuerza normal, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento siempre va contra el movimiento y la tensión de la cuerda es la misma en los dos objetos, si la cuerda y poleas son ideales. En el caso de que el sistema esté en movimiento los dos objetos están animados con la misma aceleración.

a) Evolucionan el sistema descendiendo el objeto situado sobre el plano inclinado.



Se aíslan los dos objetos, para el objeto que cuelga se elige un sistema de referencia con el eje Y la vertical y para el otro objeto se elige el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma. Aplicando las leyes de la dinámica, se tiene:

Cuerpo que cuelga:

$$\Sigma \vec{F}_y = m_1 \cdot \vec{a}; \vec{T} + \vec{P}_1 = m_1 \cdot \vec{a}; T - P_1 = m_1 \cdot a; T - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \Rightarrow T = m_1 \cdot (g + a)$$

Cuerpo apoyado sobre el plano inclinado:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N}_2 + \vec{P}_{2y} = 0; N_2 = P_{2y} = m_2 \cdot g \cdot \cos \varphi \\ \Sigma \vec{F}_x = m_2 \cdot \vec{a}; \vec{P}_{2x} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m_2 \cdot \vec{a}; P_{2x} - T - F_{\text{rozamiento}} = m_2 \cdot a; P_2 \cdot \sin \varphi - T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a \end{aligned} \right\}$$

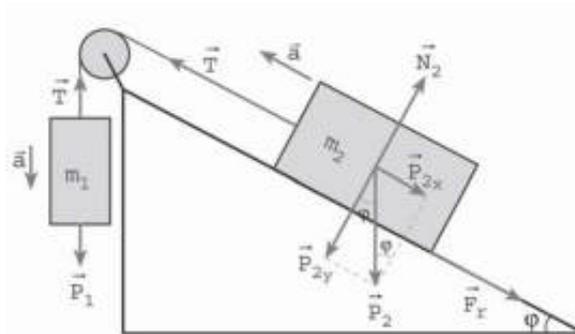
$$\text{Operando: } m_2 \cdot g \cdot \sin \varphi - T - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \varphi = m_2 \cdot a \Rightarrow T = m_2 \cdot (g \cdot \sin \varphi - \mu \cdot g \cdot \cos \varphi - a)$$

Igualando las dos ecuaciones que contienen la tensión:

$$m_1 \cdot g + m_1 \cdot a = m_2 \cdot g \cdot \sin \varphi - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \varphi - m_2 \cdot a$$

$$\text{La aceleración con que evoluciona el sistema es: } a = \frac{g \cdot (m_2 \cdot \sin \varphi - \mu \cdot m_2 \cdot \cos \varphi - m_1)}{m_1 + m_2}$$

b) Evolucionan el sistema ascendiendo el objeto situado sobre el plano inclinado.



Se aíslan los objetos y se eligen los sistemas de referencias ya indicados.

Cuerpo que cuelga:

$$\Sigma \vec{F}_y = m_1 \cdot \vec{a}; \vec{T} + \vec{P}_1 = m_1 \cdot \vec{a}; T - P_1 = m_1 \cdot (-a); m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \Rightarrow T = m_1 \cdot (g - a)$$

Cuerpo apoyado sobre el plano inclinado:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N}_2 + \vec{P}_{2y} = 0; N_2 = P_{2y} = m_2 \cdot g \cdot \cos \varphi \\ \Sigma \vec{F}_x = m_2 \cdot \vec{a}; \vec{P}_{2x} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{rozamiento}} = 0; P_{2x} + F_{\text{rozamiento}} - T = m_2 \cdot (-a); P_2 \cdot \sin \varphi + \mu \cdot N_2 - T = m_2 \cdot (-a) \end{aligned} \right\}$$

Operando:

$$m_2 \cdot g \cdot \sin \varphi + \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \varphi - T = -m_2 \cdot a \Rightarrow T = m_2 \cdot (g \cdot \sin \varphi + \mu \cdot g \cdot \cos \varphi + a)$$

Igualando las dos ecuaciones que contienen la tensión:

$$m_1 \cdot g - m_1 \cdot a = m_2 \cdot g \cdot \sin \varphi + \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \varphi + m_2 \cdot a$$

La aceleración con que evoluciona el sistema es:  $a = \frac{g \cdot (m_1 - m_2 \cdot \sin \varphi - \mu \cdot m_2 \cdot \cos \varphi)}{m_1 + m_2}$

c) Si el sistema permanece en equilibrio, no evoluciona ni hacia la derecha, ni hacia la izquierda.

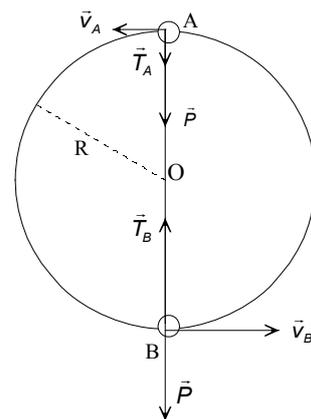
**16. En el plano vertical se hace girar un objeto de 40 g de masa atado a una cuerda de 60 cm de longitud. Si el objeto gira con una frecuencia constante de 60 r.p.m, calcula la tensión de la cuerda en el punto más alto y en el más bajo de la trayectoria.**

La frecuencia en unidades del SI es:  $\nu = 60 \text{ rpm} = 1 \text{ Hz}$

Aplicando las relaciones entre las magnitudes angulares y lineales, resulta que la velocidad del objeto es:

$$v = \omega \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 1 \text{ Hz} \cdot 0,60 \text{ m} = 3,8 \text{ m/s}$$

Sobre el objeto, y en cualquier punto de la trayectoria, actúan su peso y la tensión de la cuerda de dirección la del radio y sentido hacia el centro de la circunferencia. Se elige un sistema de referencia con el origen en el centro de la circunferencia y un eje coincidente con la dirección radial en el punto considerado.



En el punto más alto de la trayectoria, punto A, la tensión y el peso tienen la misma dirección y sentido y su resultante es la fuerza centrípeta.

$$\Sigma \vec{F}_A = m \cdot \vec{a}_n; \vec{T}_A + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_n; T_A + P = m \cdot \frac{v_A^2}{R} \Rightarrow T_A = m \cdot \frac{v_A^2}{R} - m \cdot g$$

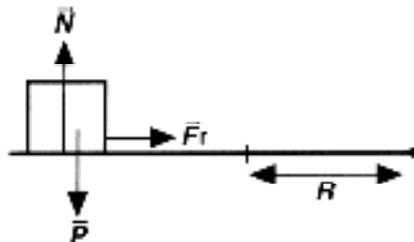
$$\text{Sustituyendo: } T_A = 0,04 \text{ kg} \cdot \left( \frac{(3,8 \text{ m/s})^2}{0,6 \text{ m}} - 9,8 \text{ m/s}^2 \right) = 0,57 \text{ N}$$

En el punto más bajo, punto B, el peso y la tensión tienen sentidos opuestos.

$$\Sigma \vec{F}_B = m \cdot \vec{a}_n; \vec{T}_B + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_n; T_B - P = m \cdot \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow T_B = m \cdot \frac{v_B^2}{R} + m \cdot g$$

$$\text{Sustituyendo: } T_B = 0,04 \text{ kg} \cdot \left( \frac{(3,8 \text{ m/s})^2}{0,6 \text{ m}} + 9,8 \text{ m/s}^2 \right) = 1,4 \text{ N}$$

17. Un automóvil de 1200 kg de masa toma una curva no peraltada de 300 m de radio. Calcula el coeficiente de rozamiento para que el vehículo no derrape cuando transita a una velocidad de 72 km/h.



La velocidad en unidades del SI es:  $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$

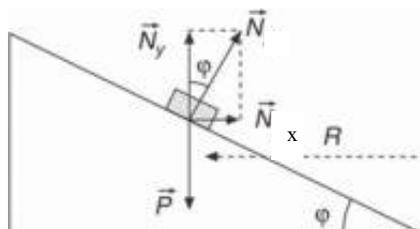
Las fuerzas que actúan sobre el vehículo son: el peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento lateral, reacción del suelo sobre las ruedas cuando se gira el volante. Esta fuerza es perpendicular a la trayectoria y proporciona la aceleración normal que modifica la dirección de la velocidad y permite tomar la curva sin salirse.

Un observador externo (inercial) elige un sistema de referencia con el origen situado en el automóvil, en cada instante, el eje Y la perpendicular al suelo y el eje X la dirección radial. Aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los ejes, y teniendo en cuenta que la trayectoria es circular de radio R, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P} = 0; N = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_n; \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}_n; \mu \cdot N = m \cdot \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right\} \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

Sustituyendo:  $\mu = \frac{v^2}{R \cdot g} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{300 \text{ m} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 0,14$ ; Independiente de la masa del automóvil.

18. Calcula el peralte que deberá tener una curva de 40 m de radio para que se pueda tomar a una velocidad de 50 km/h, aunque esté cubierta con placas de hielo.



La velocidad en unidades del SI es:  $v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$

Supongamos que el firme de la carretera forma un ángulo  $\phi$  con la horizontal y en el peor de los supuestos que la fricción entre las ruedas y el firme de la calzada es igual a cero.

Sobre el vehículo actúan su peso y la fuerza normal. La composición de estas fuerzas proporciona la fuerza centrípeta, perpendicular a la trayectoria, necesaria para tomar la curva. Un observador inercial elige como sistema de referencia uno centrado en el coche, con el eje X la dirección radial y el eje Y la vertical. El vehículo está en equilibrio en el eje Y y en el eje X la trayectoria es circular.

Descomponiendo la normal en componentes.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{N}_y + \vec{P} = 0; N \cdot \cos \varphi = m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x; \vec{N}_x = m \cdot \vec{a}_n; N \cdot \sin \varphi = m \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right\} \operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{g \cdot R}$$

Con lo que el peralte de la curva es:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v^2}{g \cdot R} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(13,9 \text{ m/s})^2}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 40 \text{ m}} = 26^\circ 14' 16''$$

**19. Un satélite de 800 kg de masa describe una órbita circular de 600 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula la aceleración normal, la velocidad y el período del satélite.  $R_{\text{Tierra}} = 6\,400 \text{ km}$ ;  $m_{\text{Tierra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .**

El radio de la órbita es:  $r = R_T + 400 \text{ km} = 6\,400 \cdot 10^3 \text{ m} + 600 \cdot 10^3 \text{ m} = 7 \cdot 10^6 \text{ m}$   
Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento del satélite en su órbita circular, resulta que:

$$\Sigma \vec{F} = m_{\text{ISS}} \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_{\text{ISS}}}{r^2} = m_{\text{ISS}} \cdot a_n \Rightarrow a_n = G \frac{m_T}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(7 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 8,14 \text{ m/s}^2$$

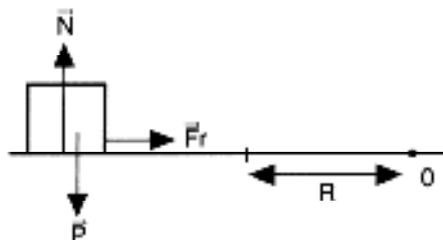
$$\text{De igual forma: } \Sigma \vec{F} = m_{\text{ISS}} \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_T \cdot m_{\text{ISS}}}{r^2} = m_{\text{ISS}} \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = v^2$$

$$\text{Despejando: } v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El satélite recorre la distancia de una órbita completa en un tiempo igual al período, por lo que:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ m}}{7,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 5,9 \cdot 10^3 \text{ s}$$

**20. Un método para medir coeficientes de rozamiento consiste en cubrir un disco que gira, en torno a un eje perpendicular a su superficie y que pasa por su punto medio, con una de las superficies a investigar y colocar encima un objeto construido con otro material. Si este objeto sale despedido cuando se coloca a 20 cm del eje y el disco gira con una frecuencia de 45 r.p.m., describe la trayectoria que sigue el objeto y el valor del coeficiente de rozamiento.**



En primer lugar se expresan las magnitudes en unidades del SI.

$$R = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}; \quad \nu = 45 \text{ r.p.m.} = 0,75 \text{ Hz}$$

Cuanto mayor es la distancia del objeto al eje de giro mayor es la velocidad del mismo. Llega un momento en que la velocidad es tal que la fuerza de rozamiento no es capaz de suministrar la aceleración normal suficiente para modificar la dirección del vector velocidad y el objeto sale despedido, por inercia, en la dirección tangente a la trayectoria de la posición que ocupe en ese momento.

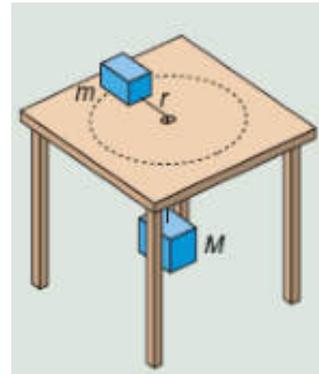
Las fuerzas que actúan sobre el objeto son: el peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento. Un observador externo elige un sistema de referencia centrado en el

objeto, el eje Y la vertical y el eje X la horizontal que pasa por el centro de giro. Aplicando la segunda ley de Newton:

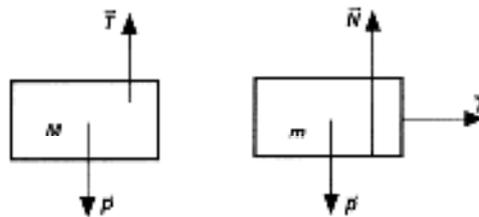
$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_y = 0 ; \vec{N} + \vec{P} = 0; N=P=m \cdot g \\ \Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x ; \vec{F}_{\text{rozamiento}} = m \cdot \vec{a}_n; \mu \cdot N = m \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right\} \mu \cdot m \cdot g = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{R \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R \cdot g} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot R}{g}$$

Sustituyendo:  $\mu = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (0,75\text{Hz})^2 \cdot 0,20}{9,8 \text{ m/s}^2} = 0,45$

**21. Dos objetos están unidos con una cuerda que pasa a través de un agujero practicado en una mesa. Uno de ellos cuelga y el otro apoya en la mesa. Si no hay rozamiento entre la mesa y el objeto, calcula la velocidad a la que debe girar este objeto para que el que cuelga permanezca en reposo.**



Las fuerzas que actúan sobre el objeto que cuelga son su peso y la tensión de la cuerda. Las que actúan sobre el cuerpo apoyado son su peso, la fuerza normal y la tensión de la cuerda. Como en el agujero de la mesa no hay rozamiento, la cuerda está sometida a la misma tensión en todos sus puntos.



Sea M la masa del objeto que cuelga y m la del objeto apoyado sobre la mesa. Aislando cada uno de los objetos, un observador externo elige para el objeto que cuelga como referencia la vertical y para el cuerpo apoyado un sistema de referencia con el eje Y la vertical y el eje X la horizontal radialmente. Aplicando las leyes de la dinámica a los dos objetos, se tiene:

Objeto que cuelga:  $\Sigma \vec{F}_y = 0; \vec{T} + \vec{P} = 0; T = P = M \cdot g$

Objeto apoyado:  $\Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x; \vec{T} = m \cdot \vec{a}_n; T = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Igualando las dos ecuaciones:  $M \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{v^2}{g \cdot R}$

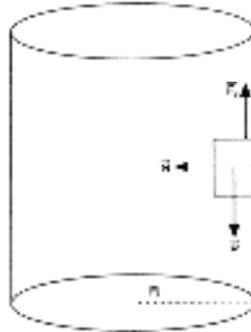
Que relaciona las masas de los objetos con el radio R de la trayectoria circular que describe el objeto apoyado sobre la mesa.

**22. Explica el funcionamiento del proceso de centrifugar la ropa en una lavadora.**

Al girar el tambor de una lavadora comunica una velocidad a la ropa tanto mayor cuanto más rápidamente gire. En cada instante, la ropa tiende a seguir con su estado de movimiento, en línea recta y con velocidad constante. El propio tambor impide que la ropa se escape, sin embargo el agua que la empapa se escapa por los agujeros, debido a la inercia.

**23. Una atracción de feria consiste en un tubo de paredes verticales. Dentro del tubo un motorista describe trayectorias paralelas al suelo. ¿Cuál es la mínima velocidad que llevará el motorista para no caer?**

Sobre el motorista actúan su peso, la fuerza de rozamiento que impide que caiga y la fuerza normal que aplica la superficie y dirigida hacia el centro de la trayectoria.



Un observador externo elige un sistema de referencia con el origen en el motorista, el eje Y la vertical y el eje X la horizontal, que pasa por el centro de la trayectoria que sigue el motorista en ese instante. En el eje vertical el motorista está en equilibrio y en el horizontal la fuerza normal proporciona la aceleración centrípeta necesaria para modificar la dirección de la velocidad. Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \vec{F}_x &= m \cdot \vec{a}_x; \vec{N} = m \cdot \vec{a}_n \Rightarrow N = m \frac{v^2}{R} \\ \Sigma \vec{F}_y &= 0; \vec{F}_{\text{rozamiento}} + \vec{P} = 0 \Rightarrow F_{\text{rozamiento}} = P; \mu \cdot N = m \cdot g \end{aligned} \right\} \mu \cdot m \frac{v^2}{R} = m \cdot g \Rightarrow v = \sqrt{\frac{R \cdot g}{\mu}};$$

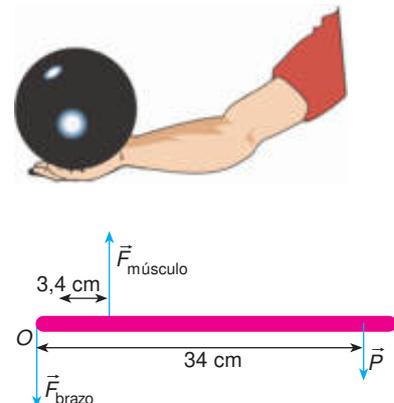
Se observa que la velocidad precisa es independiente de la masa del motorista.

**24. ¿Qué tipo de movimiento produce en un objeto la aplicación de un par de fuerzas?**

Un par de fuerzas produce un movimiento circular uniformemente acelerado.

**25. Una persona sostiene en la palma de su mano un objeto de 1 kg de masa con el codo apoyado en la superficie de una mesa. La distancia desde la palma de mano al codo es de 34 cm y el músculo bíceps se inserta en el hueso a 3,4 cm del codo. Si se desprecia el peso del brazo, calcula la fuerza con la que actúa el bíceps el elevar el objeto.**

El brazo es como una barra con su punto fijo, O, en el codo. El sistema está en equilibrio de rotación y se considera que el músculo actúa con una fuerza que es perpendicular al antebrazo.



Sobre el antebrazo actúan el peso del objeto, la fuerza del bíceps y una fuerza aplicada en el codo por la parte superior del brazo y de sentido hacia abajo. Si no actuara esta fuerza, el sistema no podría estar en equilibrio de traslación. El peso del objeto hace girar al antebrazo en un sentido y la fuerza con la que actúa el músculo, en sentido contrario.

Aplicando la condición de equilibrio de rotación:

$$\Sigma \vec{M}_{\text{codo}} = 0; P_{\text{objeto}} \cdot 34 \text{ cm} - F_{\text{músculo}} \cdot 3,4 \text{ cm} + F_{\text{brazo}} \cdot 0 \text{ cm} = 0$$

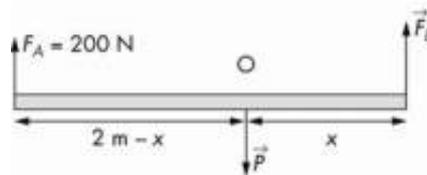
Despejando:  $F_{\text{músculo}} = 10 \cdot P_{\text{objeto}} = 10 \cdot m \cdot g = 10 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 98 \text{ N}$

Como el sistema tiene que estar en equilibrio de traslación:

$$\Sigma \vec{F} = 0; \vec{P} + \vec{F}_{\text{brazo}} + \vec{F}_{\text{músculo}} = 0 \Rightarrow F_{\text{músculo}} = F_{\text{brazo}} + P_{\text{objeto}}; 98 \text{ N} = F_{\text{brazo}} + 10 \text{ N}$$

$$F_{\text{brazo}} = 88 \text{ N}$$

**26. Dos personas transportan un paquete que tiene una masa de 80 kg agarrando por los extremos de una barra de 2 m de longitud y de masa despreciable de la que cuelga el paquete. Si una de las personas actúa con una fuerza de 200 N, calcula la fuerza con la que actúa la otra persona y la posición del paquete en la barra.**



Sobre la barra actúan el peso del paquete, que se aplica a una distancia  $x$  de un extremo, y las fuerzas con las que actúan las personas  $F_A$  y  $F_B$ , que se aplican en los extremos de la barra.

Aplicando la condición de equilibrio de traslación:

$$\Sigma \vec{F} = 0; \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{P} = 0; F_A + F_B - P = 0; 200 \text{ N} + F_B - 80 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 0 \Rightarrow F_B = 584 \text{ N}$$

Aplicando la condición de equilibrio de rotación respecto del punto O en el que se aplica el peso:

$$\Sigma \vec{M}_O = 0; 200 \text{ N} (2 \text{ m} - x) = 584 \text{ N} \cdot x \Rightarrow x = 0,51 \text{ m}$$

Por tanto, el objeto está situado a 51cm de la persona que actúa con la fuerza de mayor módulo.

**27. Un andamio de 4,5 m de longitud y 60 kg de masa cuelga horizontalmente del alero de un edificio mediante dos cables verticales enganchados en sus extremos. Si una persona de 60 kg de masa se coloca a 1,2 m de un extremo, calcula la tensión que soporta cada cable.**

Sobre el andamio actúan su peso, el peso de la persona y las fuerzas con las que actúan los cables de los extremos.

El andamio está en equilibrio de rotación y de traslación.

Aplicando la condición de equilibrio de rotación respecto del punto O de un extremo:

$$\Sigma \vec{M}_O = 0;$$

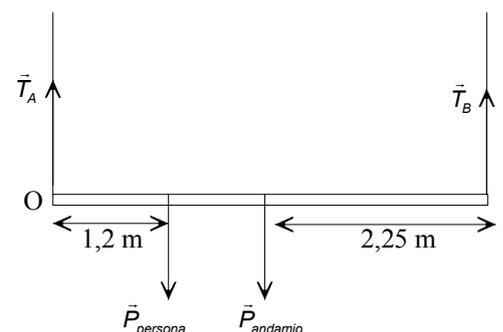
$$T_A \cdot 0 \text{ m} - P_{\text{persona}} \cdot 1,2 \text{ m} - P_{\text{andamio}} \cdot 2,25 \text{ m} + T_B \cdot 4,5 \text{ m} = 0$$

$$T_B \cdot 4,5 \text{ m} = 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,2 \text{ m} + 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 2,25 \text{ m} \Rightarrow T_B = 450,8 \text{ N}$$

Aplicando la condición de equilibrio de traslación:

$$\Sigma \vec{F} = 0; \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{P}_{\text{persona}} + \vec{P}_{\text{andamio}} = 0; T_A + T_B - P_{\text{persona}} - P_{\text{andamio}} = 0$$

$$\text{Sustituyendo: } T_A + 450,8 \text{ N} - 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 0 \Rightarrow T_A = 725,2 \text{ N}$$



**1. En la enciclopedia wikipedia puedes encontrar información sobre el funcionamiento, historia, tipos y usos de los aerodeslizadores, también llamados hovercraft: <http://es.wikipedia.org/wiki/Aerodeslizador>**

Los primeros aerodeslizadores prácticos datan de 1950. A partir de 1960 comienzan a utilizarse para transportar pasajeros a lo largo de ríos y lagos. En la actualidad se utilizan en viajes de recreo, transporte de mercancías y pasajeros y en operaciones militares. Su uso está muy condicionado por el elevado precio de los combustibles.

**2. En la página web: <http://cultura.terra.es/cac/articulo/html/cac2511.htm> tienes una simulación que explica el funcionamiento de los trenes de levitación magnética. Elabora un resumen de su funcionamiento.**

Mediante la repulsión de imanes el convoy se mantiene flotando por encima de la vía durante el viaje. Cuando llega a la estación las ruedas le apoyan sobre las guías.

Una vez en modo de levitación, el tren utiliza la interacción de sus electroimanes con los de las vías para crear fuerzas de atracción en la parte delantera del tren y de repulsión en la parte trasera.