12 DINÁMICA DE LOS CUERPOS CELESTES: GRAVITACIÓN

En la presente unidad se aborda el estudio por separado de una de las interacciones fundamentales: la gravitación. Dentro de la organización de contenidos del currículum de 1.º de bachillerato, nos ha parecido más oportuno hacerlo de esta manera, englobando en un único tema la dinámica del movimiento circular uniforme, las leyes de Kepler, el concepto de momento angular y la ley de gravitación universal, dado que son conceptos todos ellos interrelacionados. La unidad comienza abordando el estudio de la dinámica del movimiento circular uniforme, como base para entender la posterior resolución de problemas de movimientos orbitales. A continuación, se enuncian las leyes de Kepler del movimiento planetario, para posteriormente abordar qué magnitud podemos encontrar cuya constancia satisfaga y explique las citadas leyes del movimiento planetario. Se introduce, de ese modo, el concepto de momento angular, cuya constancia resulta congruente con la segunda ley de Kepler.

Para el completo desarrollo del concepto de momento angular es necesario haber abordado previamente el desarrollo del producto vectorial en función de las componentes vectoriales en la unidad de *Herramientas matemáticas de la Física.*

La constancia del momento angular nos permite aventurar el carácter central de la fuerza que gobierna el movimiento planetario. De ese modo, tenemos servida en bandeja la presentación de la fuerza gravitatoria enunciada en la Ley de Gravitación Universal que se expone a continuación. Una vez formulada la ley, se analizan algunas de sus consecuencias más importantes, como, por ejemplo, la caída libre de los cuerpos, explicando por qué g no depende de la masa del cuerpo acelerado. Igualmente, se comprueba cómo la ley de gravitación resuelve la tercera ley de Kepler, evidenciando el significado físico de la constante k que aparece en su formulación. También se aborda cómo, a partir de la consideración del carácter centrípeto de la fuerza gravitatoria, se pueden determinar las masas planetarias a partir del análisis del movimiento de alguno de sus satélites o la velocidad orbital de los satélites en función de su distancia al centro del cuerpo en torno al cual orbitan. La unidad finaliza explicando uno de los conceptos más proclive a errores entre el alumnado: la ingravidez.

Objetivos

1. Comprender la dinámica del movimiento circular uniforme.
2. Conocer las leyes de Kepler y los hechos que dieron lugar a su enunciado.
3. Comprender y utilizar correctamente desde el punto de vista vectorial el concepto de momento angular.
4. Entender las condiciones en las que se conserva el momento angular, así como las consecuencias que se derivan de la constancia de dicha magnitud.
5. Comprender la ley de Gravitación Universal.
6. Asimilar la independencia de la masa de los cuerpos en el problema de la caída libre u otros movimientos que transcurren bajo la aceleración de la gravedad.
7. Comprender el significado de la constante k en la tercera ley de Kepler.
8. Deducir la información que puede extraerse del carácter centrípeto de la fuerza gravitatoria.

Relación de la unidad con las competencias clave

La competencia lingüística está presente en la correcta interpretación del texto y los enunciados de los problemas y cuestiones propuestos, así como en la exposición oral y escrita de las propuestas del apartado *Investiga*. La competencia matemática y en ciencia y tecnología está presente en todo el desarrollo, así como en el uso de las herramientas matemáticas. La competencia digital se relaciona fundamentalmente con las propuestas de *Investiga* y *Física, Tecnología y Sociedad*. La competencia de aprender a aprender es inherente al propio desarrollo autosuficiente de la unidad, basado en la idea primordial de toda la obra de que ésta pudiera servir para el aprendizaje autodidacta del alumnado.

Temporalización

Se aconseja dedicar ocho sesiones lectivas.

PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje	Relación de actividades del LA	Competencias clave
Dinámica del movimiento circular uniforme	1. Justificar la necesidad de la existencia de fuerzas en un movimiento circular.	1.1. Aplica el concepto de fuerza centrípeta para resolver e interpretar movimientos circulares.	A: 1 AT: 1-3	CMCCT CD
Los movimientos planetarios: leyes de Kepler ▪ Las leyes de Kepler	2. Contextualizar las leyes del Kepler en el estudio del movimiento planetario.	2.1. Comprueba las leyes de Kepler a partir de datos astronómicos planetarios. 2.2. Deduce períodos orbitales a partir de la tercera ley.	A: 2 AT: 4-7	CMCCT CD
La traslación de los planetas: momento angular ▪ Momento angular ▪ La conservación del momento angular ▪ El momento angular de traslación de los planetas ▪ Consecuencias de la constancia del momento angular planetario	3. Conocer el concepto de momento angular. 4. Asociar el movimiento orbital con la conservación del momento angular. 5. Relacionar la conservación del momento angular en un movimiento orbital con el carácter central de la fuerza actuante y establecer las consecuencias.	5.1. Aplica la ley de conservación del momento angular y relacionarla con la segunda ley de Kepler.	A: 3-6 ER 1,2 AT: 8-15	CMCCT CD
Precedentes de la ley de gravitación universal ▪ Una acertada suposición de Newton ▪ Las fuerzas centrípetas y el inverso del cuadrado de la distancia	6. Comprender la ley del inverso del cuadrado de la distancia y su relación con la fuerza centrípeta.	6.1. Describe el movimiento orbital como composición de movimientos y relacionarlo con el lanzamiento horizontal.	A: 7	CMCCT CD
La ley de gravitación universal	7. Formular correctamente la ley de gravitación universal y relacionarla con el peso de los cuerpos.	7.1. Expresa la fuerza de la atracción gravitatoria entre dos cuerpos cualesquiera, conocidas las variables de las que depende, estableciendo cómo inciden los cambios en estas sobre aquella.	A: 8-10 AT: 16, 19	CMCCT CD
Consecuencias de la ley de gravitación universal ▪ La caída libre, un problema resuelto ▪ Significado físico de la constante *k* de la tercera ley de Kepler ▪ Determinación de masas planetarias ▪ Velocidad orbital ▪ Flotando en «ingravidez»	8. Relacionar valores de la aceleración superficial con las características orbitales de planetas y satélites. 9. Reconocer la información implícita en el carácter centrípeto de la fuerza gravitatoria.	8.1. Determina valores de aceleración gravitatoria en función de las características planetarias. 9.1. Resuelve velocidades orbitales en función de las características planetarias.	A: 11-18 ER: 3-6 AT: 17, 18, 20-30	CMCCT

LA: libro del alumno; A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas;
CCL: comunicación lingüística; CMCCT: competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología; CD: competencia digital; CAA: Aprender a aprender; CSC: Competencias sociales y cívicas; CSIEE: Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor; CCEC: Conciencia y expresiones culturales

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL ALUMNO

Vídeo: : La atracción gravitatoria

Simuladores: 1. Movimiento circular uniforme. 2. Periodo y frecuencia.
Enlace web: Dinámica del movimiento circular

Simulador: Órbitas planetarias
Vídeo: Las tres leyes de Kepler
Enlace web: Johannes Kepler

Vídeo: El momento angular y cinético en física
Enlaces web: 1. Momento angular. 2. Conservación del momento angular

Simulador: El cañón de Newton

Simuladores: 1. Interacción gravitatoria. 2. Dinámica celeste
Vídeo: la ley de la gravedad, la manzana y la luna

Unidad 12: Dinámica de los cuerpos celestes: gravitación

1. Dinámica del movimiento circular uniforme

2. Los movimientos planetarios: leyes de Kepler
1.1. Las leyes de Kepler

3. La traslación de los planetas: el momento angular
3.1. Momento angular
3.2. La conservación del momento angular
3.3. El momento angular de traslación de los planetas
3.4. Consecuencias de la constancia del momento angular planetario

4. Precedentes de la ley de gravitación universal
4.1. Una acertada suposición de Newton
4.2 Las fuerzas centrípetas y el inverso del cuadrado de la distancia

5. La ley de gravitación universal

PARA EL PROFESOR

Presentación

Documento: El descubrimiento de Neptuno: un gran éxito de la ley de gravitación

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, M. y FINN, E.J.
Física. Addison-Wesley Longman. México 2000.
Clásico de referencia en cualquier tema de Física. Tratamientos buenos y rigurosos.

HECHT, E.
Física en perspectiva. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington (E.U.A.) 1987. Uno de los libros de Física más amenos que se han escrito. Aborda la comprensión de la Física desde un punto de vista conceptual. Se trata de un libro «casi de lectura» con muy pocas fórmulas.

HEWITT, P. G.
Física conceptual. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington (E. U. A.) 1995.
Muy recomendable para la comprensión conceptual de la Física. Su lectura amena y la escasez de fórmulas hacen de este libro un material adecuado para aquellos alumnos y alumnas que sienten interés por la Física.

LAYZER, D.
Construcción del universo. Biblioteca Scientific American. Barcelona 1989.
Muy interesante en sus implicaciones referidas a la gravitación.

NEWTON, I.
Principios matemáticos de filosofía natural (Volúmenes I y II). Alianza Universidad. Madrid 1987.

TIPLER, P. A.
Física. Editorial Reverté (3ª edición). Barcelona 1995.
Clásico de referencia obligada.

Enlaces web: Gravitación y tercera ley de Kepler
Video: Ingravidez

Enlace web: Lentes gravitacionales
Vídeo: Lentes gravitacionales en acción

Enlace web: La máquina de Atwood

Tests de autoevalución interactivos

6. Consecuencias de la ley de gravitación universal
- 6.1. La caída libre, un problema resuelto
- 6.2 Significado físico de la constante k de la tercera ley de Kepler
- 6.3 Determinación de masas planetarias
- 6.4 Velocidad orbital
- 6.5 Flotando en «ingravidez»

Física, tecnología y sociedad

Técnicas de trabajo y experimentación

Estrategias de resolución y Actividades y tareas

Síntesis de la unidad y Autoevaluación

Práctica de laboratorio: Determinación de la masa de Júpiter a través del movimiento de su satélite Ío.

Pruebas de evaluación

WEBGRAFÍA

Educaplus
http://www.educaplus.org/
Excelente web con buenos simuladores.

Paul G. Hewitt
https://goo.gl/C6cKsb
Canal de Youtube con los interesantes vídeos del profesor Paul G. Hewitt. En inglés.

How stuff works
http://science.howstuffworks.com/gravity-videos-playlist.htm
Interesante y completa web con videos sobre gravitación.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

DINÁMICA DE LOS CUERPOS CELESTES: GRAVITACIÓN

Se sugiere la lectura del texto introductorio acompañado de alguno de los vídeos propuestos. Posteriormente deben plantearse las cuestiones previas que nos permitirán desvelar algunos equívocos frecuentes.

Vídeo: LA ATRACCIÓN GRAVITATORIA

Motivador vídeo en inglés que expone someramente la teoría de la Relatividad General.

1. Dinámica del movimiento circular uniforme

Como desarrollo previo a la gravitación, se ha considerado importante comenzar por el estudio dinámico del movimiento circular uniforme y definir la fuerza centrípeta en términos de la velocidad lineal, angular, el período y la frecuencia. Posteriormente se relacionará este estudio con la fuerza gravitatoria para obtener interesantes conclusiones acerca de los movimientos de planetas y satélites o de cuerpos celestes en general.

Simulador: MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Sencillo aunque clarificador para conocer la dependencia de los parámetros implicados en este movimiento.

Simulador: PERIODO Y FRECUENCIA

Con este simulador, complemento del anterior, se pueden experimentar de una manera sencilla la relación existente entre frecuencia, periodo y velocidad angular

Enlace web: DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

Esta página incluye una breve exposición así como ejercicios propuestos resueltos.

2. Los movimientos planetarios: leyes de Kepler

En este apartado sería conveniente abordar una introducción histórica sobre la evolución de las teorías sobre el movimiento planetario y el lugar que ocupa la Tierra en ese esquema. Ha de insistirse en la idea de que un modelo puede o debe considerarse válido mientras funcione y permita la predicción y no resulte invalidado por las observaciones. Sólo de esa manera entenderán los alumnos la persistencia del modelo geocéntrico en su versión tolemaica. De hecho, la dicotomía entre el modelo tolemaico y el copernicano, en un primer momento, es una dicotomía entre dos modelos que explican los fenómenos observados. El argumento que se esgrimía para apoyar la teoría heliocéntrica de Copérnico en aquel entonces era su mayor simplicidad y elegancia, debidas sobre todo a que reducía sustancialmente el número de epiciclos. Hasta el siglo XIX, sin embargo, no se obtendrían las pruebas inequívocas de la rotación y la traslación terrestres, movimientos asociados al modelo heliocéntrico. Foucault, con su célebre péndulo, vendría a demostrar el efecto de desviación de Coriolis relacionado con los cuerpos en movimiento (en este caso la bola del péndulo) en un sistema en rotación. Este hecho demostraba la rotación de la Tierra. Bessel, por su parte, logró calcular la primera paralaje estelar de la estrella 61 Cygni, fenómeno que demostraba la traslación de la Tierra. No obstante, a estas alturas, y gracias a la teoría de la gravitación de Newton, ya nadie dudaba del lugar de la Tierra en el sistema «solar».

Sin embargo, todas estas consideraciones deben exponerse en clase con el fin de desterrar la idea simplista que suele hacerse en el alumno o alumna de que las cosas son, sin más, o verdaderas o falsas y fomentar, de ese modo, un espíritu crítico y analítico.

Es importante resaltar el proceder científico de Kepler, buscando la regularidad que podía observarse en el movimiento planetario, plasmada en su segunda ley.

Simulador: ÓRBITAS PLANETARIAS

Completo simulador que permite definir los distintos parámetros implicados en el movimiento planetario para entender la relación entre ellos, a través de representaciones gráficas o efectos sonoros, entre otros.

Vídeo: LAS TRES LEYES DE KEPLER

Perteneciente a la colección *Universo mecánico* el vídeo, que comienza con una breve introducción histórica y su relación con Tycho Brahe, explica cómo Kepler definió las leyes que desde entonces llevan su nombre a partir de las observaciones del planeta Marte. Tiene una duración aproximada de 30 minutos.

Enlace web: JOHANNES KEPLER

Biografía del célebre matemático y astrónomo alemán.

3. La traslación de los planetas: el momento angular

Para la descripción física de las características orbitales de los planetas, se introduce en este apartado el concepto de momento angular. Es importante mostrar a los alumnos y a las alumnas el paralelismo existente entre esta magnitud y el momento lineal en lo concerniente a la descripción del estado de movimiento.

La resolución de problemas relativos al momento angular exige el dominio del producto vectorial. Es por ello aconsejable que los alumnos y alumnas hayan estudiado previamente el *Herramientas matemáticas de la Física,* donde se aborda el desarrollo del producto vectorial en función de las componentes.

Enlaces web: MOMENTO ANGULAR

Páginas web con teoría y ejercicios propuestos sobre esta magnitud física y su conservación.

Es importante recalcar la conservación del momento angular bajo la acción de fuerzas centrales, porque eso será indicativo del carácter de la fuerza gravitatoria.

Puede sorprender que el planteamiento de esta cuestión en nuestro libro siga un orden inverso al habitual en otros muchos textos, es decir, que se parta aquí de la segunda ley de Kepler para demostrar la constancia del momento angular, en lugar de proceder al contrario: demostrar la segunda ley a partir de la constancia del momento angular. Se ha preferido hacerlo de este modo, partiendo de una ley empírica, para llegar a la conclusión de que el momento angular es constante y que, por tanto, la fuerza responsable de los movimientos orbitales ha de ser central, lo que abre el camino al enunciado de la fuerza gravitatoria. Seguir el proceso inverso supondría partir de la premisa, no estudiada aún, de que la fuerza que gobierna el movimiento planetario es de tipo central.

Vídeo: EL MOMENTO ANGULAR Y CINÉTICO EN FÍSICA

El vídeo, perteneciente a la colección *Universo mecánico* el vídeo, comienza con un repaso a la historia desde la antigua Grecia hasta la época de Kepler. Tras un repaso de las tres leyes que llevan su nombre, muestra varios fenómenos que obedecen a la misma ley básica: la ley de conservación del momento cinético. Tiene una duración de 26 minutos.

4. Precedentes de la ley de gravitación universal

Se sugiere no pasar por alto la actividad 7. Su resolución es muy sencilla y el resultado es tremendamente ilustrativo. Se trata, en esta actividad, de reproducir el cálculo que realizó Newton en 1666 y que expone claramente la ley del inverso del cuadrado de la distancia.

Igualmente recomendable es la realización en clase del ejercicio resuelto 4, que viene a demostrar cómo la consideración de la fuerza gravitatoria como centrípeta es totalmente consistente con la 3.ª ley de Kepler.

Simulador: EL CAÑÓN DE NEWTON

Diseñado a partir de la concepción de Newton del movimiento orbital como lanzamiento horizontal, permite efectuar varios disparos para comprobar qué trayectoria sigue el proyectil.

5. Ley de gravitación universal

En este apartado debe mencionarse que la ley de gravitación universal no surge como una «idea feliz» de un genio, sino que, en cierto modo, el terreno ya estaba abonado en cuanto a la firme creencia de que la fuerza gravitatoria debía variar conforme al inverso del cuadrado de la distancia. Esta idea ya era sostenida por Robert Hooke y por Edmund Halley.

En cuanto a la formulación vectorial que aparece en la página 300, se ha elegido el mismo criterio que se maneja en la interacción electrostática, donde el signo negativo hace referencia al carácter atractivo de la fuerza.

Debe recalcarse muy especialmente que las fuerzas con que dos cuerpos se atraen mutuamente, son iguales y de sentidos contrarios; sin embargo, las aceleraciones que adquieren bajo la misma fuerza, son distintas. El cálculo numérico ayudará a comprender por qué si un lápiz u otro objeto pequeño atrae a la Tierra con la misma fuerza con que el objeto es atraído, es sin embargo, el objeto el que se precipita hacia la Tierra y no a la inversa.

Simulador: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Permite definir masas y distancias para comprobar la ley del inverso del cuadrado de la distancia.

Simulador: DINÁMICA CELESTE

Explicaciones sobre las leyes de Kepler junto con varios simuladores que permiten comprobar la conservación del momento angular.

Vídeo: LA LEY DE LA GRAVEDAD, LA MANZANA Y LA LUNA

Perteneciente a la colección *Universo mecánico* el vídeo con una duración de prácticamente media hora, repasa la vida de Newton y sus descubrimientos.

6. Consecuencias de la ley de gravitación universal

Muy probablemente los alumnos que acceden a 1° de bachillerato siguen pensando que los cuerpos más pesados llegan antes al suelo que los más ligeros. Una clásica pero muy interesante demostración en el aula consiste en coger un folio y un objeto más pesado y dejarlos caer simultáneamente. En principio, la experiencia parece avalar la idea preestablecida. Si a continuación hacemos una bola con el folio, los alumnos comprobarán que la masa de éste no ha variado y, sin embargo, ahora llegan a la par. Con esta sencilla experiencia deben darse cuenta de cuál es el factor que impidió a la humanidad entender el problema de la caída libre durante tanto tiempo y cómo la teoría de Newton explica elegantemente la independencia de la masa en la caída libre.

Uno de los puntos más interesantes del tema es el que se refiere a la demostración de la 3.ª ley de Kepler como una consecuencia de la ley de gravitación universal, donde se encuentra de qué factores depende la constante k de Kepler. Debe insistirse en lo que se señala en el último párrafo del apartado 6.2, en lo referente a que si se desea estudiar el movimiento orbital de un satélite en torno a un planeta, la masa que aparecerá en la constante k será la del planeta.

De la consideración del carácter centrípeto de la fuerza gravitatoria se extraen importantísimas conclusiones como las enunciadas en los apartados 6.3 y 6.4. Debe insistirse en la idea de no memorizar expresiones matemáticas; en este caso es especialmente recomendable insistir en la utilidad de esta identidad entre fuerza gravitatoria y centrípeta para extraer toda la información posible de los movimientos orbitales.

Por último, el tema acaba con la explicación de la situación de ingravidez, aclarando este concepto a menudo confuso para una gran parte de la población.

Enlace web: GRAVITACIÓN Y TERCERA LEY DE KEPLER

Página con explicaciones sucintas y ejercicios propuestos resueltos.

Video: INGRAVIDEZ

Dentro de una buena colección de vídeos, se encuentra este que proponemos visualizar sobre ingravidez.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES (páginas 290-303)

Comprueba lo que sabes

1. Discute la veracidad o falsedad de esta afirmación: «La Tierra te atrae con una fuerza muchísimo mayor que aquella con la que tú atraes a la Tierra».

Es falsa en virtud del enunciado de la ley de gravitación. El cometido es verificar que los alumnos siguen asociando mayor fuerza gravitatoria al cuerpo de mayor masa.

2. La velocidad con la que la Tierra se traslada alrededor del Sol es la misma durante todo el año. ¿Es verdad?

Al igual que la anterior, es falsa. La órbita terrestre es esencialmente un círculo descentrado, lo que hace que la velocidad orbital presente ligeras variaciones, siendo mayor la velocidad en nuestro invierno, cuando más próximos estamos al Sol.

3. ¿Qué planetas se mueven con mayor velocidad alrededor del Sol, los más cercanos o los más lejanos?

Esta pregunta se relaciona con el apartado de velocidad orbital. No obstante, del curso anterior los alumnos deberían responder correctamente que los más cercanos se mueven con mayor velocidad.

Actividades

1 Teniendo en cuenta que la masa de la Luna es $7{,}22 \cdot 10^{22}$ kg, y sabiendo que su distancia orbital al centro terrestre es de 384 000 km y que tarda 27,31 días en completar su órbita, determina el valor de la fuerza centrípeta que produce su movimiento orbital.

A partir del valor del período en segundos (2 359 584 s) y la distancia en metros, podemos deducir el valor de la fuerza centrípeta, resultando:

$$F_c = m\,\frac{4\pi^2 r}{T} = 1{,}96 \cdot 10^{20}\ \text{N}$$

2 Considerando los datos orbitales terrestres alrededor del Sol ($T = 365$ d y $r = 149\,600\,000$ km), determina cuánto tarda Mercurio en dar una vuelta al Sol si su distancia media a este es de 57 900 000 km.

A partir de la tercera ley de Kepler aplicada a la Tierra y a Mercurio e igualando el valor de k de ambas expresiones, se obtiene que:

$$T_M = T_T\sqrt{\left(\frac{r_{MS}}{r_{TS}}\right)^3}$$

Donde T_M y r_{MS} son el período de Mercurio y su distancia al Sol respectivamente, mientras que T_T y r_{TS} son los correspondientes valores de la Tierra.

Sustituyendo los valores ofrecidos se obtiene para el período de Mercurio:

$$T_M = 88\ \text{días}$$

3 ¿Cuál será el momento angular de una partícula de 10 g de masa, que se mueve en un instante dado con una velocidad $\vec{v} = 20\vec{i}$ m/s, respecto de un origen con relación al cual su posición es $\vec{r} = 15\vec{j}$ m?

Resolviendo el producto vectorial según la definición del momento angular, se obtiene:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = -3\vec{k}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

4 La Estación Espacial Internacional (EEI) orbita en torno a la Tierra a una altura media de 430 km sobre la superficie terrestre, con un período orbital de 93 min y una masa de 415 t. Determina: el valor de su momento angular respecto del centro terrestre y su velocidad orbital.

Dato: $r_T = 6370$ km

Considerando todas las unidades expresadas en el SI (sumando el radio terrestre a la altura) y a partir de la expresión del momento angular en términos del período:

$$L = m\, r^2\, \frac{2\pi}{T}$$

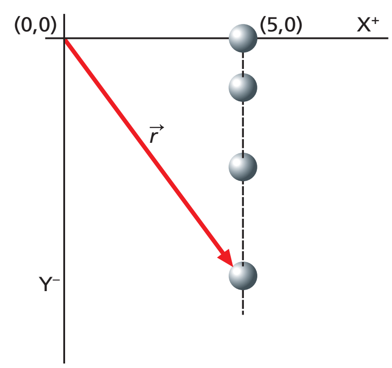
Se obtiene:

$$L = 2{,}16 \cdot 1016\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

b) La velocidad orbital pude obtenerse a partir de la velocidad angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, de modo que:

$$v = \omega r = 7657\ \text{m/s}$$

5 Un cuerpo de masa m comienza a caer libremente desde el punto (5, 0), como se indica en la figura 12.10.



Deduce:

a) Las expresiones del vector de posición con respecto al origen (0, 0) y del vector velocidad, ambos en función del tiempo.

b) La expresión vectorial del momento angular en función del tiempo respecto del origen.

c) El resultado de la derivada del momento angular en función del tiempo.

d) Verifica que dicho resultado coincide con el producto vectorial: $\vec{r} \times \vec{F}$

a) Dado que el cuerpo cae libremente, las expresiones vectoriales de la posición y la velocidad son:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}\,m$$

$$\vec{v} = -gt\vec{j}\ \text{m/s}$$

b) La expresión del momento angular en función del tiempo será:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -\frac{1}{2}gt^2 & 0 \\ 0 & -mgt & 0 \end{vmatrix} = -5mgt\ \vec{k}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

c) Derivando en función del tiempo, se obtiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -5\ mg\ \vec{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

d) Teniendo en cuenta que la fuerza es $\vec{F} = -mg\vec{j}$, entonces:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -\frac{1}{2}gt^2 & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -5mg\vec{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Que coincide con el resultado anterior.

6 **Suponiendo que la Luna describe una órbita circular alrededor de la Tierra, determina:**

a) **Su velocidad areolar en m²/s.**

b) **Su momento angular respecto del centro terrestre.**

Datos: $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km; $m_{\text{Luna}} = 7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg; período orbital lunar = 27,31 días

La velocidad areolar de la Luna es:

$$v_{areolar} = \frac{1}{2}\ r^2\omega = \frac{1}{2}r^2\frac{2\pi}{T}$$

donde, sustituyendo los valores ofrecidos en unidades SI, se obtiene:

$$v_{areolar} = 1{,}96 \cdot 10^{11}\ \text{m}^2/\text{s}$$

b) A partir de la relación entre la velocidad areolar y el momento angular, se deduce que:

$$L = 2m\ v_{areolar} = 2{,}83 \cdot 10\ 34\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

7 **Supongamos que el movimiento de la Luna se compone de otros dos: uno de ellos de avance y el otro de caída hacia la Tierra, regido este último por las ecuaciones de caída libre. Con los datos que se te ofrecen, y siguiendo las sugerencias de la figura 12.16, contesta a las siguientes preguntas:**

a) **¿Qué ángulo se ha desplazado la Luna en una hora?**

b) **¿Qué altura *h* ha «caído» la Luna en esa hora?**

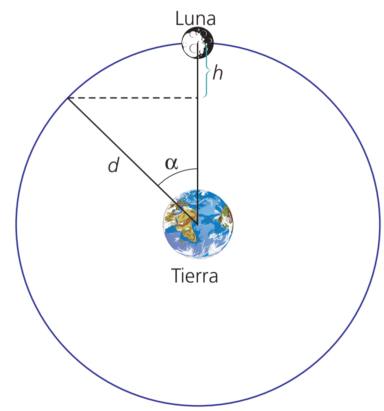
c) **¿Qué valor de aceleración g_{Luna} de caída corresponde a esa distancia y ese tiempo?**

d) **¿Cuántas veces es menor ese valor que el valor $g_{\text{Tierra}} = 9{,}8$ m/s² que corresponde a la superficie terrestre?**

e) **¿Cuántas veces es mayor la distancia Tierra-Luna que el radio terrestre?**

f) **¿Qué relación puedes encontrar entre la variación de la aceleración y la de la distancia?**

Datos: $r_{\text{Tierra}} = 6\,370$ km; $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km; período sidéreo lunar[1] = 7,31 días



La situación descrita en el enunciado es la siguiente:

a) El período sidéreo lunar, expresado en horas, es de 655,44 h. En este tiempo, la Luna ha descrito 360°, por lo que, en 1 hora, el ángulo α es de :

$$\alpha = \frac{360°}{655{,}44} = 0{,}549°$$

b) La altura *h* que la Luna ha «caído» en esa hora es:

$$h = d - d\cos\alpha = d(1 - \cos\alpha) = 17\,627{,}75\ \text{m}$$

c) El valor de aceleración de caída que se correspondería con esa distancia en 1 h (3 600 s) se obtendría de la siguiente manera:

$$h = \frac{1}{2}g_L t^2 \Rightarrow g_L = \frac{2h}{t^2} = 0{,}002\ 7\ \text{m}/\text{s}^2$$

d) Dividiendo el valor de g_T en la superficie terrestre entre g_L, se obtiene:

$$\frac{g_T}{g_L} \cong 3600$$

e) Al dividir ambas distancias, resulta:

$$\frac{d}{r_T} \cong 60$$

f) Queda claro que, al aumentar la distancia 60 veces, la aceleración gravitatoria ha disminuido 3 600 veces, es decir, 60² veces. Así pues:

$$g \propto \frac{1}{r^2}$$

8 **¿Qué le sucede a la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos si la distancia entre ellos se reduce a la cuarta parte? Razona tu respuesta.**

Teniendo en cuenta la expresión de la fuerza gravitatoria y su dependencia del inverso del cuadrado de la distancia, si la distancia se reduce a la cuarta parte, la fuerza aumenta a 16 veces su valor original.

9 **Dos cuerpos esféricos tienen la misma densidad, 6000 kg/m³, pero el radio de uno es el triple del radio del otro. Sabiendo que el radio del menor es de 500 m, calcula el valor de la fuerza gravitatoria entre ambos cuando estén en contacto.**

Expresando las masas en función de la densidad y el volumen de los cuerpos esféricos en la forma:

$$m = \rho \, \frac{4}{3} \, \pi \, r^3$$

Y teniendo presente que $\rho_1 = \rho_2$ mientras que $r_1 = 3\ r_2$, al sustituir estos valores en la expresión de fuerza gravitatoria, desarrollando se obtiene que:

$$F = 3G\rho^2\pi^2 r_2^4 = 4{,}44 \cdot 10^9 \text{ N}$$

10 **¿Cuánto valdría la fuerza entre los cuerpos del problema anterior si la distancia entre ellos se triplicara? ¿Cómo serían en comparación las aceleraciones que actuarían sobre cada uno de ellos?**

a) Si la distancia entre ambos se triplica, la fuerza se hace nueve veces menor, de modo que valdrá $4{,}93 \cdot 10^8$ N.

b) Dado que las aceleraciones que adquirirán son inversamente proporcionales a sus masas, siendo la misma fuerza, entonces el cuerpo de menor radio tendrá una aceleración 27 veces mayor, ya que su masa es 27 veces menor.

11 **La Estación Espacial Internacional orbita a una altura de 430 km sobre la superficie terrestre. Determina el valor de la aceleración gravitatoria a esa altura.**

A partir de la expresión $g = G \dfrac{m_T}{\left(r_T + h\right)^2}$ y usando unidades SI, se obtiene el valor de 8,65 /s².

12 **Determina el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio si su masa es 0,055 veces la masa terrestre y su radio es 0,38 veces el radio de la Tierra. En esas condiciones, ¿hasta qué altura máxima se elevaría un objeto lanzado verticalmente si, con la misma velocidad, en la Tierra se eleva 20 m?**

Determina el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio si su masa es 0,055 veces la masa terrestre y su radio es 0,38 veces el radio de la Tierra. En esas condiciones, ¿hasta qué altura máxima se elevaría un objeto lanzado verticalmente si con la misma velocidad en la Tierra se eleva 20 m?

$$g = G\frac{m_{\text{Mercurio}}}{r^2_{\text{Mercurio}}} = G\frac{0{,}055 \cdot m_1}{\left(0{,}38 \cdot r_1\right)^2} = 3{,}74 \ \text{m/s}^2$$

La altura máxima en un lanzamiento vertical viene dada por:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

Si en la Tierra y en Mercurio el objeto es lanzado con la misma velocidad, por igualación tenemos:

$$2g_{\text{M}}y_{\text{M}} = 2g_{\text{T}}y_{\text{T}}$$

Por tanto:

$$y_{\text{M}} = y_{\text{T}} \cdot \frac{g_{\text{T}}}{g_{\text{M}}} = 52{,}4 \ \text{m}$$

13 **¿En qué porcentaje disminuiría nuestro peso si nos alejáramos a una distancia del centro terrestre igual al doble de su radio?**

Al duplicar la distancia respecto de la superficie terrestre, el valor de g disminuye a la cuarta parte de su valor en la superficie, de modo que nuestro peso se reduce en la misma proporción, es decir, se habrá reducido en un 75 %.

14 **Determina el período de un satélite que orbita a una altura de 2000 km sobre la superficie terrestre. Datos: $m_\text{T} = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r_\text{T} = 6370$ km**

El período viene dado por la expresión:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_T} r^3$$

Sustituyendo los valores ofrecidos en unidades SI, se obtiene:

$$T = 7605 \text{ s} = 2 \text{ h } 7 \text{ min}$$

15 **Mimas, uno de los satélites de Saturno, orbita a una distancia de 185540 km con un período orbital de 0,94 días. Determina la masa de Saturno.**

La masa de Saturno se obtiene de:

$$m_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

donde, sustituyendo los valores ofrecidos en unidades SI, se obtiene que la masa de Saturno es de $5{,}7 \cdot 10^{26}$ kg.

16 **Determina la velocidad orbital de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.**

La velocidad orbital lunar será:

$$v = \sqrt{\frac{G\,m_T}{d_{TL}}} = 1021 \text{ m/s}$$

17 **¿A qué altura sobre la superficie terrestre debe orbitar un satélite artificial si su velocidad debe ser de 6000 m/s?**

Despejando la distancia en la expresión de la velocidad orbital, y teniendo en cuenta que dicha distancia equivale a la suma del radio terrestre y la altura, se obtiene:

$$h = \frac{G\ m_T}{v^2} - r_T = 4{,}747 \cdot 10^6 \text{ m}$$

18 **Teniendo en cuenta el carácter vectorial de la aceleración g de la gravedad, determina a qué distancia del centro terrestre se encuentra el punto donde la resultante de la gravedad terrestre y lunar es cero.**

En ese punto se cumple que $g_\text{T} = g_\text{L}$, luego:

$$G\frac{m_\text{T}}{d^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_\text{T}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8 - d\right)^2}$$

Resolviendo el valor de d (distancia del centro terrestre al punto considerado), se obtiene:

$$d = 346088 \text{ km}$$

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES
FÍSICA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD (página 304)

Enlace web: LENTES GRAVITACIONALES

Incluye una explicación asequible sobre las lentes gravitacionales y una atractiva imagen tomada en 1999 con el telescopio NOT situado en el Observatorio del Roque de los Muchachos de La Palma.

Vídeo: LENTES GRAVITACIONALES EN ACCIÓN

El vídeo muestra el fenómeno conocido como lentes gravitacionales, el cual es usado por astrónomos para estudiar las galaxias lejanas.

Análisis

1. **¿Cuál es la razón por la que la luz se desvía al pasar cerca de un objeto masivo?**

La desviación de la luz es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo producida por campos gravitatorios intensos.

2. **Busca información adicional acerca de la expedición del eclipse solar que corroboró experimentalmente este hecho.**

Los alumnos deben buscar información en internet al respecto.

3. **¿En qué condiciones se forma el anillo de Einstein?**

El anillo de Einstein se forma cuando el objeto oculto se encuentra detrás de un objeto masivo esférico y está en línea con el mismo y el observador.

Propuesta de investigación

4. **Busca información e imágenes en Internet y haz una presentación sobre las lentes gravitacionales y el estado de esta cuestión hoy en día. Infórmate, en particular, acerca de los siguientes conceptos: *strong lensing, weak lensing* y *microlensing.***

Los alumnos deben realizar este trabajo a partir de la documentación que encuentren en internet.

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES
TÉCNICAS DE TRABAJO Y EXPERIMENTACIÓN (página 305)

Cuestiones

1. **Determina el valor de la aceleración de la gravedad en todos los casos. ¿Variará? ¿Por qué? Compara el valor de g obtenido con el que se extraería por el método más habitual del péndulo simple.**

Los alumnos deben comprobar que el valor de g obtenido es independiente de las masas utilizadas. Como complemento de la práctica, pueden determinar el valor de la gravedad a partir del período de un péndulo simple, que viene dado por la expresión (ver unidad 15):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo.

2. **¿Es necesario tomar en consideración las dimensiones o la masa de la polea? ¿Variará de forma significativa el resultado si despreciamos la polea?**

Como se aprecia en la resolución teórica del problema, la masa de la polea sí interviene en el problema. Si esta es suficientemente pequeña en comparación con las masas empleadas, el resultado no variará significativamente.

3. **Elabora un informe de la práctica.**

El informe debe elaborarse siguiendo el protocolo de las publicaciones científicas.

Enlace web: LA MÁQUINA DE ATWOOD

En la página del profesor Ángel Franco García existe un apartado dedicado a esta célebre máquina.

SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y TAREAS FINALES (páginas 306-310)

Dinámica del movimiento circular uniforme

1 **Una esfera de 500 g gira unida a una cuerda describiendo círculos de 40 cm de radio con una frecuencia de 5 s⁻¹. ¿Cuánto vale la fuerza centrípeta que actúa sobre la esfera?**

La fuerza centrípeta en términos de la frecuencia responde a la expresión:

$$F_c = m\omega^2 r = m4\pi^2 f^2 r$$

donde sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$F_c = 4935 \text{ N}$$

2 **Mercurio, con una masa de $3{,}18 \cdot 10^{23}$ kg, orbita en torno al Sol a una distancia media de $5{,}79 \cdot 10^{10}$ m de su centro y con un período orbital de 88 días. Teniendo en cuenta que la Tierra, cuya masa es de $6 \cdot 10^{24}$ kg, tarda 365,25 días en dar una vuelta completa al Sol a una distancia media de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m:**

Las respectivas fuerzas centrípetas sobre Mercurio y la Tierra obedecen a la expresión, en términos de los períodos:

$$F_c = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

Sustituyendo los correspondientes valores ofrecidos en unidades SI, se obtienen como soluciones:

$$F_c(Mercurio) = 1{,}26 \cdot 10^{22} \text{ N}$$
$$F_c(Tierra) = 3{,}56 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

b) Las aceleraciones centrípetas vienen dadas por el cociente entre las fuerzas halladas y las correspondientes masas planetarias, obteniéndose:

$$a_c(Mercurio) = 0{,}0396 \text{ m/s}^2$$
$$a_c(Tierra) = 0{,}00593 \text{ m/s}^2$$

c) Puede comprobarse la identidad entre los productos:

$$a_c(M)d_{MS}^2 = a_c(T)d_{TS}^2$$

3 **Un disco de 3 kg describe círculos de 50 cm de radio en una mesa de aire (sin fricción) unido a una cuerda sometida a una tensión de 80 N. Determina:**

a) **La velocidad lineal del disco.**

b) **La frecuencia y el período de giro de dicho disco.**

a) Dado que la tensión es la fuerza centrípeta, despejando la velocidad de la expresión de la fuerza centrípeta, se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}} = 3{,}65 \text{ m/s}$$

b) La velocidad angular es $\omega = v/r = 7{,}3$ rad/s, por lo que:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}16 \text{ s}^{-1}$$

mientras que el período, inversa de la frecuencia, vale 0,86 s

Leyes de Kepler

4 **Marte orbita a una distancia media de 1,517 UA (unidades astronómicas) alrededor del Sol. A partir de los datos orbitales terrestres, determina la duración del año marciano. Dato: 1 UA = distancia media Tierra-Sol = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m**

Sabemos que para el sistema gravitatorio formado poer el Sol y sus satélites se debe cumplir la tercera ley de Kepler, es decir:

$$\frac{T_{\text{Marte}}^2}{R_{\text{Marte}}^3} = \frac{T_{\text{Tierra}}^2}{R_{\text{Tierra}}^3} \Rightarrow T_{\text{Marte}} = \sqrt{\left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3}\, T_{\text{Tierra}}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$T_{\text{Marte}} = \sqrt{(1{,}517)^3}\, T_{\text{Tierra}} = 1{,}868\, T_{\text{Tierra}} = 682 \text{ días}$$

5 **Teniendo en cuenta que la Luna tarda 27,31 días en dar una vuelta completa a la Tierra a una distancia de 384 000 km de su centro, determina a qué altura sobre la superficie terrestre deben orbitar los satélites geoestacionarios, como el Meteosat o los satélites de señales de TV. Dato: $r_{\text{Tierra}} = 6370$ km**

Tanto la Luna como el satélite orbitan en torno a la Tierra, por lo que el valor de k es el mismo. Aplicando al satélite y la Luna la tercera ley de Kepler e igualando los valores de k, se obtiene:

$$\frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{T_S^2}{r_S^3}$$

Despejando de la igualdad la distancia a la que debe orbitar el satélite, resulta:

$$r_S = r_L \sqrt[3]{\left(\frac{T_S}{T_L}\right)^2} = 42\,343 \text{ km}$$

restando a esta distancia el radio terrestre, obtenemos la altura a la que debe orbitar un satélite geoestacionario y que es, aproximadamente, igual a 36 000 km.

6 **A partir de los datos del problema anterior, comprueba que las aceleraciones centrípetas correspondientes a un satélite geoestacionario y a la Luna cumplen con el inverso del cuadrado de la distancia.**

Se puede verificar que se cumple la identidad:

$$a_c(sat)r_{ST}^2 = a_c(L)\, r_{LT}^2$$

donde las aceleraciones centrípetas vienen dadas por la expresión (en términos del período):

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2}r$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior igualdad, conduce a la identidad que se deriva de la tercera ley de Kepler y que ha servido de base en el problema anterior para determinar la distancia pedida. Es decir:

$$\frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{T_S^2}{r_S^3}$$

Podemos deducir pues, que la ley del inverso del cuadrado de la distancia está implícita en la formulación de la tercera ley de Kepler.

7 **A partir de los datos orbitales terrestres con respecto al Sol, determina cuánto tardan Júpiter y Saturno en completar una órbita alrededor del Sol (en segundos y años terrestres), sabiendo que sus distancias medias a este son de $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m y $1{,}42 \cdot 10^{12}$ m, respectivamente.**

Aplicando la tercera ley de Kepler a ambos planetas y a la Tierra e igualando la constante *k*, obtenemos:

$$\frac{T_{JS}^2}{r_{JS}^3} = \frac{T_{TS}^2}{r_{TS}^3}$$

$$\frac{T_{SS}^2}{r_{SS}^3} = \frac{T_{TS}^2}{r_{TS}^3}$$

Donde los subíndices JS, TS y SS se refieren a Júpiter-Sol, Tierra-Sol y Saturno-Sol respectivamente. Despejando los períodos de Júpiter y Saturno, se obtienen, respectivamente:

$$T_{JS} = 3{,}78 \cdot 10^8 \text{ s} = 11{,}8 \text{ años}$$
$$T_{SS} = 9{,}26 \cdot 10^8 \text{ s} = 29{,}3 \text{ años}$$

Momento angular y su conservación

8 **Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si la única información que disponemos es que el momento de fuerza que actúa sobre ella es cero respecto de un origen no especificado, ¿podemos concluir que la partícula se mueve con velocidad constante?**

No puede concluirse que la velocidad de la partícula sea necesariamente constante. Si el origen se encuentra en la recta del movimiento y la fuerza que actúa sobre la partícula tiene también esa dirección, entonces el momento de fuerza es nulo, pero la partícula no se moverá con velocidad constante.

9 **A partir de los datos ofrecidos en la *actividad 2,* calcula el momento angular de Mercurio y de la Tierra con respecto al centro solar.**

Usando los datos del problema 2 y expresando el momento angular en función del período en la forma:

$$L = mr^2 \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo los datos ofrecidos en dicho problema, obtenemos:

$$L_{\text{Mercurio}} = 8{,}81 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2/\text{s}$$
$$L_{\text{Tierra}} = 2{,}67 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

10 **Determina el momento angular de un protón que se mueve a una velocidad de 0,9999 veces la de la luz en el vacío con respecto al centro del colisionador circular de partículas LHC del CERN (Organización Europea para la Investigación Nuclear), sabiendo que la longitud de este es de 26 659 m. Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $m_{\text{protón}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg**

Teniendo en cuenta que la longitud del LHC es 26 659 m y que $L = 2\pi r$, entonces el radio de curvatura es de 4243 m, por lo que el momento angular del protón con esa velocidad es:

$$L = mvr$$

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$L_{\text{protón}} = 2{,}11 \cdot 10^{-15} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

11 **Una partícula de 800 g se encuentra en el punto (5, 2, 4) moviéndose con una velocidad $\vec{v} = 10\vec{i} + 5\vec{j}$ m/s . Determina la expresión vectorial de su momento angular con respecto al punto (1, 0, 1), y su módulo.**

El vector de posición con respecto al punto citado es:

$$\vec{r} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{k} \text{ m}$$

Mientras que su momento lineal es:

$$\vec{p} = m\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{j} \text{ kg m/s}$$

Por tanto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 24\vec{j} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Cuyo módulo vale 26,8 kg m²/s.

12 **Un balón de 400 g es lanzado verticalmente hacia abajo, en la dirección del eje *Z,* con $\vec{v} = -10\vec{j}$ m/s desde el punto de coordenadas (*x, y, z*) = (0, 2, 10) m. Determina:**

a) **El momento de fuerza que actúa sobre el balón con respecto al punto (0, 0, 0).**

b) **¿Se conserva el momento angular del balón, respecto de dicho punto, durante su descenso hacia al suelo?**

c) **El momento angular inicial del balón respecto del punto (0, 0, 0).**

d) **El momento angular del balón respecto del mismo origen a los 0,5 s de haber sido lanzado.**

e) **¿Qué resultados se obtendrían en los anteriores apartados si hubiésemos elegido el punto (0, 2, 0) como origen de referencia?**

Considera $g = 10$ m/s² en tus cálculos.

a) Considerando $g = 10$ m/s², la fuerza que actúa sobre el balón es su propio peso, de modo que $\vec{F} = -mg\,\vec{k} = -4\vec{k}$ N. Por otra parte, el vector de posición en el instante inicial es:

$$\vec{r} = 2\vec{j} + 10\vec{k} \text{ m}$$

Por lo que el momento de fuerza actuante es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8\,\vec{i} \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) l momento angular no se conserva, ya que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ no tienen la misma dirección.

c) El momento angular inicial del balón es, teniendo en cuenta que $m\vec{v}_o = -4\vec{k}$ kg m/s, siendo $\vec{v}_o = -10\,\vec{k}$ m/s:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8\,\vec{i} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

d) A los 0,5 segundos de haber sido lanzado, la velocidad del balón es:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t = -15\,\vec{k} \text{ m/s}$$

Por lo que el momento lineal resulta: $-6\,\vec{k}$ kg m/s

Por otra parte, la posición del balón en ese instante es:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = 2\vec{j} + 3{,}75\ \vec{k}\ \text{m}$$

Por tanto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12\ \vec{i}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

Como puede comprobarse, el momento angular no se conserva.

e) Los resultados anteriores habrían sido cero en todos los casos, dado que los vectores de posición, momento y fuerza tendrían la misma dirección.

13 **En una experiencia de laboratorio, una estudiante impulsa un disco de 200 g de modo que este describe una órbita circular de 50 cm de radio sobre una mesa de aire (sin fricción) con un período de 1,2 s. Su pareja de laboratorio, que se encuentra debajo de la mesa, ejerce la tensión necesaria sobre la cuerda para que el disco describa círculos.**

a) Calcula el valor del momento angular del disco respecto del centro del círculo.

b) Si, al cabo de un tiempo, la tensión aumenta de modo que los círculos descritos son de 20 cm de radio, ¿qué ocurre con el momento angular del disco? ¿Cuánto valdrá el período?

a) El momento angular del disco viene dado por:

$$L = m\,r^2\,\frac{2\pi}{T}$$

donde, sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$L = 0{,}26\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

b) Puesto que la fuerza que actúa es centrípeta (un caso de fuerza central), el momento angular se mantiene constante, de modo que el nuevo período valdrá:

$$T = m\ r^2\ \frac{2\pi}{L} = 0{,}25\ \text{s}$$

14 **El satélite Meteosat, geoestacionario, tiene una masa de 2000 kg. Determina, usando los resultados obtenidos en la *actividad* 5:**

a) Su velocidad areolar en m²/s.

b) Su momento angular con respecto al centro terrestre.

a) La velocidad areolar viene dada por:

$$v_{areolar} = \frac{1}{2}\,r^2\omega = \frac{1}{2}r^2\,\frac{2\pi}{T}$$

donde, sustituyendo los resultados obtenidos en la actividad 5, se obtiene:

$$v_{areolar} = 6{,}52\cdot 10^{10}\ \text{m}^2/\text{s}$$

b) A partir de la relación entre la velocidad areolar y el momento angular, tenemos que:

$$L = 2m\ v_{areolar} = 2{,}61\cdot 10^{14}\ \ \text{kg m}^2/\text{s}$$

15 **El cometa Halley se encuentra a una distancia del Sol de 35,1 UA en el afelio, mientras que en el perihelio la distancia es de 0,57 UA. ¿Cuál es la relación entre las velocidades de dicho cometa en el perihelio y en el afelio?**

Por conservación del momento angular y suponiendo que su masa no varía apreciablemente, se obtiene que:

$$v_{af}r_{af} = v_{ph}r_{ph}$$

Por lo que la relación de sus velocidades es:

$$\frac{v_{ph}}{v_{af}} = \frac{r_{af}}{r_{ph}} = 61{,}6$$

Ley de gravitación universal y sus consecuencias

16 **Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

a) La Tierra atrae a todos los cuerpos en su seno con la misma fuerza y les comunica, por consiguiente, la misma aceleración.

b) La fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos es proporcional a la masa de cada uno de ellos.

c) La fuerza es distinta para cada cuerpo, como lo es también la aceleración que les comunica.

a) Es falso. La Tierra atrae a los cuerpos que se encuentran en su seno con una fuerza que es proporcional a la masa del cuerpo atraído.

b) Cierto, como se ha comentado en el apartado anterior.

c) Falso. La fuerza es distinta, pero la aceleración es la misma.

17 **¿Pesa todo cuerpo material? ¿Tiene masa todo cuerpo con peso? ¿Y tiene masa todo cuerpo material sin peso?**

Los cuerpos materiales solo pesan en presencia de campos gravitatorios. El peso, por tanto, no es una propiedad de la materia, sino que es una propiedad de la materia en campos gravitacionales. Sin embargo, la masa es una propiedad de la materia independientemente de la existencia de campos gravitatorios. Por tanto, todo cuerpo está dotado de masa.

18 **La masa de la Luna es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el de la Tierra. Sabiendo que, en la superficie terrestre *g* vale 9,8 m/s², calcula su valor en la superficie lunar.**

La aceleración en la superficie lunar viene dada por:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}012\ \ m_T}{\left(0{,}27\ \ r_T\right)^2} = \frac{0{,}012}{0{,}27^2}g_T = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

19 **Un cuerpo esférico A tiene un radio de 400 m y una densidad de 6000 kg/m³, mientras que otro cuerpo B tiene un radio de 100 m y una densidad de 4000 kg/m³. Determina:**

a) La fuerza gravitatoria entre ellos cuando ambos estén en contacto.

b) El valor de dicha fuerza cuando la distancia entre ellos se multiplique por 10.

Con los datos de densidad y radio ofrecidos, teniendo en cuenta que son cuerpos esféricos, obtenemos que las masas de cada uno de los cuerpos son:

$$m_A = 1{,}6 \cdot 10^{12}\ \text{kg}$$
$$m_B = 1{,}67 \cdot 10^{10}\ \text{kg}$$

Por tanto, la fuerza con que se atraen cuando están en contacto (r entre ellos = 500 m) es:

$$F = G\,\frac{m_A m_B}{r^2} = 7{,}13 \cdot 10^6\ \text{N}$$

b) Si la distancia aumenta en 10 veces su valor inicial, la fuerza disminuye 100 veces respecto de su valor inicial, por lo que ahora valdrá $7{,}13 \cdot 10^4$ N

20 **Un cuerpo que se deja caer sobre la superficie terrestre desde una altura *h* llega al suelo con una velocidad *v*. ¿Cuánto debería valer, comparativamente, la altura *h*' en la Luna para que llegara al suelo con la misma velocidad que en la Tierra?**

Si consideramos que $g_L = 1/6\ g$, y dado que la velocidad con que llega al suelo un cuerpo que deja caer desde una altura h es $v = \sqrt{2gh}$, para que la velocidad al llegar al suelo fuese igual, debe dejarse caer desde una altura seis veces superior. Es decir, $h' = 6h$.

21 **Deduce la expresión que permite relacionar el valor de la gravedad superficial *g* de un planeta esférico con su densidad media ρ y con su radio *r*.**

A partir de la expresión general:

$$g = G\,\frac{m}{r^2}$$

Sustituyendo $m = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3$ en la anterior expresión, se obtiene que:

$$g = \frac{4}{3}\,G\pi\rho r$$

Expresión muy interesante que relaciona la aceleración gravitatoria con la densidad de un planeta y su radio.

22 **Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, y que el radio de la Luna es 0,27 veces el radio terrestre determina la relación entre las densidades medias $\rho_{\text{Luna}}/\rho_{\text{Tierra}}$.**

Usando para ambos cuerpos la expresión obtenida en la actividad anterior y dividiéndolas entre sí, llegamos a que:

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{g_L\, r_T}{g_L\, r_L} = 0{,}62$$

23 **¿A qué altura sobre la superficie terrestre debemos encontrarnos para que nuestro peso se reduzca a la mitad? Expresa dicha altura en función del radio terrestre.**

Debe cumplirse a esa distan cia que:

$$\frac{1}{2}G\,\frac{m}{r_T^2} = G\,\frac{m}{r^2}$$

En consecuencia:

$$r = \sqrt{2}\, r_T$$

Puesto que $r = r_T + h$ finalmente se obtiene que:

$$h = \left(\sqrt{2} - 1\right) r_T$$

24 **Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio respecto del centro del planeta, con un período de revolución de 7,65 h. El otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determina:**

a) **La masa de Marte.**

b) **El período de revolución de Deimos.**

c) **La velocidad orbital del satélite Deimos.**

d) **El valor del momento angular de Deimos respecto del centro de Marte.**

a) A partir de los datos de Fobos puede determinarse la masa de Marte. Igualando la fuerza gravitatoria entre marte y Fobos a la fuerza centrípeta que actúa sobre Fobos, se obtiene:

$$G\,\frac{m_M m_F}{r^2} = m_F\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$$

De donde despejando la masa de Marte, se obtiene:

$$m_M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Que resulta ser de $6{,}44 \cdot 10^{23}$ kg

b) A partir de la tercera ley de Kepler aplicado a ambos satélites de Marte, se obtiene finalmente que:

$$T_D = T_F\sqrt{\left(\frac{r_D}{r_F}\right)^3} = 30{,}2\ \text{h}$$

c) La velocidad orbital del satélite Deimos viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{G\, m_M}{r_{FM}}} = 1353\ \text{m/s}$$

d) El momento angular de Deimos respecto del centro de Marte es:

$$L = m_D\, v\, r = 7{,}6 \cdot 10^{25}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

25 **¿A qué altura sobre la superficie terrestre orbita un satélite cuyo período es de 5 h?**

Dato: $m_{\text{Tierra}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r_{\text{Tierra}} = 6370$ km

A partir de la consideración del carácter centrípeto de la fuerza gravitatoria:

$$G\,\frac{m_T m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$$

Despejando la distancia r se obtiene:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\, m_T T^2}{4\,\pi^2}} = 14\,865\ \text{km}$$

Restando el radio terrestre a esta distancia, se obtiene:

$$h = 8\,495\ \text{km}$$

26 ¿A qué altura sobre la superficie terrestre debe orbitar un satélite si su velocidad orbital es de 6,9 km/s?

Procediendo de modo similar al expuesto en la resolución de la actividad 17, obtenemos que:

$$h = \frac{G\, m_T}{v^2} - r_T = 2{,}036 \cdot 10^6 \text{ m}$$

O bien, 2036 km

27 Marte tiene un radio de 3390 km y una densidad media de 3930 kg/m³. A partir de estos datos, halla:

a) El valor de la gravedad superficial en Marte.

b) Hasta qué altura ascendería en Marte un cuerpo que se lanzase con una velocidad inicial de 10 m/s.

a) El valor de la aceleración gravitatoria en función de la densidad es:

$$g = \frac{4}{3} G \pi \rho r$$

donde sustituyendo los valores propios de Marte, se obtiene:

$$g_M = 3{,}7 \text{ m/s}^2$$

b) Su altura máxima vendría dada por la expresión:

$$y_m = \frac{v_o^2}{2\,g}\ 13{,}5 \text{ m}$$

28 Sabiendo que la distancia Tierra-Luna es de 384000 km y que la masa lunar es 0,012 veces la terrestre, determina a qué distancia del centro terrestre se encuentra el punto en el que la aceleración gravitatoria debida a la Tierra es el doble que la debida a la Luna.

En ese punto, a una distancia x del centro terrestre, debe cumplirse que:

$$G\frac{m_T}{x^2} = 2G\frac{m_L}{(d-x)^2} = 2G\frac{0{,}012 m_T}{(d-x)^2}$$

Resolviendo x se obtiene:

$$x = 332\,490 \text{ km}$$

29 ¿Cuál debe ser la velocidad orbital de los satélites geoestacionarios?

Teniendo en cuenta el dato obtenido en la actividad 5, la velocidad orbital de un satélite geoestacionario será:

$$v = \sqrt{\frac{G\, m_T}{r}} = 3073 \text{ m/s}$$

30 El satélite de Júpiter llamado Ío tiene un período de revolución de 42 h 29 min y su distancia media a Júpiter es de 422000 km.

a) ¿Cuál es la masa de Júpiter?

b) ¿Cuál es la velocidad orbital de Ío?

c) ¿Cuánto vale la velocidad areolar de Ío?

d) ¿A qué distancia de Júpiter se encuentra Europa, otro de sus satélites, si su período de revolución es de 3,55 días?

e) Si la masa de Ío es $8{,}94 \cdot 10^{22}$ kg, ¿cuánto vale su momento angular con respecto al centro de Júpiter?

a) A partir de la tercera ley de Kepler, y sustituyendo los valores ofrecidos, se calcula el valor de la constante k en el caso de Júpiter:

$$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(152\,940)^2}{\left(4{,}22 \cdot 10^8\right)^3} = 3{,}112 \cdot 10^{-16} \text{ s}^2\text{m}^{-3}$$

b) Después se halla la masa de Júpiter:

$$m_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{kG} = 1{,}9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

c) La velocidad orbital de Ío será:

$$v = \sqrt{\frac{G\, m_J}{r}} = 17\,329 \text{ m/s}$$

d) La velocidad areolar de Ío es:

$$v_{areolar} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{1}{2} r^2 \frac{2\pi}{T} = 3{,}65 \cdot 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}$$

e) Resolviendo de modo similar al expuesto en la actividad 5, se obtiene:

$$r = r_{Io} \sqrt[3]{\left(\frac{T_E}{T_{Io}}\right)^2} = 671\,144 \text{ km}$$

f) El momento angular de Ío será:

$$L = m\,v\,r = 6{,}53 \cdot 10^{35} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

SOLUCIONES DE LA EVALUACIÓN FINAL (página 311)

1. Una pelota de 100 g de masa unida a una cuerda describe círculos de 1,2 m de radio con una frecuencia de 8 s^{-1}. ¿Cuánto vale la fuerza centrípeta que actúa sobre la pelota?

En términos de la frecuencia, la fuerza centrípeta se expresa como:

$$F_c = m\,\omega^2 r = m\,4\pi^2\, f^2\, r = 303\ \text{N}$$

2. Un avión de 7 toneladas vuela a 10 000 m de altura con una velocidad de 800 km/h. ¿Cuál es la magnitud del momento angular del avión con respecto a un observador en tierra? ¿Cambia dicho valor a medida que el avión se mueve en línea recta?

El valor del momento angular del avión respecto del observador en Tierra es, usando las unidades SI:

$$L = mv = 1{,}55 \cdot 10^{10}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

Al moverse con MRU, dicho valor no cambia a medida que el avión se desplaza.

3. Una partícula de 3 kg de masa se mueve con una velocidad constante $\vec{v} = 15\vec{i} + 5\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al punto (2, 1, 0) cuando la partícula se encuentre en el punto de coordenadas (6, 8, 4).

El vector de posición de la partícula respecto de ese punto es:

$$\vec{r} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}\ \text{m}$$

Y su momento lineal es:

$$\vec{p} = m\vec{v} = 45\vec{i} + 15\vec{j}$$

Por tanto, su momento angular es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & 4 \\ 45 & 15 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -60\vec{i} + 180\vec{j} - 255\vec{k}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

4. Suponiendo que la Tierra describe una órbita circular alrededor del Sol, de $r = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m y con un período de 365,25 días, ¿cuánto vale la velocidad areolar de la Tierra? ¿Cuánto vale su momento angular si su masa es de $6 \cdot 10^{24}$ kg?

Resolviendo de modo idéntico al ejercicio 14 de actividades y tareas, obtenemos:

$$v_{areolar} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{1}{2}\, r^2\, \frac{2\pi}{T} = 2{,}23 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

siendo su momento angular igual a:

$$L = 2\text{m}\ v_{areolar} = 2{,}67 \cdot 10^{40}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

5. Un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razona si su velocidad lineal, su velocidad areolar, su momento lineal y su momento angular es mayor, menor o igual en el afelio que en el perihelio.

Por conservación del momento angular, la velocidad lineal es mayor en el perihelio que en el afelio, como se establece en la segunda ley de Kepler. Si la masa del planeta permanece invariable, su velocidad areolar es constante. El momento lineal varía del mismo modo que lo hace la velocidad lineal. Por último, en todo movimiento planetario se conserva el momento angular y es igual en afelio y perihelio.

6. Júpiter se encuentra a una distancia 5,2 veces mayor del Sol que la Tierra. Con este dato, determina la duración del año jupiteriano en días terrestres.

Dato: año terrestre = 365 d

A partir de la tercera ley de Kepler aplicada a la Tierra (T) y a Júpiter (J) se obtiene finalmente:

$$T_J = T_T \sqrt{\left(\frac{r_J}{r_T}\right)^3}$$

Sustituyendo los datos se obtiene que el año jupiteriano son 11,8 años = 4 307 días terrestres

7. Una masa de 100 kg y otra de 800 kg se encuentran separadas una distancia de 30 cm. Determina la fuerza gravitatoria que actúa entre ellas. ¿Cuál será su nuevo valor si la distancia entre las masas se reduce a la quinta parte?

La fuerza gravitatoria entre ambas masas es:

$$F = G\frac{m_A m_B}{r^2} = 5{,}93 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

Si la distancia se reduce a la quinta parte, la fuerza se multiplica por 25, resultando ser de $1{,}48 \cdot 10^{-3}$ N.

8. ¿A qué distancia del centro terrestre, a lo largo de la recta que une la Tierra y la Luna, se encuentra el punto en el que la aceleración gravitatoria terrestre es el triple de la lunar?

Datos: $m_{\text{Luna}} = 0{,}012$ veces la masa terrestre; $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km

Resolviendo de modo similar al desarrollado en el problema 28, la condición es:

$$G\frac{m_T}{x^2} = 3G\frac{m_L}{(d-x)^2} = 3G\frac{0{,}012\ m_T}{(d-x)^2}$$

Resolviendo x se obtiene que dicha distancia es de 322 760 km del centro terrestre.

9. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre debe situarse un satélite artificial para que orbite con un período de 6 horas? ¿Qué velocidad orbital tendrá en esas circunstancias?

Datos: $r_{\text{Tierra}} = 6\,370$ km; $m_{\text{Tierra}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg

Procediendo de modo similar al expuesto en el ejercicio 25, obtenemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\, m_T T^2}{4\pi^2}} = 16\,791 \text{ km}$$

Por lo que la altura será de 10 421 km

A su vez, la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G\, m_T}{r}} = 4\,882 \text{ m/s}$$

10. Miranda, un satélite de Urano, orbita alrededor del planeta a una distancia de 129 872 km con un período de 1,41 días. Sabiendo que su masa es de 6,6 · 10^{19} kg, calcula la masa del planeta Urano, la velocidad areolar de Miranda, suponiendo que su órbita es circularl a velocidad orbital de Miranda y su momento angular con respecto al centro del planeta.

Resolviendo de un modo muy similar al del problema 30, obtenemos:

a) La masa de Urano viene dada por la expresión:

$$m_U = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = 8{,}73 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

b) La velocidad areolar de Miranda es:

$$v_{areolar} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{1}{2} r^2 \frac{2\pi}{T} = 4{,}35 \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}$$

c) La velocidad orbital de Miranda responde a la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G\, m_U}{r}} = 6\,696 \text{ m/s}$$

d) Su momento angular es:

$$L = mvr = 5{,}74 \cdot 10^{31} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

RÚBRICA DE ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

Estándar de aprendizaje evaluable	Herramientas de evaluación (actividades del LA)	Excelente 3	Satisfactorio 2	En proceso 1	No logrado 0	Puntos
1.1. Aplica el concepto de fuerza centrípeta para resolver e interpretar movimientos circulares.	A: 1 AT: 1-3	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
2.1. Comprueba las leyes de Kepler a partir de datos astronómicos planetarios. 2.2. Deduce períodos orbitales a partir de la tercera ley.	A: 2 AT: 4-7	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
5.1. Aplica la ley de conservación del momento angular y relacionarla con la segunda ley de Kepler.	A: 3-6 ER 1,2 AT: 8-15	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
6.1. Describe el movimiento orbital como composición de movimientos y relacionarlo con el lanzamiento horizontal.	A: 7	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
7.1. Expresa la fuerza de la atracción gravitatoria entre dos cuerpos cualesquiera, conocidas las variables de las que depende, estableciendo cómo inciden los cambios en estas sobre aquella.	A: 8-10 AT: 16, 19	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	
8.1. Determina valores de aceleración gravitatoria en función de las características planetarias. 9.1 Resuelve velocidades orbitales en función de las características planetarias.	A: 11-18 ER: 3-6 AT: 17, 18, 20-30	Resuelve de manera adecuada los conceptos, identificando todos los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones.	Resuelve los conceptos con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones.	Responde de manera totalmente errónea o no responde.	

A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas.

PRUEBA DE EVALUACIÓN A

1. **Un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razona si las siguientes magnitudes son mayores, menores o iguales en el afelio que en el perihelio:**

a) **Su velocidad lineal.** **c)** **Su momento lineal.**

b) **Su velocidad areolar.** **d)** **Su momento angular.**

Dado que la fuerza actuante es central, el momento angular permanece constante, por lo que:

a) La velocidad lineal en el afelio debe ser menor que en el perihelio, pues:

$$L_{afelio} = L_{perihelio} \Rightarrow mv_a r_a = mv_p r_p$$

Dado que $r_a > r_p \Rightarrow v_a < v_p$

b) Puesto que la constancia de L es congruente con la 2.ª ley de Kepler, entonces la velocidad areolar es constante.

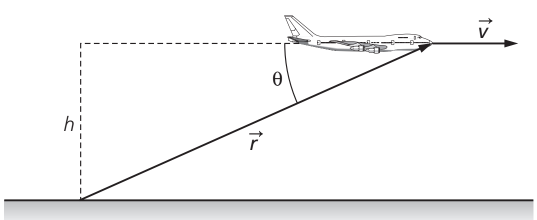
c) Varía en módulo (además de en dirección) según los distintos valores de velocidad lineal. Es menor en el afelio.

d) Permanece constante, como ya se ha explicado.

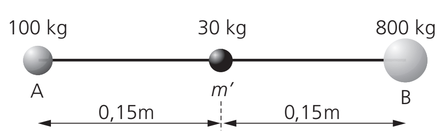
2. **Un avión de 7 toneladas vuela a 10 000 m de altura con una velocidad de 800 km/h. ¿Cuál es la magnitud del momento angular del avión respecto de un observador en Tierra? ¿Cambia dicho valor a medida que el avión se mueve en línea recta?**

Si $L = mvr$ sen θ, dado que r sen $\theta = h$, entonces:

$$L = mvh = 7000 \text{ kg} \cdot 222,2 \text{ m/s} \cdot 10\,000 \text{ m} =$$
$$= 1,55 \cdot 10 \text{ m} = 1,55 \cdot 10^{10} \text{ kg m}^2\text{/s}$$



3. **Una masa de 100 kg y otra de 800 kg se encuentran separadas una distancia de 30 cm. Determina la fuerza neta que actúa sobre una tercera masa de 30 kg situada en el punto medio entre ambas. ¿En qué posición distinta del infinito no apreciaría fuerza alguna esta tercera masa?**



La fuerza neta es: $\vec{F} = \dfrac{Gm'}{r^2}(m_B - m_A)\vec{i}$

siendo su valor:

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{30}{0,15^2} \cdot (800 - 100) = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

Llamando x a la distancia, medida desde la masa A, en la que la fuerza neta es cero, se cumple la igualdad:

$$G\frac{m_A m'}{x^2} = G\frac{m_B m'}{(0,3 - x)^2}$$

$$(0,3 - x)^2 \; m_A = x^2 m_B \Rightarrow x = \frac{0,3\sqrt{m_A}}{\sqrt{m_A} + \sqrt{m_B}} = 0,078 \text{ m}$$

4. **Dos planetas A y B presentan la misma aceleración gravitatoria superficial, pero el volumen de A es 64 veces mayor que el de B. Determina cuál es la razón entre sus densidades.**

La aceleración gravitatoria puede expresarse como:

$$g = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

Si los valores de g en A y B son iguales, se cumplirá que:

$$\rho_A r_A = \rho_B r_B \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{r_A}{r_B}$$

Como $V_A = 64\, V_B$ y $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, entonces $r_A = 4r_B$, por lo que $\dfrac{\rho_B}{\rho_A} = 4$. La densidad del planeta B es 4 veces mayor que la del planeta A.

5. **¿A qué altura sobre la superficie terrestre debe situarse un satélite artificial para que orbite con un período de 6 horas?**

Datos: ***radio terrestre*** **= 6 370 km;** ***masa terrestre*** **= $6 \cdot 10^{24}$ kg ; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg²**

El período de un movimiento orbital viene determinado por:

$$G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{4\pi}{T^2}r \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{Gm_T}{4\pi^2} \cdot T^2}$$

Por lo que: $r = 16\,785\,783 \text{ m} \approx 16\,786 \text{ km}$

Así pues, la altura sobre la superficie terrestre es:

$$h = r - r_T = 10\,416 \text{ km}$$

6. **Júpiter se encuentra a una distancia 5,2 veces mayor del Sol que la Tierra. Con este dato determina la duración del año jupiteriano en días terrestres.**

Dato: año terrestre = 365 días

Aplicando la tercera ley de Kepler a la Tierra y a Júpiter y dividiendo ambas identidades se obtiene:

$$T_J = T_T \sqrt[3]{\left(\frac{d_J}{d_T}\right)^3} = 365 \cdot \sqrt{5,2^3} = 4\,328 \text{ días}$$

7. **¿A qué distancia del centro terrestre, a lo largo de la recta que une la Tierra y la Luna, se encuentra el punto en el que la aceleración gravitatoria terrestre es el triple de la lunar?**

Datos: masa lunar = 0,012 veces la masa terrestre; distancia Tierra-Luna = 384 000 km

Si x es la distancia desde el centro terrestre, se ha de cumplir:

$$G\frac{m_T}{x^2} = 3G\frac{m_L}{(d - x)^2} = 3G \cdot \frac{0,012 \; m_T}{(d - x)^2}$$

$$(d - x)^2 = 0,036\, x^2$$

$$x = \frac{d}{1 + \sqrt{0,036}} = 322\,760 \text{ km}$$

PRUEBA DE EVALUACIÓN B

1. En un movimiento circular uniforme, el período:
   a) Es directamente proporcional a la fuerza centrípeta que actúa.
   b) **Varía con el inverso de $\sqrt{F_c}$.**
   c) Varía con el inverso de F_c^2.
2. La segunda ley de Kepler establece que:
   a) La velocidad de traslación de los planetas alrededor del Sol permanece constante.
   b) **La velocidad areolar de los planetas alrededor del Sol permanece constante.**
   c) **El producto del valor de la velocidad por la distancia correspondientes al afelio y el perihelio son iguales.**
3. Si un cuerpo se mueve con velocidad constante:
   a) **Su momento angular es constante con respecto a un punto situado fuera de su recta de movimiento.**
   b) Su momento angular depende de su distancia en cada momento con respecto al punto.
   c) **Barre áreas iguales en tiempos iguales.**
4. Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza, su momento angular:
   a) Varía siempre.
   b) Se hace cero.
   c) **Permanece constante si la fuerza es central.**
5. Una partícula de masa *m* se mueve en una recta con velocidad constante *v*. Su momento angular respecto de un punto situado fuera de la recta de movimiento a una distancia *d* es:
   a) Cero.
   b) **$m\, v_0\, d$.**
   c) $m\, v_0\, d^2$.
6. La fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo:
   a) **Depende de la masa del cuerpo.**
   b) Es independiente de la masa del cuerpo.
   c) Es cero si el cuerpo orbita alrededor de la Tierra.
7. La aceleración que la Tierra comunica a un cuerpo:
   a) Depende de la masa del cuerpo.
   b) **Es independiente de la masa del cuerpo.**
   c) Es cero si el cuerpo orbita alrededor de la Tierra.
8. Si la distancia que separa dos cuerpos se reduce a la mitad, entonces la fuerza gravitatoria entre ellos:
   a) Se reduce a la cuarta parte.
   b) Se reduce a la mitad.
   c) **Aumenta al cuádruplo.**
9. Para que el peso de un objeto en la superficie terrestre se reduzca a la mitad, debe situarse a una distancia del centro terrestre igual a:
   a) **$\sqrt{2}$ veces el radio terrestre.**
   b) 2 veces el radio terrestre.
   c) $(\sqrt{2} - 1)$ veces el radio terrestre.