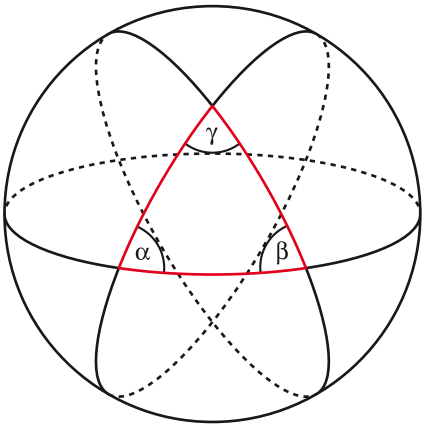
Resuelve

Página 145

Geometría elíptica

Una de las posibles geometrías no euclídea se llama elíptica. Y una versión sencilla de la misma se desarrolla sobre una superficie esférica. Las "rectas", en este caso, serían las circunferencias máximas (intersección de la superficie esférica con un plano que pasa por el centro).

Esta geometría cumple los primeros cuatro postulados de Euclides.



Triángulo de la geometría elíptica

Comprueba que:

a) Dos "rectas" siempre se cortan.

b) Por un punto exterior a una "recta" no se puede trazar ninguna otra "recta" que no corte a la primera.

c) En esta geometría elíptica no se cumple el quinto postulado de Euclides.

a) Sean R_1 y R_2 "rectas" en la geometría elíptica, y S la superficie esférica.

$R_1 = \pi_1 \cap S$; $R_2 = \pi_2 \cap S$

Como los dos planos pasan por el centro, se cortan $\rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$

Los puntos $P = r \cap S$ verifican:

$$P \in R_1 \text{ y } P \in R_2 \rightarrow P \in R_1 \cap R_2 \rightarrow R_1 \text{ y } R_2 \text{ se cortan.}$$

b) No es posible puesto que todas las rectas se cortan.

c) El quinto postulado de Euclides:

"Por un punto P exterior a una recta r del plano solo se puede trazar una recta paralela a ella".

Si fuera cierto, por un punto P exterior a una recta r del plano se puede trazar una recta que no la corta, pero hemos visto que eso es imposible, luego no se cumple el postulado.

1 Sistema de referencia en el espacio

Página 146

1 **Representa los puntos siguientes:**

$$P(5, 2, 3),\ Q(3, -2, 5),\ R(1, 4, 0)$$

$$S(3, 0, 4),\ T(0, 6, 3),\ U(0, 0, 4)$$

$P(5, 2, 3)$

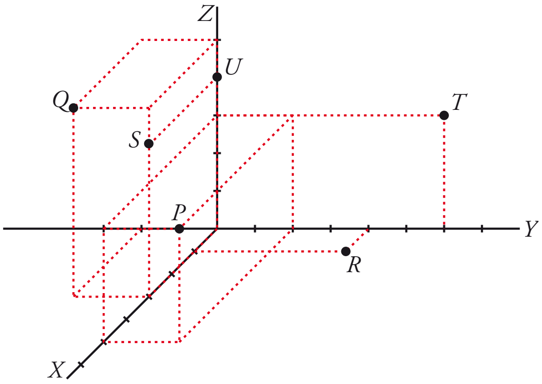
$Q(3, -2, 5)$

$R(1, 4, 0)$

$S(3, 0, 4)$

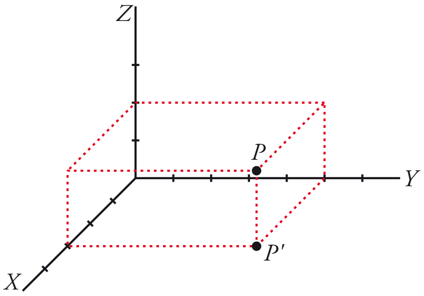
$T(0, 6, 3)$

$U(0, 0, 4)$



2 **Sitúa sobre unos ejes coordenados un punto P. Proyéctalo, P', sobre el plano XY. Sigue el proceso hasta determinar las coordenadas de P. (Observa que el único paso no determinado es decidir la situación de P').**

$P(3, 5, 2)$



2 Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos

Página 148

1 Calcula m y n para que los puntos $P(7, -1, m)$, $Q(8, 6, 3)$ y $R(10, n, 9)$ estén alineados.

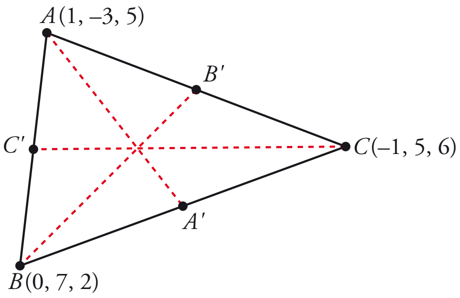
$\overrightarrow{PQ}\ (1, 7, 3-m)$, $\overrightarrow{QR} = (2, n-6, 6)$

P, Q, R están alineados $\rightarrow$ $\overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{QR}$ $\rightarrow$ $\dfrac{2}{1} = \dfrac{n-6}{7} = \dfrac{6}{3-m}$

$\dfrac{n-6}{7} = 2 \rightarrow n = 20 \qquad \dfrac{6}{3-m} = 2 \rightarrow m = 0$

Luego $m = 0$ y $n = 20$.

2 Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, -3, 5)$, $B(0, 7, 2)$ y $C(-1, 5, 6)$.



$$C' = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{-3+7}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}\right)$$

$$A' = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{7+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 6, 4\right)$$

$$B' = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{5+6}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{11}{2}\right)$$

3 Dados los puntos $A(-3, 5, 11)$ y $B(3, 5, -1)$:

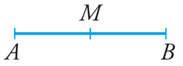
a) Halla el punto medio del segmento AB.

b) Halla el simétrico de B respecto de A.

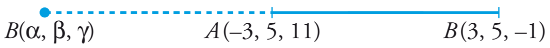
c) Obtén un punto M de AB tal que $\overline{AM} = 2\overline{MB}$.

d) Obtén un punto N de AB tal que $\overline{NB} = 3\overline{AN}$.

a) $M_{AB} = \left(\dfrac{-3+3}{2}, \dfrac{5+5}{2}, \dfrac{11-1}{2}\right) = (0, 5, 5)$



b) Sea $B'(\alpha, \beta, \gamma)$ el simétrico de B respecto de A. Así:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+\alpha}{2} = -3 \rightarrow \alpha = -9 \\ \dfrac{5+\beta}{2} = 5 \rightarrow \beta = 5 \\ \dfrac{-1+\gamma}{2} = 11 \rightarrow \gamma = 23 \end{array}\right\} B'(-9, 5, 23)$$

c) Sea $M(x, y, z)$:

$(x+3), y-5, z-11) = 2(3-x, 5-y, -1-z) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3 = 6-2x \\ y-5 = 10-2y \\ z-11 = -2-2z \end{array}\right\} \rightarrow x = 1,\ y = 5,\ z = 3 \rightarrow M(1, 5, 3)$$

d) Sea $N(x, y, z)$:

$(3-x, 5-y, -1-z) = 3(x+3, y-5, z-11) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3-x = 3x+9 \\ 5-y = 3y-15 \\ -1-z = 3z-33 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{-3}{2},\ y = 5,\ z = 8 \rightarrow N\left(\frac{-3}{2}, 5, 8\right)$$

3 Ecuaciones de la recta

Página 151

1 Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos:

$$A(-5, 3, 7) \text{ y } B(2, -3, 3)$$

Vector dirección: $(2, -3, 3) - (-5, 3, 7) = (7, -6, -4)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -3 - 6\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-4}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{-6} \to -6x + 12 = 7y + 21 \\ \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{z-3}{-4} \to -4x + 8 = 7z - 21 \end{array}\right\} \to \begin{cases} 6x + 7y \qquad + 9 = 0 \\ 4x + \qquad 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

2 Halla seis puntos de la recta anterior diferentes de A y B.

Dándole valores a λ, obtenemos:

$\lambda = 1 \to (9, -9, -1)$

$\lambda = 2 \to (16, -15, -5)$

$\lambda = 3 \to (23, -21, -9)$

$\lambda = 4 \to (30, -27, -13)$

$\lambda = -2 \to (-12, 9, 11)$

$\lambda = -3 \to (-19, 15, 15)$

(Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$, obtenemos los puntos que teníamos).

3 Comprueba si alguno de los puntos que se dan a continuación pertenecen o no a la recta r:

$$A(5, 0, 0) \quad B(3, 3, 4) \quad C(15, -15, 4) \quad D(1, 6, 0) \qquad r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = \quad 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

$A \notin r$, pues $z \neq 4$

$$B: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 3 \to \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \to \lambda = 1 \\ 4 = 4 \end{cases}\right\} B \in r$$

$$C: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 15 \to \lambda = -5 \\ 3\lambda = -15 \to \lambda = -5 \\ 4 = 4 \end{cases}\right\} C \in r$$

$D \notin r$, pues $z \neq 4$

5 Ecuaciones del plano

Página 155

1 a) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ y $R(6, 3, 8)$.

b) Halla otros tres puntos del plano.

c) Calcula el valor de n para el que el punto $A(1, n, 5)$ pertenece al plano.

a) El plano es paralelo a $\overrightarrow{PQ} = (3, -2, 2)$ y a $\overrightarrow{QR} = (2, -2, 8) \,//\, (1, -1, 4)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + \mu \\ y = 5 - 2\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 3 & 1 \\ y-5 & -2 & -1 \\ z & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir: } 6x + 10y + z - 74 = 0$$

b) $\lambda = 1,\ \mu = 0 \to (7, 3, 2)$; $\lambda = 0,\ \mu = 1 \to (5, 4, 4)$; $\lambda = 1,\ \mu = 1 \to (8, 2, 6)$

c) Sustituimos en la ecuación implícita:

$$6 \cdot 1 + 10 \cdot n + 5 - 74 = 0 \to 6 + 10n + 5 - 74 = 0 \to 10n = 63 \to n = \frac{63}{10}$$

2 Comprueba si el punto de coordenadas (15, 2, 7) pertenece al plano siguiente:

$$\begin{cases} x = 3 - 5\lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 15 = 3 - 5\lambda + \mu \\ 2 = 1 - \lambda \\ 7 = \mu \end{array}\right\} \to \lambda = -1,\ \mu = 7$$

Como el sistema tiene solución, el punto pertenece al plano y se obtiene con los valores $\lambda = -1,\ \mu = 7$.

6 Posiciones relativas de planos y rectas

Página 157

1 Estudia la posición relativa del plano y de la recta:

$$\pi: 2x - y + 3z = 8 \qquad r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de r y π:

$2(2 + 3\lambda) - (-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8 \rightarrow 4 + 6\lambda + 1 - 3\lambda - 3\lambda = 8 \rightarrow 0\lambda = 3 \rightarrow$ No tiene solución.

La recta y el plano son paralelos, pues no tienen ningún punto en común.

2 Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos:

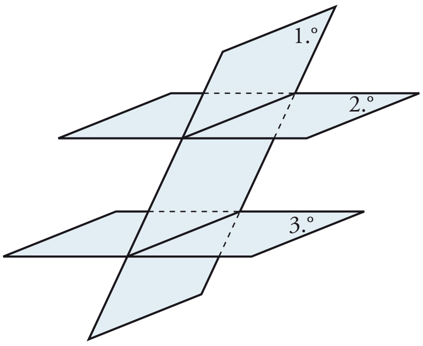
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ x + 3y - z &= 5 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

¿Tienen los tres planos algún punto común?

$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Se cortan en una recta.

$\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 5 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Son paralelos.

$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Se cortan en una recta.

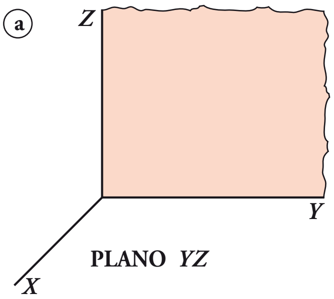


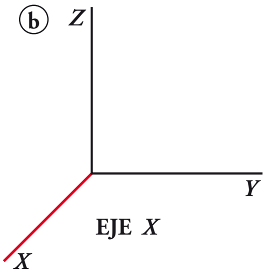
No hay ningún punto común a los tres planos.

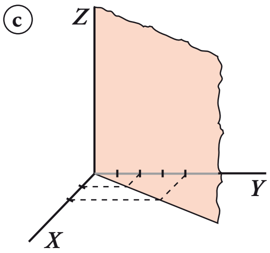
7 El lenguaje de las ecuaciones: variables, parámetros, …

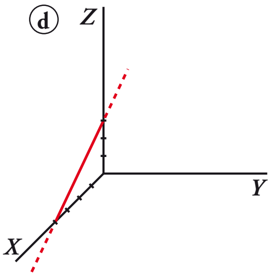
Página 159

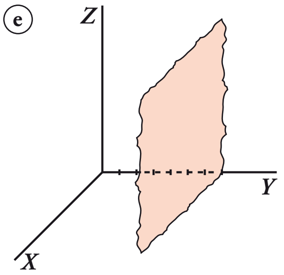
1 Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de las siguientes figuras:

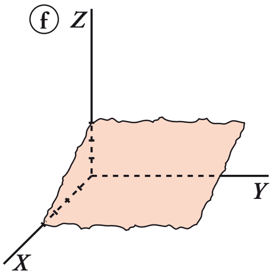












a) x siempre vale 0.

y puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

$$\pi\text{: } x = 0 \ \longrightarrow\ \pi\text{: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

b) x puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 0.

z siempre vale 0.

$$\text{Eje } X\text{: } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ \longrightarrow\ r\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) z puede tomar cualquier valor.

El plano π en su intersección con el plano XY determina la recta r de ecuación: r: $2x - y = 0$.

Así, en el espacio XYZ:

$$\pi\text{: } 2x - y = 0 \ \longrightarrow\ \pi\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

d) Calculamos la ecuación de la recta en el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

$$r\text{: } \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \ \longrightarrow\ \lambda = \frac{z}{3},\ x = 4 - \frac{4}{3}z$$

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

En el espacio XYZ la recta no toma valores en y, por tanto, $y = 0$. Luego la ecuación de la recta r en el espacio XYZ es:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 12 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

e) x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 7.

$$\pi: y = 7 \rightarrow \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 \\ z = \mu \end{cases}$$

f) y puede tener cualquier valor.

Calculamos la recta que determina el plano ρ en su intersección con el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

Por el apartado d):

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

Así:

$$\pi: 3x + 4z = 12 \rightarrow \pi: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

2 Representa gráficamente las figuras dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $z = 4$

b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

g) $y = 0$

h) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \tau \end{cases}$

k) $x + y + z = 1$

l) $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

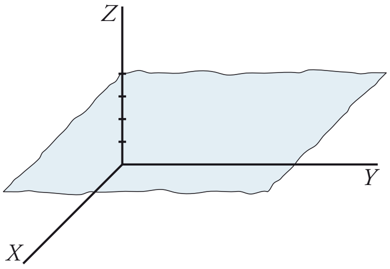
m) $x^2 = z^2$

n) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

¡Atención! Una de ellas representa un punto, y otra, todo el espacio; hay una que tiene dos parámetros, pero actúan como si solo hubiera uno y, finalmente, hay una que no está expresada con ecuaciones lineales, pero que se puede reescribir utilizándolas.

a) $z = 4$ → z siempre vale 4.

x e y pueden tomar cualquier valor.

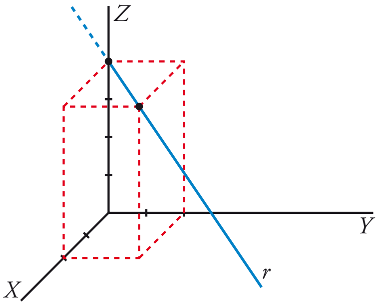


b) $\begin{cases} x = \lambda & \to\ x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \to\ y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = 4 & \to\ z \text{ siempre vale } 4. \end{cases}$

Es el mismo plano que el del apartado anterior.

c) $\begin{cases} \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = \lambda \end{matrix}\right> x \text{ e } y \text{ siempre toman los mismos valores.} \\ z = 4 \qquad \to\ z \text{ siempre vale } 4. \end{cases}$

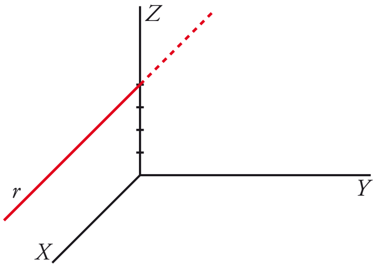
Como solo hay un parámetro, es una recta (paralela al plano XY).



d) $\begin{cases} x = \lambda & \to\ x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = 0 & \to\ y \text{ siempre vale } 0. \\ z = 4 & \to\ z \text{ siempre vale } 4. \end{cases}$

Como solo hay un parámetro, es una recta.

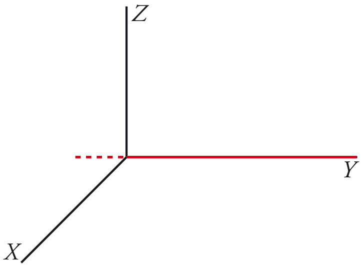
Como $y = 0$ siempre, es una recta del plano XZ.



e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ Es la ecuación implícita de la recta anterior.

f) $\begin{cases} x = 0 & \to\ x \text{ siempre vale } 0. \\ z = 0 & \to\ z \text{ siempre vale } 0. \\ & \quad\ y \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Es la ecuación del eje Y.

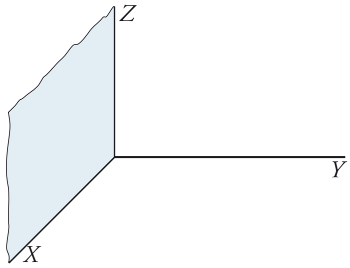


g) $y = 0 \to y$ siempre vale 0.

x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

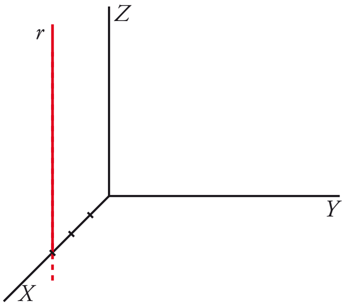
Es la ecuación del plano XZ.



h) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu & \to\ \text{si hacemos } \lambda + \mu = \rho,\ \rho \in \mathbb{R}, \text{ tenemos:} \end{cases}$

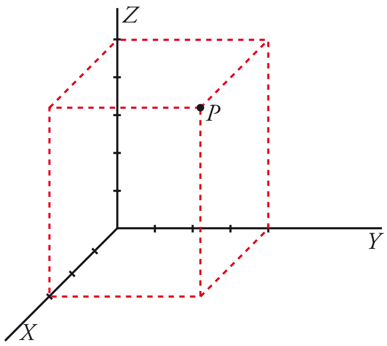
$\begin{cases} x = 3 & \to\ x \text{ siempre vale } 3. \\ y = 0 & \to\ y \text{ siempre vale } 0. \to \text{ Nos movemos en el plano } XZ \\ z = \rho & \to\ z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Como solo hay un parámetro, es una recta.



i) $\begin{cases} x=3 \ \to \ x \text{ siempre vale } 3.\\ y=4 \ \to \ y \text{ siempre vale } 4.\\ z=5 \ \to \ z \text{ siempre vale } 5.\end{cases}$

Es un punto.



j) $\begin{cases} x=\lambda \ \to \ x \text{ puede tomar cualquier valor.}\\ y=\mu \ \to \ y \text{ puede tomar cualquier valor.}\\ z=\rho \ \to \ z \text{ puede tomar cualquier valor.}\end{cases}$

Representa todo el espacio.

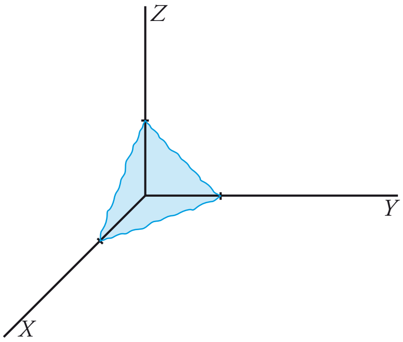
k) $x+y+z=1$. Es un plano.

Calculamos las intersecciones con los ejes:

Eje X: $\begin{cases} y=0\\ z=0\end{cases} \to x=1 \to (1,0,0)$

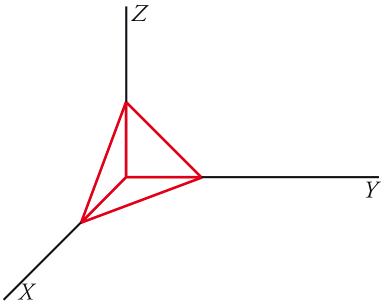
Eje Y: $\begin{cases} x=0\\ z=0\end{cases} \to y=1 \to (0,1,0)$

Eje Z: $\begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases} \to z=1 \to (0,0,1)$



l) $\begin{cases} x+y+z\le 1 \ \to \ \text{Describe la región limitada por el plano anterior,}\\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{cuyas coordenadas están por debajo de él.}\\ \left.\begin{array}{l} x\ge 0\\ y\ge 0\\ z\ge 0\end{array}\right\rangle \longrightarrow \text{Las tres variables tienen que se positivas.}\end{cases}$

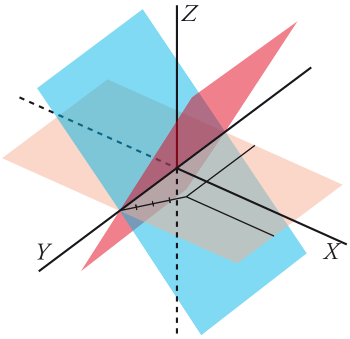
Representa la región comprendida entre la parte positiva de los planos XY, YZ, XZ y el plano $x+y+z=1$.



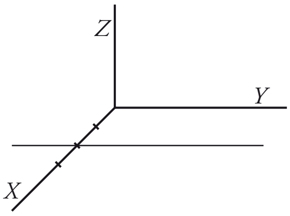
m) De la ecuación $x^2=z^2$ obtenemos dos posibles planos:

$x=z$

$x=-z$



n) La variable y puede tomar cualquier valor, mientras que x y z permanecen fijos: es una recta paralela al eje Y.



Ejercicios y problemas resueltos

Página 160

1. Ecuaciones paramétricas a partir de las implícitas

Hazlo tú. **Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los planos:**

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{array}\right\} \to x = -\frac{1}{7}\lambda - \frac{9}{7},\ y = \frac{5}{7}\lambda + \frac{10}{7},\ z = \lambda$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{9}{7} - \dfrac{1}{7}\lambda \\ y = \dfrac{5}{7}\lambda + \dfrac{10}{7} \\ z = \lambda \end{cases}$$

2. Ecuación de una recta que corta perpendicularmente a otra

Hazlo tú. **Dada la recta** $r: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5 \end{cases}$ **y el punto** $P(5, 5, 1)$**.**

Determina:

a) La ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

b) La ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

a) Vector normal de π: $\overrightarrow{n_\pi} = (-2, 1, 0)$

$\pi: -2x + y + k = 0$

Pasa por $P(5, 5, 1) \to$ las coordenadas de P verifican la ecuación $\to -10x + 5 + k = 0 \to k = 5$

$\pi: -2x + y + 5 = 0$

b) s está contenida en π por ser perpendicular a r. Buscamos la recta que pasa por P y por $r \cap \pi$:

Calculamos $Q = r \cap \pi$:

$$-2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) + 5 = 0 \to \lambda = -2$$

$$Q = (3, 1, -5)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-2, -4, -6) = -2(1, 2, 3)$$

$$s: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Página 161

3. Ecuaciones de planos

Hazlo tú. Escribe la ecuación del plano que contiene al punto $A(1, 0, -3)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$.

Calculamos el vector de dirección de r:

$$\vec{d_r} = (5, 1, -1) \times (2, -2, 1) = (-3, 3, 12) = 3(-1, 1, -4)$$

π es perpendicular a $\vec{d_r}$ y pasa por A.

$$\pi: -x + y - 4z + k = 0$$

y pasa por $A(1, 0, -3)$ → las coordenadas de A verifican la ecuación → $-1 + 0 + 12 + k = 0$ → $k = -11$

$$\pi: -x + y - 4z - 11 = 0$$

4. Posición de tres planos en función de un parámetro

Hazlo tú. Estudia la posición relativa de estos planos según los valores de a:

$$\begin{cases} \alpha: x - y = a \\ \beta: 3x - z = a + 5 \\ \gamma: 5x + y + az = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = a \\ 3x - z = a + 5 \\ 5x + y + az = 6 \end{cases}$$

Matriz de coeficientes y matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 3 & 0 & -1 & a + 5 \\ 5 & 1 & a & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3a + 6$$

- Si $a \neq -2$ → $ran(A) = ran(A') = 3$ → el sistema es compatible determinado.

  Los planos se cortan en un punto.

- Si $a = -2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 \rightarrow ran(A') = 3 \rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

  Los planos no son paralelos, se cortan dos a dos.

5. Plano que contiene a una recta y es paralelo a otra

Hazlo tú. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z \qquad s: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z$$

Estudia su posición relativa y obtén, si es posible, un plano paralelo a s que contenga a r.

a) $ran(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = ran\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow r$ y s tienen distinta dirección.

Por tanto, r y s se cortan o se cruzan.

$P_r(1, 2, 0) \in r$ y $P_s(-1, 1, 0) \in s \rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (-2, -1, 0)$

$ran(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}) = ran\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow$ no coplanarios $\rightarrow r$ y s se cruzan.

b) π tiene como vectores de dirección $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ y pasa por $P_r(1, 2, 0) \in r$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: x + y - 5z - 3 = 0$$

Página 162

6. Ecuación de un plano que contiene a dos rectas paralelas

Hazlo tú. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x \qquad - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

y es paralelo a $s: \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{3-y}{1} = \dfrac{z}{0}$.

π tiene como vectores de dirección los de las dos rectas y pasa por un punto de r.

$\vec{d_r} = (1, -1, -4) \times (1, 0, -2) = (2, -2, 1)$

$\vec{d_s} = (2, 1, 0)$

Punto de r: $P_r = (-1, 0, 0)$

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+2 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: -x + 2y + 6z - 2 = 0$$

7. Posición relativa de dos rectas en función de un parámetro

Hazlo tú. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de m:

$$r: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-4}{-1} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$\vec{d_r} = (1, m, -1)$, $P_r = (2, 1, 4)$

$\vec{d_s} = (2, -2, -2)$, $P_s = (1, -2, 0)$

$$ran(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = ran\begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- Si $m = -1 \rightarrow ran(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 1 \rightarrow r \,//\, s$

  Sustituimos P_s en la ecuación de r:

  $$\frac{1-2}{1} \neq \frac{1-1}{-1} \neq \frac{1-4}{-1}$$

  Luego no son coincidentes.

- Si $m \neq -1 \rightarrow ran(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$

  $\overrightarrow{P_rP_s} = (1, -2, 0) - (2, 1, 4) = (-1, -3, -4)$

  $$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 10m + 10$$

  que es distinto de 0 para $m \neq -1 \rightarrow ran\begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow$ las rectas se cruzan.

Página 163

8. Determinación de un plano

Hazlo tú. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ y corta al plano $\pi: 2x - y - z = 3$ en una recta paralela al plano $y = 0$.

α tiene como vectores de dirección el de r: $\vec{d_r} = (2, 1, 0)$ y el vector perpendicular a los vectores normales a π y al plano $y = 0$.

$$\vec{n} = (2, -1, -1) \text{ y } \vec{n'} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{n_\alpha} = \vec{n} \times \vec{n'} = (2, -1, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 2)$$

α pasa por $P_r = (0, 0, -1)$

$$\alpha: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha: 2x - 4y - z - 1 = 0$$

9. Posición de recta y plano

Hazlo tú.

a) Estudia la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax + 3y - z = 0$ según los valores de a.

b) Halla el punto de corte de r y π en el caso $a = 1$.

a) $\vec{d_r} = (2, 1, 0)$

$\vec{d_s} = (a, 3, -1)$

r puede ser paralela al plano, estar contenida en él o cortarlo.

$$(2, 1, 0) \cdot (a, 3, -1) = 2a + 3 = 0 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

- Si $a = -\frac{3}{2} \to r \parallel \pi$

  $P_r = (1, 0, -2)$

  Sustituimos en π: $-\frac{3}{2} + 2 \neq 0 \to$ son paralelos y distintos.
- Si $a \neq -\frac{3}{2}$, se cortan.

b) Si $a = 1$ se cortan, por ser $a \neq -\frac{3}{2}$

$\pi = x + 3y - z = 0$

Para hallar la intersección sustituimos los puntos de r en π:

$$(1 + 2t) + 3t + 2 = 0 \to t = -\frac{3}{5}$$

$$P = \left(\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right) = r \cap \pi$$

Página 164

10. Recta que corta a otras dos

Hazlo tú. **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta a las rectas:**

$$r: \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x \quad - z = 3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ 2x - 3y \quad = 0 \end{cases}$$

$\vec{d_r} = (1, 1, -1) \times (2, 0, -1) = (-1, -1, -2) = -(1, 1, 2).$

Resolviendo el sistema obtenemos un punto de R: $P_r = (2, 1, 1)$.

$\overrightarrow{PP_r} = (2, 1, 1) - (2, -1, 1) = (0, 2, 0)$

$\vec{d_s} = (1, -2, -2) \times (2, -3, 0) = (-6, -4, 1)$

Resolviendo el sistema obtenemos un punto de s: $P_s = \left(0, 0, -\frac{3}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{PP_s} = \left(0, 0, -\frac{3}{2}\right) - (2, -1, 1) = \left(-2, 1, -\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(-4, 2, -5)$$

La recta t que buscamos está determinada por los planos:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to \alpha: -4x + 2z + 6 = 0$$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ -6 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \to \beta: 18x - 34y - 28z - 42 = 0$$

$$t: \begin{cases} -4x + 2z - 4x + 6 = 0 \\ 18x - 34y - 28z - 42 = 0 \end{cases}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 165

1. Puntos que dividen a un segmento en tres partes iguales

Hallar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales, siendo $A(5, -1, 6)$, $B(-4, 4, 6)$.

a) $P = (x, y, z)$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\big((-4, 4, 6) - (5, -1, 6)\big) = \left(-3, \frac{5}{3}, 0\right)$$

$$(x, y, z) = (5, -1, 6) + \left(-3, \frac{5}{3}, 0\right) = \left(2, \frac{2}{3}, 6\right)$$

b) $$Q = \frac{\left(2, \frac{2}{3}, 6\right) + (-4, 4, 6)}{2} = \left(-1, \frac{7}{3}, 6\right)$$

2. Recta contenida en un plano

Si r es la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 1)$ y tiene como vector director $(1, 2, -2)$, ¿existe algún valor de a para el cual la recta r está contenida en el plano $\pi: 2x + 3y + 4z = a$? En caso afirmativo, encontrar el valor de a y en caso negativo razonar la respuesta.

a) $$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

b) Sustituimos un punto cualquiera de la recta en el plano:

$$2(1 + \lambda) + 3(-1 + 2\lambda) + 4(1 - 2\lambda) = a \rightarrow 3 = a$$

Solo verifican la ecuación del plano si $a = 3$.

3. Recta que corta a otra, pasa por un punto y está contenida en un plano

Hallar la recta r, que pasa por el punto $A(1, -1, 0)$, está contenida en el plano $\pi: x + y = 0$ y corta a la recta $s: x = y = z$.

$P = s \cap \pi$

Ecuaciones paramétricas de s:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituimos un punto cualquiera de la recta en el plano:

$$\lambda + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow P = (0, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{d_r} = (1, -1, 0) - (0, 0, 0) = (1, -1, 0) = -(-1, 1, 0) \rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

4. Posición relativa de dos rectas

Si r es la recta que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano $\pi: ax + 2y + 3z + 6 = 0$ y s es la recta que pasa por $A(1, 0, 0)$ y $B(-1, -3, -4)$.

a) Calcular el valor de a para que r y s se corten.

b) Hallar el punto de corte para ese a.

c) ¿Cuál sería la posición de ambas rectas para un valor de a distinto del obtenido?

a) $r: \begin{cases} \vec{d_r} = (a, 2, 3) \\ P_r = (1, -1, -2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \vec{d_s} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -4) - (1, 0, 0) = (-2, -3, -4) \\ P_s = (1, 0, 0) \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = -3\mu \\ z = -4\mu \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP_r} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$$

$$ran\,(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{AP_r}) = ran \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2a - 2$$

Si $a = 1 \to ran \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \to$ las rectas se cortan.

b) $a = 1$

Punto de corte $r \cap s$:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \lambda &= 1 - 2\mu \\ -1 + 2\lambda &= -3\mu \\ -2 + 3\lambda &= -4\mu \end{aligned}\right\} \to \lambda = 2,\ \mu = -1$$

$Q = (3, 3, 4)$

c) Si $a \neq 1$ el sistema es incompatible, luego las rectas se cruzan porque $ran(\vec{d_r}, \vec{d_s}) > 1$ puesto que los vectores no son proporcionales independientemente del valor de a.

5. Corte de recta y plano

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 2, 1)$, sea r la recta que pasa por A y B y π el plano que pasa por C y es perpendicular a r. Hallar el punto de corte de r y π.

a) $r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1) \\ P_r = (1, 0, 0) \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\pi: y + z + k = 0$

Sustituimos las coordenadas de C en la ecuación del plano:

$$2 + 1 + k = 0 \to k = -3 \to \pi: y + z - 3 = 0$$

c) $P = r \cap \pi$

Sustituimos un punto cualquiera de la recta en el plano:

$$\lambda + \lambda - 3 = 0 \to \lambda = \frac{3}{2}$$

$$P = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

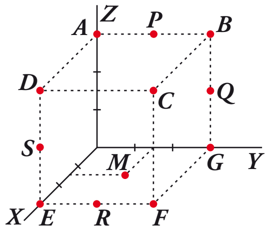
Ejercicios y problemas propuestos

Página 145

Para practicar

Puntos y vectores

1 **Escribe las coordenadas de los puntos representados en esta figura.**



$A(0, 0, 3)$; $B(0, 3, 3)$; $C(3, 3, 3)$; $D(3, 0, 3)$; $E(3, 0, 0)$; $F(3, 3, 0)$; $G(0, 3, 0)$;

$P\left(0, \frac{3}{2}, 3\right)$; $Q\left(0, 3, \frac{3}{2}\right)$; $R\left(3, \frac{3}{2}, 0\right)$; $S\left(3, 0, \frac{3}{2}\right)$

2 **Dado el segmento AB, con $A(-2, 1, 0)$ y $B(1, 3, -2)$ halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.**

Punto P:

$P = (x, y, z)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AP} = P - A$

$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -2) - (-2, 1, 0) = (3, 2, -2)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(3, 2, -2)$

$$P = A + \frac{1}{3}(3, 2, -2) = (-2, 1, 0) + \left(1, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \left(-1, \frac{5}{2}, \frac{-2}{3}\right)$$

Punto Q

$Q = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$$Q = (-2, 1, 0) + \left(2, \frac{4}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(0, \frac{7}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

3 **Calcula el valor de a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados.**

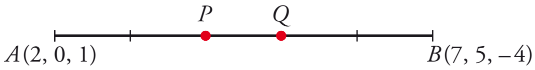
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\,(2, -2, -1)\\ \overrightarrow{AC}\,(3, a-2, b+1)\end{array}\right\}\ \text{Para que estén alineado ha de ser: } \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2} = \frac{3}{2} \to a - 2 = -3 \to a = -1$$

$$\frac{b+1}{-1} = \frac{3}{2} \to b = \frac{-3}{2} - 1 \to b = \frac{-5}{2}$$

4 **Halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, siendo $A(2, 0, 1)$ y $B(7, 5, -4)$.**



$\overrightarrow{AB}\ (5, 5, -5)$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) + (3, 3, -3) = (5, 3, -2)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = (2, 0, 1) + (2, 2, -2) = (4, 2, -1)$

5 **Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.**

Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M. Como M es el punto medio del segmento AA', entonces:

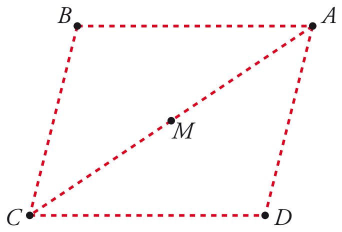
$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \to x = 4;\ \frac{y+3}{2} = -1 \to y = -5;\ \frac{z}{2} = 2 \to z = 4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$.

6 **Los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(4, -1, -3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto vértice, D, y el centro del paralelogramo.**

Sea $D(x, y, z)$ el otro vértice:



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \to \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} =$$
$$= (4, -1, -3) + (-1, 3, -3) = (3, 2, -6)$$

Si M es el centro del paralelogramo, es el punto medio de $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = (4, -1, -3) + \frac{1}{2}(-3, 4, 2) =$$
$$= (4, -1, -3) + \left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$$

Rectas

7 **Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes rectas:**

a) Pasa por $A(-3, 2, 1)$ y $B(-5/2, 3/2, 0)$.

b) Pasa por $A(0, 1, -1)$ y es paralela a la recta que pasa por $B(1, 1, -1)$ y $C(2, 0, 1)$.

a) Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Tomamos el vector $\vec{d}(1, -1, 2) \,//\, \overrightarrow{AB}$.

- Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \ \ 2 - \lambda \\ z = \ \ 1 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ecuaciones implícitas:

  Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \to x + y + 1 = 0 \\ 2x + z = -5 \to 2x + z + 5 = 0 \end{cases}$$

b) Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{BC}$ $(1, -1, 2)$.

- Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ecuaciones implícitas:

  Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

8 **Escribe las ecuaciones implícitas de los lados del triángulo de vértices $A(1, 0, 1)$, $B(-2, 0, 1)$ y $C(0, 3, 1)$.**

Lado AB:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 1) - (1, 0, 1) = (-3, 0, 0)$$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{0} \to \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Lado AC:

$$\overrightarrow{AC} = (0, 3, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 3, 0)$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{0} \to \begin{cases} 3x - 3 = -y \\ z = 1 \end{cases}$$

Lado BC:

$$\overrightarrow{BC} = (0, 3, 1) - (-2, 0, 1) = (2, 3, 0)$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{0} \to \begin{cases} 3x + 6 = 2y \\ z = 1 \end{cases}$$

9 **Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ y $R(6, -5, 1)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-3, -6, 1) \\ \overrightarrow{PR}(3, -6, 1) \end{array}\right\}$$ Sus coordenadas no son proporcionales. Luego los puntos no están alineados.

10 **Escribe las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de los ejes de coordenadas.**

Paramétricas:

Eje $OX \to \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OY \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OZ \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Implícitas:

Eje $OX \to \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OY \to \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OZ \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

11 **Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje Z.**

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección (0, 0, 1).

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 \ \rightarrow \ x + 4 = 0 \\ y = \ \ 2 \ \rightarrow \ y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

12 **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es paralela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(2, 0, 0)$.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 4, 2) \ // \ (0, 2, 1)$

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \rightarrow \ x - 1 = 0 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} \ \rightarrow \ y + 3 = 2z \ \rightarrow \ y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

13 **Halla las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:**

$$r: \begin{cases} \mathbf{2x - y + z - 3 = 0} \\ \mathbf{x - y + z - 2 = 0} \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \mathbf{x + 2y - z - 3 = 0} \\ \mathbf{3y + 2z - 1 = 0} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1, \ y = -1 + \lambda, \ z = \lambda \ \rightarrow \ r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$s: \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{7}{3} + \frac{7}{3}\lambda, \ y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda, \ z = \lambda \ \rightarrow \ s: \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} + \dfrac{7}{3}\lambda \\ y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

14 a) Halla el vector director de la recta:

$$\begin{cases} x-y \quad\ \ =0 \\ \quad\ \ y+z=2 \end{cases}$$

b) Escribe sus ecuaciones paramétricas.

a) $\vec{d} = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

b) Obtenemos un punto de la recta haciendo $y = 0$:

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=2 \end{array}\right\}$ El punto $(0, 0, 2)$ pertenece a la recta.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

15 Expresa la siguiente recta como intersección de dos planos:

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = z \quad \to \quad x = 2z \quad \to \quad x - 2z = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \quad \to \quad -x = 2y + 2 \quad \to \quad x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

16 Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4} \qquad s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

b) $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1} \qquad s: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3} \qquad s: \begin{cases} x-2y- \quad\ \ 1=0 \\ \quad\ \ 3y-z+1=0 \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \qquad s: \begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=3+6\lambda \\ z=4+8\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r\,(3, 2, 4)$; $P(1, -2, 1)$

$\vec{d}_s\,(-1, 2, 3)$; $P'(-2, 3, 2)$

$\overrightarrow{PP'}\,(-3, 5, 1)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}}_{M} \left|\ \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}\right.\right) \to |M'| = -51 \neq 0 \to \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $\vec{d}_r\,(-1, 2, 1)$; $P(1, 1, 2)$

$\vec{d}_s\,(4, 1, 2)$; $P'(4, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}\,(3, 3, 3)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}}_{M} \begin{array}{:c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}\right) \to |M'| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \to \text{Las rectas se cortan.}$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \lambda = 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 + \mu \\ 2 + \lambda = 5 + 2\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando la 1.ª y la 3.ª: } 3 = 9 + 6\mu \to \mu = -1 \\ \text{Sustituyendo en la 1.ª: } 1 - \lambda = 4 - 4 \to \lambda = 1 \end{array}$$

Haciendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte (0, 3, 3).

c) $\vec{d}_r(2, 1, 3)$; $P(0, 1, -1)$

$\vec{d}_s(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$

Tienen la misma dirección, y el punto $P \in r$, pero $P \notin s$, luego las rectas son paralelas.

d) $$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(2, 3, 4) \\ \vec{d}_s(4, 6, 8) \end{array}\right\} \text{Tienen la misma dirección.}$$

Veamos si el punto $P(1, 0, 0) \in r$, pertenece también a s:

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 4\lambda = 1 \to \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 \to \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 \to \lambda = -1/2 \end{array}\right\} P \in s$$

Por tanto, las rectas r y s coinciden, son la misma recta.

17 Obtén el valor de *a* para el cual las rectas *r* y *s* se cortan:

$$r: x = y = z - a \qquad s: \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0}$$

Calcula el punto de corte de *r* y *s* para el valor de *a* que has calculado.

$r: x = y = z - a \to \vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(0, 0, a)$

$$s: \frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0} \to \vec{d}_s\left(\frac{3}{2}, -2, 0\right); \; P'\left(\frac{1}{2}, -3, 2\right)$$

$$\overrightarrow{PP'}\left(\frac{1}{2}, -3, 2 - a\right)$$

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1/2 \\ -3 \\ 2 - a \end{matrix} \end{array}\right) \to ran(M) = 2$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran(M') = 2$; es decir, $|M'| = 0$;

$$|M'| = \frac{7a - 21}{2} = 0 \to a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \text{El sistema tiene solución } \lambda = -1; \; \mu = -1$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte (–1, –1, 2).

18 Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{matrix}\right\}$$ Las coordenadas han de ser proporcionales.

$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \rightarrow m = 12, \; n = -3$

Para $m = 12$ y $n = -3$, las dos rectas tienen la misma dirección.

Como el punto $P(0, 1, -3) \in s$ pero $P \notin r$, las rectas son paralelas.

19 Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano $x + 2y = 5$ y que pasa por el punto $P(7, -2, 1)$.

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, 2, 0) \\ P_r(7, -2, 1) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 7 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

20 Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P(-1, 5, 0)$ y es paralela a $r: \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s(1, 1, 0) \times (0, 1, -1) = (-1, 1, 1) \\ P_s(-1, 5, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Página 167

Planos

21 Halla la ecuación implícita de cada uno de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto $A(1, -3, 2)$ y por los vectores $\vec{u}(2, 1, 0)$ y $\vec{v}(-1, 0, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(2, -3, 1)$ y su vector normal es $\vec{n}(5, -3, -4)$.

c) Perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1, 0, 1).

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (-1, 0\ 3) = (3, -6, 1)$

$3(x - 1) - 6(y + 3) + (z - 2) = 0$

$3x - 6y + z - 23 = 0$

b) $5(x - 2) - 3(y + 3) - 4(z - 1) = 0$

$5x - 3y - 4z - 15 = 0$

c) $\vec{n}\ (1, -1, 3)$

$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z - 1) = 0$

$2x - y + 3z - 5 = 0$

22 **Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los planos XY, YZ, XZ.**

Plano XY:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ Implícita: $z = 0$

Plano YZ:

Paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $x = 0$

Plano XZ:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $y = 0$

23 **Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos:**

a) $z = 3$ **b)** $x = -1$ **c)** $y = 2$

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \mu \end{cases}$

24 **¿Cuál es el vector normal del plano $x = -1$?**

Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2, 3, 0)$.

El vector normal al plano $x = -1$ es $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Recta: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

25 **Calcula los valores de m y n para que los planos siguientes sean paralelos:**

$$\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0 \qquad \beta: 2x + ny - z - 3 = 0$$

¿Pueden ser α y β coincidentes?

$\left.\begin{matrix} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{matrix}\right\}$ Las coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \to m = 6, \; n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 \to 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0 \to 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

26 **Considera los puntos $A(0, 1, -2)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(1, 0, m)$.**

Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

$ran\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$

$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0) - (0, 1, -2) = (1, 1, 2)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (0, 1, -2) = (0, -1, 3)$

$\overrightarrow{AD} = (1, 0, m) - (0, 1, -2) = (1, -1, m + 2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & m+2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6 - m = 0 \rightarrow m = 6$$

Son coplanarios si $m = 6$.

27 **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(1, -4, 2)$.**

$\overrightarrow{d_r} = (1, -2, 0) \times (3, 2, 0) = (0, 0, 8) \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = (0, 0, 8) = 8\,(0, 0, 1)$

$\pi: z + k = 0$

Como $P(1, -4, 2) \in \pi \rightarrow 2 + k = 0 \rightarrow k = -2$

$\pi: z - 2 = 0$

28 **Comprueba que la recta $\frac{x}{2} = y - 3 = \frac{2 - z}{3}$ corta al plano $x - 2y + z = 1$ y halla el punto de corte.**

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

Sustituimos un punto cualquiera de la recta en el plano:

$$2\lambda - 2(3 + \lambda) + 2 - 3\lambda = 1 \rightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$$

Se cortan porque hay solución.

$$P = r \cap \pi = \left(2\left(-\frac{5}{3}\right), 3 - \frac{5}{3}, 2 - 3\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = \left(-\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 7\right)$$

29 **Determina las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al punto $P(2, 1, 2)$ y a la recta siguiente:**

$$r: x - 2 = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 4}{-3}$$

Si π contiene a la recta, contendrá al punto $Q(2, 3, 4)$ y será paralelo a $\overrightarrow{d_r}(1, -1, -3)$.

También será paralelo a $\overrightarrow{PQ}(0, 2, 2) \,//\, (0, 1, 1)$.

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = 2 - 3\lambda + \mu \end{cases}$$

30 Considera las rectas siguientes:

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z-2 \qquad s: \begin{cases} x \qquad - 2z = 5 \\ x - 2y \qquad = 11 \end{cases}$$

a) Comprueba que r y s son paralelas.

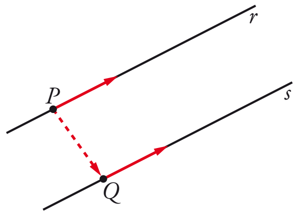
b) Halla la ecuación implícita del plano que contiene a r y a s.

a) $\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, 2)$

$\vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (1, -2, 0) = (-4, -2, -2) \;//\; (2, 1, 1)$

Las rectas r y s tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, 2) \in r$, pero $P \notin s$. Luego las rectas son paralelas.

b)



Obtenemos un punto, Q, de s haciendo $y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2z = 5 \\ x = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 11 \\ z = 3 \end{array}\right\} Q(11, 0, 3)$$

El plano que buscamos será paralelo a $\vec{d}_r(2, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{PQ}(10, 0, 1)$.

Un vector normal es: $(2, 1, 1) \times (10, 0, 1) = (1, 8, -10)$

La ecuación del plano será:

$$1 \cdot (x-1) + 8 \cdot (y-0) - 10 \cdot (z-2) = 0 \;\to\; x + 8y - 10z + 19 = 0$$

31 ¿Son coplanarios los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$ y $D(-1, 2, 1)$?

En caso afirmativo, escribe la ecuación del plano que los contiene.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-2, 2, 1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\to\; \text{Los puntos no son coplanarios.}$$

Otra forma de resolverlo

- Obtenemos la ecuación del plano π que contiene a A, B y C:

  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0) \times (1, 1, 0) = (0, 0, -2) \;//\; (0, 0, 1)$ es normal al plano.

  Ecuación de π: $0(x-1) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0 \;\to\; z = 0$

  (Podríamos haber advertido que $z = 0$ es el plano que pasa por A, B y C observando que en los tres puntos la tercera coordenada es cero).

- Comprobamos si el punto D pertenece a este plano:

  ¿$(-1, 2, 1)$ pertenece a $z = 0$? Evidentemente, no.

  Por tanto, los cuatro puntos no son coplanarios.

32 Estudia la posición relativa de los tres planos en cada uno de los siguientes casos:

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \textbf{b)} \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \textbf{c)} \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \textbf{d)} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

a)
$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{M} \left|\, \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right. \right)$$

$|M| = 8 \;\to\; ran(M) = ran(M') = 3 \;\to\;$ Los tres planos se cortan en un punto.

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3\\ x-y+z=2\\ 3x-y+z=4\end{array}\right\}\; M'=\left(\underbrace{\begin{matrix}2&-1&1\\1&-1&1\\3&-1&1\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}3\\2\\4\end{matrix}\right.\right)$$

La 3.ª columna es $-1 \cdot 2.^{a}$; y la 4.ª columna se obtiene sumando la 1.ª y la 3.ª.

Luego $ran(M) = ran(M') = 2$ → Los tres planos se cortan en una recta.

c) $$\left.\begin{array}{r} x-\ y+\ z=\ 1\\ 3x+\ y-2z=\ 0\\ 2x+2y-3z=-4\end{array}\right\}\; M'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&-1&1\\3&1&-2\\2&2&-3\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}1\\0\\-4\end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}=4\neq 0 \text{ y } |M|=0 \;\to\; ran(M)=2$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\3&1&0\\2&2&-4\end{vmatrix}=-12\neq 0 \;\to\; ran(M')=3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

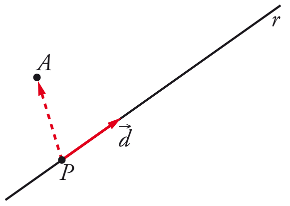
d) $$\begin{vmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\2&0&-1\end{vmatrix}=4 \;\to\; ran\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}=3 \;\to\; \text{el sistema es compatible determinado.}$$

Los planos se cortan en un punto.

33 **Calcula la ecuación del plano que determinan el punto $A(1, 0, 1)$ y la recta:**

$$r: \begin{cases} x+y-\ z+1=0\\ 2x-y+2z\ \ \ \ =0\end{cases}$$

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$.



Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} y-\ z+1=0\\ -y+2z\ \ \ \ =0\end{array}\right\} \text{ Sumando: } z+1=0 \;\to\; z=-1;\; y=2z=-2$$

$P(0, -2, -1)$

El plano es paralelo a $\vec{d}\,(1, -4, -3)$ y a $\overrightarrow{PA}\,(1, 2, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -4, -3) \times (1, 2, 2) = (-2, -5, 6) \,//\, (2, 5, -6)$

La ecuación del plano es:

$$2(x-1)+5(y-0)-6(z-1)=0 \;\to\; 2x+5y-6z+4=0$$

34 **Estudia la posición relativa de la recta:**

$$r: \begin{cases} x=\ -t\\ y=0\\ z=1+t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

y el plano π: $2x - y + 3z = 6$.

$\vec{d}_r = (-1, 0, 1)$

$\vec{n} = (2, -1, 3)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = (-1, 0, 1) \cdot (2, -1, 3) = 1 \neq 0$ → No son paralelos, se cortan.

35 **Estudia la posición relativa de la recta y el plano siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \pi: z = 1$$

Son perpendiculares y se cortan en el punto (3, 2, 1).

36 **Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:**

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ \phantom{3x - {}} 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

π contiene las direcciones $\vec{d}_r$ y $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{d}_r = (3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) = -3(2, 3, -2)$

$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) - (1, -3, 2) = (-1, 4, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

37 **Dados los planos: $\pi: mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $\pi': 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ halla m para que sean:**

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

a) Las coordenadas de $(m, 2, -3)$ y de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \rightarrow m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \rightarrow m = 13$

38 **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ y es perpendicular al plano $2x + y - z - 2 = 0$.**

π contiene al vector $\vec{d}_r(1, 2, 1)$, al vector perpendicular al plano dado $\vec{n}(2, 1, -1)$ y pasa por el punto $P(1, -1, 0)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 3y - 3x - 3z + 6 = 0$$

39 **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.**

$$s: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad r: \frac{x-1}{2} = y = 2 - z$$

π contiene al vector $\vec{d}_r(2, 1, -1)$, al vector $\vec{d}_s(1, -1, -1) \times (1, -2, 1) = (-3, -2, -1) = -(3, 2, 1)$ y pasa por $P_r = (1, 0, 2)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 3x - 5y + z - 5 = 0$$

Página 168

Para resolver

40 Considera las rectas r y s de ecuaciones

$$r: x-1=y=1-z \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x+2y = 4 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

a) Halla su punto de corte.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y s.

a) $r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 1, -1) \\ P_r = (1, 0, 1) \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$

$s: \begin{cases} \vec{d_s} = (1, 2, 0) \times (1, 0, -1) = (-2, 1, -2) \\ P_s = (2, 1, 0) \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 2-2\mu \\ y = 1+\mu \\ z = -2\mu \end{cases}$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 1+\lambda = 2-2\mu \\ \lambda = 1+\mu \\ 1-\lambda = -2\mu \end{array}\right\} \to \lambda = 1,\ \mu = 0$$

$r \cap s = P(2, 1, 0)$

b) El plano viene definido por los vectores $\vec{d_r}$, $\vec{d_s}$ y el punto (1, 0, 1):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \to \pi: 4y - x + 3z - 2 = 0$$

41 Dado el plano $\pi: x+z=4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

a) La ecuación del plano paralelo a π que contiene a P.

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P.

¿Cuál es la posición relativa de r y el plano hallado?

a) $\pi': x+z=k$

Como $P \in \pi' \to 1+0=k \to \pi': x+z=1$

b) $r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 0, 1) \\ P_r = (1, 1, 0) \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

r y π' son perpendiculares.

42 **Calcula el valor de m para que los siguientes planos se corten dos a dos:**

$$\begin{aligned} \alpha &: x - 3y - 2z - 2 = 0 \\ \beta &: -2x + y - z - 3 = 0 \\ \pi &: 5x + 5z = m \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Como los planos no son paralelos porque los vectores normales no son proporcionales dos a dos, para que los planos se corten dos a dos es suficiente con que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & m \end{vmatrix} \neq 0 \to \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & m \end{vmatrix} = -5m - 55 \to \text{Si } m \neq -11, \text{ los planos se cortan dos a dos.}$$

43 **Dados el plano α: $2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta $x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$, calcula los valores de a para que la recta esté contenida en el plano.**

$$r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 2, 5) \\ P_r = (-1, 1, -3) \end{cases}$$

Si $\vec{d_r} \perp \vec{n}$, es suficiente con que un punto de r esté en el plano para que toda la recta esté contenida en él.

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = (1, 2, 5) \cdot (2, a, 4) = 2a + 22 = 0 \to a = -11$$

Para $a = -11 \to P_r \in \alpha$, porque sustituyendo sus coordenadas en la ecuación de α obtenemos:

$$-2 - 11 - 12 + 25 = 0$$

luego para $a = -11$, $r \subset \alpha$.

44 **Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y corta a las rectas:**

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$$

$$r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 1, 1) \times (2, 2, 1) = (-1, 1, 0) \\ P_r = (0, -1, 2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \vec{d_s} = (2, 1, 1) \\ P_s = (0, 2, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP} = (1, 1, 1) - (0, -1, 2) = (1, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{P_sP} = (1, 1, 1) - (0, 2, -1) = (1, -1, 2)$$

La recta buscada, t, es la intersección de los planos π, que contiene a r y a P, y π', que contiene a s y a P.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \pi: -x - y - 3z + 5 = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \pi': 3x - 3y - 3z + 3 = 0 \to x - y - z + 1 = 0$$

$$t: \begin{cases} -x - y - 3z + 5 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

45 Calcula b para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$\vec{d_r}\,(2, -3, 2)$; $P(1, -5, -1)$; $\vec{d_s}\,(4, -1, 2)$; $P'(0, b, 1)$; $\overrightarrow{PP'}\,(-1, b+5, 2)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & b+5 \\ \hline 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$ Para que las rectas se corten, ha de ser $|M'| = 0$ (para que $ran(M) = ran(M') = 2$).

M

$|M'| = 4b + 44 = 0 \rightarrow b = -11$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = -11 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2\lambda = 4\mu \\ -5 - 3\lambda = -11 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 1 + 2\mu \end{array}\right\}$$ Restando la 3.ª ecuación a la 1.ª: $2 = -1 + 2\mu$

$$\mu = \frac{3}{2};\ \lambda = \frac{4\mu - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{5}{2}$ en las ecuaciones de r, o $\mu = \frac{3}{2}$ en las de s, obtenemos el punto de corte:

$$\left(6, \frac{-25}{2}, 4\right)$$

46 Determina el valor de k para que las rectas r y s sean coplanarias. Halla, después, el plano que las contiene:

a) $r: \frac{x}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z}{0} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

b) $r: \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1} \qquad s: \begin{cases} x = 6 + 6\lambda \\ y = 4 + k\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d_r}\,(1, 1, 0)$; $P(0, k, 0)$

$\vec{d_s}\,(1, -1, 1)$; $P'(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PP'}\,(1, 1-k, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-k \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser $|M'| = 0$.

$|M'| = k + 2 = 0 \rightarrow k = -2$

Un vector normal al plano es: $\vec{d_r} \times \vec{d_s} = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$

El plano que las contiene es: $1(x-1) - 1(y-1) - 2(z+1) = 0 \rightarrow x - y - 2z - 2 = 0$

b) $\vec{d}_r\,(3, 2, 1)$; $P(6, 3, 3)$

$\vec{d}_s\,(6, k, 2)$; $P'(6, 4, 3)$

$\overrightarrow{PP'}\,(0, 1, 0)$

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser } |M'| = 0.$$

$|M'| = 6 - 6 = 0$ → Para todos los valores de k las rectas r y s son coplanarias.

Un vector normal al plano es: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (3, 2, 1) \times (6, k, 2) = (4 - k, 0, 3k - 12)$.

Tiene sentido siempre que $k \neq 4$.

El plano que las contiene es:

$$(4 - k)(x - 6) + 0(y - 4) + (3k - 12)(z - 3) = 0 \rightarrow (4 - k)x + (3k + 12)z + (12 - 3k) = 0$$

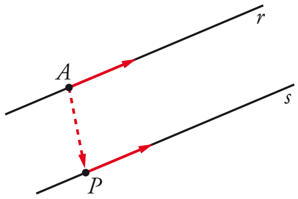
47 Dadas la recta r, determinada por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(3, 1, 2)$, y la recta:

$$s: \begin{cases} x \quad - 2z - 1 = 0 \\ \quad y \quad - 2 = 0 \end{cases}$$

estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1);\ A(1, 1, 1) \\ \vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1);\ A \notin s \end{array}\right\} \text{Las rectas son paralelas.}$$

Obtenemos un punto de s haciendo $z = 0$:



$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} P(1, 2, 0)$$

El plano que buscamos es paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\overrightarrow{AP}\,(0, 1, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = \vec{d}_r \times \overrightarrow{AP} = (2, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 2, 2)$

El plano es:

$$-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0 \rightarrow -x + 2y + 2z - 3 = 0$$

48 Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

El plano será paralelo a $\overrightarrow{AB}\,(-3, 2, -2)$ y a $\vec{d}\,(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al plano es: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \rightarrow \vec{n}\,(4, 7, 1)$

El plano es:

$$4(x - 1) + 7(y - 3) + 1(z - 2) = 0 \rightarrow 4x + 7y + z - 27 = 0$$

49 **Si $A(2, 1, -1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, -3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.**

a) Halla el cuarto vértice, D.

b) Determina la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

a) En un paralelogramo los lados son paralelos dos a dos y del mismo módulo → $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (2, 1, -1) = (-1, -1, 2)$$

$$D = (x, y, z)$$

$$\overrightarrow{DC} = (0, 1, -3) - (x, y, z) = (-x, 1-y, -z-3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (-1, -1, 2) = (-x, 1-y, -z-3) \rightarrow x = 1,\ y = 2,\ z = -5$$

$$D = (1, 2, -5)$$

b) M: el centro del paralelogramo es el punto medio de A y C, dos vértices no consecutivos.

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) - (1, 0, 1) = (-1, 1, -4)$$

π es el plano que contiene al paralelogramo:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 2x - 6y - 2z = 0$$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (2, -6, -2) \\ P_r = (1, 1, -2) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 6\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

50 **Dados los planos:**

$$\pi_1: x + y = 1$$

$$\pi_2: my + z = 0$$

$$\pi_3: x + (m+1)y + mz = m + 1$$

a) ¿Cuánto debe valer m para que no tengan ningún punto en común?

b) Determina su posición relativa cuando $m = 0$.

a) El siguiente sistema debe ser incompatible:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes, A, es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 0$, tienen un punto en común.

Si $m = 1$:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Si añadimos la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow ran(A') = 3$$

No tienen ningún punto en común por ser un sistema incompatible.

b) Si $m = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \quad = 1 \\ \qquad\quad z = 0 \\ x + y \quad = 1 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 \rightarrow \text{tienen una recta en común.}$$

51 **Calcula el valor de m para que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ sean coplanarios. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?**

Hallamos la ecuación del plano que contiene a B, C y D.

El plano será paralelo a $\overrightarrow{BC}(1, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{CD}(6, 0, -2)$, es decir, a (1, 1, 1) y a (3, 0, –1).

Un vector normal al plano es:

$$(1, 1, 1) \times (3, 0, -1) = (-1, 4, -3) \rightarrow \vec{n}(1, -4, 3)$$

La ecuación del plano es:

$$1(x - 0) - 4(y - 1) + 3(z - 2) = 0 \rightarrow x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Para que A pertenezca al mismo plano, ha de ser:

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \rightarrow m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$$

52 **Considera el plano π: $2x - 3y + z = 0$ y la recta de ecuación r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.**

El plano será paralelo a (2, –3, 1) y a (1, –1, 2).

Un vector normal al plano es:

$$(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \rightarrow \vec{n}(5, 3, -1)$$

El punto (1, 2, –1) pertenece al plano.

La ecuación del plano es:

$$5(x - 1) + 3(y - 2) - 1(z + 1) = 0 \rightarrow 5x + 3y - z - 12 = 0$$

53 **Halla las ecuaciones de la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.**

$$\pi_1: \begin{cases} x = 2 \qquad - \mu \\ y = \quad 3\lambda + \mu \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \qquad \pi_2: x + y - z = 3$$

Los puntos de la recta tienen que cumplir las ecuaciones de los dos planos.

Sustituimos los valores de π_1 en π_2:

$$2 - \mu + 3\lambda + \mu - 3 + 3\lambda = 3 \rightarrow 6\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son, por tanto:

$$\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 \end{cases}$$

54 Sean la recta $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y el plano de ecuación $ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (a, -1, 4)$

a) Para que r sea paralela al plano, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ han de ser perpendiculares:

$$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \;\rightarrow\; a = -3$$

b) Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ deberían tener sus coordenadas proporcionales.

Como $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no es posible; es decir, no existe ningún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano.

Página 169

55 Dados la recta y el plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases} \qquad \pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$$

halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r.

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (1, 2, 3)$

Un vector dirección de la recta que buscamos es: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

La recta es: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

56 a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \pi: z = 1$$

b) Halla, si existe, la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por el punto de intersección de r y π.

a) Son perpendiculares y se cortan en el punto (3, 2, 1).

b) $P = r \cap \pi$ es la solución del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow P(3, 2, 1)$$

$\vec{d_r} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) = \vec{n_\pi}$

Todas las rectas contenidas en π son perpendiculares a r. Para encontrar una de ellas, buscamos otro punto de π: $Q(0, 0, 1)$.

$$s: \begin{cases} \vec{d_s} = \overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) - (3, 2, 1) = (-3, -2, 0) \\ P_s = (3, 2, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

57 **a) Dada la recta:**

$$r: \begin{cases} 2x - y - \quad 5 = 0 \\ x + \quad z - 2 = 0 \end{cases}$$

escribe la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$.

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r = (2, -1, 0) \times (1, 0, 1) = (-1, -2, 1) \\ P_r = (0, -5, 2) \end{cases}$

π contiene al vector $\vec{d}_r$ y al vector $\overrightarrow{OP_r} = (0, -5, 2)$

El vector normal al plano es:

$$\vec{n}_\pi = (0, -5, 2) \times (-1, -2, 1) = (-1, -2, -5) = -(1, 2, 5) \to \pi\text{: } x + 2y + 5z + k = 0$$

Como pasa por el origen, π: $x + 2y + 5z = 0$.

b) $s: \begin{cases} \vec{d}_s = (1, 2, 5) \\ P_s = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases}$

58 **Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:**

$$r: \begin{cases} 3x - 2y \quad + 1 = 0 \\ \quad 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de r es:

$$(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) \; // \; (2, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -1)$$

El plano que buscamos es paralelo a $(2, 3, -2)$ y paralelo a $(-1, 4, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$

La ecuación del plano es: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0 \to 5x + 4y + 11z - 15 = 0$

59 **Sean A y B los puntos de coordenadas $A(3, 4, 1 + 2a)$ y $B(-3, a, 0)$. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A y B.**

¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta contenga al punto $R(9, 4, 6)$?

$r: \begin{cases} \vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = (-3, a, 0) - (3, 4, 1 + 2a) = -(6, 4 - a, 2a + 1) \\ P_r = (-3, a, 0) \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = -3 + 6\lambda \\ y = a + (4 - a)\lambda \\ z = (2a + 1)\lambda \end{cases}$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 9 = -3 + 6\lambda \\ 4 = a + (4 - a)\lambda \\ 6 = (2a + 1)\lambda \end{array} \right\} \to 6\lambda = 12 \to \lambda = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 = a + 8 - 2a \\ 6 = 4a + 2 \end{array} \right\} \to \begin{cases} a = 4 \\ a = 1 \end{cases}$$

El sistema es incompatible, luego no existe ningún valor de a para el cual dicha recta contenga al punto $R(9, 4, 6)$.

60 Considera el punto $P(1, 0, 0)$ y las rectas:

$$r\colon x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2} \qquad s\colon (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$$

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

a) $r\colon \begin{cases} \vec{d}_r = (1, 2, -2) \\ P_r = (3, 0, -1) \end{cases}$; $s\colon \begin{cases} \vec{d}_s = (-1, 2, 0) \\ P_s = (1, 1, 0) \end{cases}$

No se cumple que $\vec{d}_r \mathbin{//} \vec{d}_s$ → Las rectas no son paralelas.

$\overrightarrow{P_rP_s} = (1, 1, 0) - (3, 0, -1) = (-2, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\to\; \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $\vec{n}_\pi \perp \vec{d}_r$ y $\vec{n}_\pi \perp \vec{d}_s$ → $\vec{n}_\pi = (1, 2, -2) \times (-1, 2, 0) = (4, 2, 4) = 2\,(2, 1, 2)$

$\pi\colon 2x + y + 2z + k = 0$

Como pasa por P → $2 + k = 0$ → $k = -2$

$\pi\colon 2x + y + 2z - 2 = 0$

61 a) Comprueba que las rectas:

$$r\colon x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{5} \quad \text{y} \quad s\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2-t \end{cases}$$

no se cortan ni son paralelas.

b) Halla la ecuación del plano α que contiene a r y es paralelo a s y la del plano β que contiene a s y es paralelo a r. ¿Cómo son entre sí los planos α y β?

a) $r\colon \begin{cases} \vec{d}_r = (1, 2, 5) \\ P_r = (-1, 1, -3) \end{cases}$; $s\colon \begin{cases} \vec{d}_s = (1, 1, -1) \\ P_s = (0, 1, 2) \end{cases}$

No se cumple que $\vec{d}_r \mathbin{//} \vec{d}_s$ → Las rectas no son paralelas.

$\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 1, 2) - (-1, 1, -3) = (1, 0, 5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\to\; \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) Las direcciones $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ están en ambos planos.

$$\alpha\colon \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; \alpha\colon -x-2y+z+4=0$$

$$\beta\colon \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; \beta\colon -x-2y+z=0$$

$\alpha \mathbin{//} \beta$

Además, no coinciden porque no tienen el mismo término independiente.

62 Considera el plano $\pi: x - z = 0$ y la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - \ \ t \\ z = \ \ \ \ 2t \end{cases}$$

a) Determina el valor de a para que la recta r y el plano π sean paralelos.

b) Para ese valor de a, determina las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1, 1, 0)$.

a) $\overrightarrow{n_\pi} = (1, 0, -1)$

$\overrightarrow{d_r} = (a, -1, 2)$

Para que la recta y el plano sean paralelos, $\overrightarrow{d_r}$ tienen que ser perpendicular a $\overrightarrow{n_\pi}$:

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0 \rightarrow (1, 0, -1) \cdot (a -1, 2) = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

b) $\overrightarrow{d_{r'}} = (2, -1, 2)$

Si r' es perpendicular a r y paralela a π:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{d_{r'}} \perp \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_{r'}} \perp \overrightarrow{n_\pi} \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{d_{r'}} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, 2) \times (1, 0, -1) = (1, 4, 1)$$

Cono pasa por $P(1, 1, 0)$:

$$r': \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

63 Considera que r y s son las rectas definidas por las siguientes expresiones:

$$r: mx = y - 1 = z + 3 \quad \text{y} \quad s: \frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z}{-3}$$

a) Halla el valor del parámetro m para que r y s sean perpendiculares.

b) Justifica si existe algún valor de m para el cual r y s sean paralelas.

a) Para que las rectas sean perpendiculares, $\overrightarrow{d_r}$ tiene que ser perpendicular a $\overrightarrow{d_s}$:

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{m}, 1, 1\right) \cdot (2, 1, -3) = 0 \rightarrow \frac{2}{m} + (-2) = 0 \rightarrow m = 1$$

Para $m = 1$, son perpendiculares.

b) Para que las rectas sean paralelas, $\overrightarrow{d_r}$ tiene que ser proporcional a $\overrightarrow{d_s}$:

$$\frac{2}{1/m} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Como no es cierta la segunda proporción, no pueden ser paralelas nunca.

64 Dado el punto $P(1, -2, 1)$, el plano $\pi: 2x - 4y + z = 15$ y la recta $r: \frac{x}{-2} = y + 1 = \frac{z-2}{-1}$:

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

b) Halla las ecuaciones de la recta que pasa por P, es paralela a π y corta a r.

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (-2, 1, -1) \\ P_r = (0, -1, 2) \end{cases}$

$$\pi': \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (-2, 1, -1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, -1, 2) - (1, -2, 1) = (-1, 1, 1) \\ P = (1, -2, 1) \end{cases} \qquad \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': 2x + 3y - z + 5 = 0$$

b) r' está en el plano paralelo a π que pasa por P y en el plano que hemos encontrado en el apartado a) por cortar a r.

Plano paralelo a π que pasa por P:

$$2x - 4y + z + k = 0 \ \to\ 2 + 8 + 1 + k = 0 \ \to\ k = -11$$

$$r': \begin{cases} 2x - 4y + z - 11 = 0 \\ 2x + 3y - z + \ \ 5 = 0 \end{cases}$$

65 **Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (6, -3, 2)$, $\vec{w} = (4, -6, 3)$, $\vec{p} = (8, 0, a)$, y los planos:**

$$\pi: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$\pi': (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{w} + \mu\vec{p}$$

estudia la posición relativa de π y π' según los valores de a.

Obtenemos las ecuaciones implícitas de los dos planos:

$\vec{u} \times \vec{v} = (21, 26, -24)$

$$\pi: 21(x - 1) + 26(y - 2) - 24(z - 3) = 0$$

$$\rho: 21x + 26y - 24z - 1 = 0$$

$\vec{w} \times \vec{p} = (-6a, 24 - 4a, 48)$

$$\pi': -6a(x - 1) + (24 - 4a)(y - 2) + 48(z - 3) = 0$$

$$\pi': -6ax + (24 - 4a)y + 48z + (14a - 192) = 0$$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 21 & 26 & -24 \\ -6a & 24 - 4a & 48 \end{matrix}}_{M}\ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 192 - 14a \end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 21 & -24 \\ -6a & 48 \end{vmatrix} = 1\,008 - 144a = 0 \ \to\ a = 7$$

- Si $a = 7$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -42 & -4 & 48 & 94 \end{array}\right) \to \text{Los planos se cortan en una recta.}$$

- Si $a \neq 7 \ \to\ ran(M) = ran(M')$. Los planos se cortan en una recta.

Los planos se cortan en una recta cualquiera sea cual sea el valor de a (aunque no sea siempre la misma recta).

66 **Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las rectas:**

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \begin{cases} x + y \qquad + 4 = 0 \\ \quad\ \ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} S_1(2, 2, -1) \\ \vec{d}_1(2, -1, 1) \end{matrix} \qquad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} S_2(-1, -3, 0) \\ \vec{d}_2(-3, -3, 1) \end{matrix}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

- Plano α

  Este plano contiene a la recta s_1 y al punto P, luego:

  $$\vec{d}_1(2, -1, 1) \,//\, \alpha, \quad \overrightarrow{PS_1}(0, 2, 0) \,//\, \alpha, \quad P(2, 0, -1) \in \alpha$$

  La ecuación de α es, por tanto:

  $$\begin{vmatrix} x - 2 & y & z + 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \to\ x - 2z - 4 = 0$$

- Plano β

  Este plano contiene a la recta s_2 y al punto P, luego:

  $$\vec{d}_2(-3,-3,1) \,//\, \beta, \quad \overrightarrow{PS_2}(-3,-3,1) \,//\, \beta, \quad P(2,0,-1) \in \beta$$

  La ecuación de β es, por tanto:

  $$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 3z + 1 = 0$$

  Así, $r: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

67 Estudia las posiciones relativas del plano y la recta siguientes según los valores de a:

$$\pi: x + ay - z = 1 \qquad r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \; x + ay - z = 1 \\ r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases} \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ a-1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|M| = -a^2 + a + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

  $$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$ Planos paralelos. La recta es paralela al plano.

- Si $a = 2$, queda:

  $$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ La 1.ª ecuación se obtiene restándole a la 2.ª la 3.ª.

  Por tanto, la recta está contenida en el plano.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$, la recta y el plano se cortan en un punto.

Página 170

68 Dados los planos $\pi: ax + y + z = a$ y $\pi': x - ay + az = -1$ comprueba que se cortan en una recta para cualquier valor del parámetro a. Obtén el vector dirección de esa recta en función de dicho parámetro.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: ax + y + z = a \\ \pi': \; x - ay + az = -1 \end{array}\right\} \rightarrow M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1) \neq 0 \text{ para todo valor de } a.$$

Por tanto, $ran(M) = 2$ para cualquier valor de a; es decir, los planos se cortan en una recta (cualquiera que sea el valor de a).

- Vector dirección de la recta:

  $$(a, 1, 1) \times (1, -a, a) = (2a, 1 - a^2, -a^2 - 1)$$

69 Considera las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x - 3y \qquad + 6 = 0 \\ ax \qquad - 3z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2ay \qquad = 1 - 4a \\ \qquad 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

a) Averigua si existe algún valor de a para el cual las rectas están contenidas en un plano. En caso afirmativo, calcula la ecuación de dicho plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el que las rectas son paralelas? ¿Para qué valores de a se cruzan?

a) Obtenemos un vector dirección de cada una de las rectas:

$(1, -3, 0) \times (a, 0, -3) = (9, 3, 3a) \; // \; (3, 1, a) = \vec{d}_r$

$(1, -2a, 0) \times (0, 2, -1) = (2a, 1, 2) = \vec{d}_s$

Las coordenadas de los dos vectores no son proporcionales para ningún valor de a; por tanto, las rectas no son paralelas ni coincidentes. Para que estén en un mismo plano, se han de cortar en un punto.

Obtenemos un punto de cada una de las rectas:

$r: x = 0 \;\rightarrow\; y = 2, \; z = 1 \;\rightarrow\; P(0, 2, 1)$

$s: y = 0 \;\rightarrow\; z = -4, \; x = 1 - 4a \;\rightarrow\; P'(1 - 4a, 0, -4)$

$\overrightarrow{PP'}\,(1 - 4a, 2, 5)$

Para que las rectas se corten, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2a & 1 & 2 \\ 1 - 4a & -2 & -5 \end{vmatrix} = a - 1 = 0 \;\rightarrow\; a = 1$$

Si $a = 1$, las rectas son secantes, y, por tanto, están contenidas en un plano.

El plano será paralelo a $(3, 1, 1)$ y a $(2, 1, 2)$. Un vector normal al plano será:

$$\vec{n} = (3, 1, 1) \times (2, 1, 2) = (1, -4, 1)$$

Un punto del plano es, por ejemplo, $P(0, 2, 1)$. Así, la ecuación del plano es:

$$1(x - 0) - 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0 \;\rightarrow\; x - 4y + z + 7 = 0$$

b) Por lo obtenido en el apartado anterior, sabemos que:

- No hay ningún valor de a para el que las rectas sean paralelas.
- Si $a \neq 1$, las rectas se cruzan.

70 Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$, es paralela a $\pi: x - y + z - 3 = 0$ y corta a $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

- Como corta a s, pasará por el punto $P(1, 3, k)$ para cierto valor de k.
- Como pasa por $A(1, 1, 1)$ y por $P(1, 3, k)$, un vector dirección es $\overrightarrow{AP}\,(0, 2, k - 1)$.
- Como ha de ser paralelo al plano π, será perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}\,(1, -1, 1)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -2 + k - 1 = 0 \;\rightarrow k = 3, \text{ es decir: } \overrightarrow{AP}\,(0, 2, 2) \; // \; (0, 1, 1)$$

- Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Cuestiones teóricas

71 **¿Verdadero o falso? Justifica las respuestas.**

a) El plano $x + 14y + 11z + 12 = 0$ es paralelo a la recta $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$.

b) El plano del apartado anterior contiene a la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = z - 1$.

c) El vector director de una recta determinada por dos planos secantes, es paralelo a los vectores normales de ambos planos.

d) Si las rectas r y s se cruzan, existe una recta que pasa por un punto dado y corta a r y a s.

e) Si el vector director de una recta no es perpendicular al vector normal de un plano, la recta y el plano se cortan.

f) Si los planos α y β son paralelos y π es un plano que los corta, entonces el sistema de ecuaciones que forman los tres planos es compatible indeterminado.

g) La recta $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ está contenida en el plano de ecuación $2x - y + mz = 3$ cualquiera que sea el valor de m.

a) $\vec{n}_\pi = (1, 14, 11)$

$\vec{d}_r = (5, 2, -3)$

$\pi \,//\, r \to \vec{n}_\pi \perp \vec{d}_r$

$(1, 14, 11) \cdot (5, 2, -3) = 0$, luego $\pi \,//\, r$. La afirmación es verdadera.

b) $\vec{n}_\pi = (1, 14, 11)$

$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (3, -1, 1) \\ P_r = (2, -1, 1) \end{cases}$

$(1, 14, 11) \cdot (3, -1, 1) = 0$, luego $\pi \,//\, r$.

Sustituimos las coordenadas de P_r en π: $2 - 14 + 11 + 12 = 11 \neq 0 \to$ son paralelos y no tienen ningún punto en común. La afirmación es falsa.

c) Falso. El vector director de una recta determinada por dos planos secantes, es perpendicular a los vectores normales de ambos planos.

d) Verdadero. Es la recta intersección de los dos planos que contienen a cada una de las rectas y al punto dado, respectivamente.

e) Verdadero. Si el vector director de una recta no es perpendicular al vector normal de un plano, entonces la recta no es paralela al plano, luego se cortan.

f) Falso. El sistema de ecuaciones que forman los tres planos es incompatible, puesto que no hay ningún punto que pertenezca a los tres a la vez, porque dos de ellos son paralelos.

g) Falso.

$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (2, 1, 0) \\ P_r = (1, 2, 0) \end{cases}$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = (2, -1, 0) \cdot (2, 1, 0) = 3 \neq 0$, luego no se cumple que $r \,//\, \pi$.

Por tanto, no puede estar contenida r en π.

72 **a) Explica cómo se obtienen las ecuaciones paramétricas de un plano del que se conoce la ecuación implícita. Aplícalo al plano π: $x + 2y - z - 1 = 0$.**

b) ¿Cómo se hace si en la ecuación no aparece una de las incógnitas? Aplícalo al plano π': $2x - z + 8 = 0$.

a) Hacemos, por ejemplo, $y = \lambda$, $z = \mu$ y despejamos x.

En el caso del plano $x + 2y - z - 1 = 0$, quedaría: $x = 1 - 2y + z$; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\} \text{ son sus ecuaciones paramétricas.}$$

b) Se procede de la misma manera. Hacemos, por ejemplo, $x = \lambda$, $y = \mu$ y despejamos z. En el caso del plano $2x - z + 8 = 0$, quedaría: $z = 2x + 8$; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 8 + 2\lambda \end{array}\right\} \text{ son sus ecuaciones paramétricas.}$$

73 **¿Cuáles son las ecuaciones implícitas de esta recta?:**

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{2}$$

¿Cómo se podría recorrer el camino inverso, es decir, encontrar la ecuación continua a partir de la ecuación implícita?

No es admisible que el denominador de una fracción sea cero. Por tanto, esta expresión solo tiene valor simbólico. Se trata de una recta que pasa por el punto $P(4, -3, 1)$ y es paralela al vector (0, 0, 2).

Sus ecuaciones paramétricas son: $\left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right.$

Las ecuaciones implícitas son: $\left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \end{array}\right.$

Despejamos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 4 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{0}$$

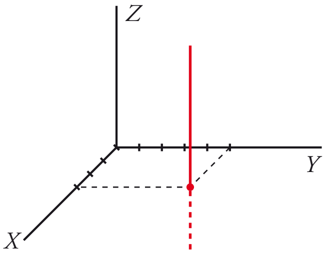
El vector será (0, 0, 1), que es paralelo a $(0, 0, k)$ para cualquier k y hace que z pase por cualquier punto, luego:

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-a}{k} = \frac{z-1}{2}$$

74 **Las ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{array}\right.$ tienen dos parámetros pero no representan un plano. Explica por qué. ¿Qué figura es?**

Realmente, los dos parámetros se comportan como uno solo. Estas ecuaciones paramétricas son equivalentes a estas otras:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$



Si interpretamos las primeras ecuaciones en forma vectorial, se trata de una figura que pasa por (3, 5, 2) y se genera con los vectores (0, 0, 1) y (0, 0, 1). Obviamente, es un único vector paralelo al eje Z. Por tanto, es una recta paralela al eje Z que pasa por (3, 5, 2).

75 **¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano?**

Deben ser paralelas o secantes.

76 **Sean π_1 y π_2 dos planos paralelos y r_1 y r_2 dos rectas contenidas en π_1 y π_2, respectivamente. ¿Podemos asegurar que r_1 y r_2 son paralelas?**

No. Pueden ser paralelas o cruzarse.

77 **Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del plano $ax + by + cz + d = 0$. Prueba analíticamente que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al vector $\vec{n}(a, b, c)$.**

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \ \to \ ax_1 + by_1 + cz + d = 0 \\ B \in \pi \ \to \ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{array}\right\}$$

Restando, obtenemos:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0; \text{ es decir:}$$

$$(a, b, c) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \ \to \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\vec{n}$.

78 **¿Qué condición deben cumplir tres puntos para que determinen un plano? Justifica que hay infinitos planos que contengan a los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$ y $C(5, 6, 7)$.**

La condición que deben cumplir tres puntos para que determinen un plano es que no deben estar alineados.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1), \ \overrightarrow{AC} = (4, 4, 4) \ \to \ A, \ B \text{ y } C \text{ están alineados, luego determinan una recta.}$$

Hay un haz de planos que los contienen.

79 **Considera la recta y el plano siguientes:**

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \pi: a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

a) ¿Qué significa geométricamente que el sistema que se obtiene juntando las ecuaciones de la recta y el plano sea compatible?

b) ¿Y si el sistema resulta compatible indeterminado?

a) Si el sistema es compatible tiene solución, es decir, se cortan en un punto o en una recta.

b) Si es compatible indeterminado, significa que la recta está contenida en el plano.

80 **Indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ sea:**

a) Paralelo al plano XY.

b) Perpendicular al plano XY.

c) Paralelo al eje Z.

d) Perpendicular al eje X.

e) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $a = b = 0, \ c \neq 0, \ d \neq 0$

b) $c = 0$

c) $c = 0, \ d \neq 0$

d) $b = c = 0$

e) $a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0$

81 **a) Demuestra que la ecuación del plano que corta a los ejes en $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$, siendo a, b y c no nulos, puede escribirse $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.**

b) Calcula los puntos de corte del plano $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$ con los ejes de coordenadas.

a) Si sustituimos las coordenadas de los puntos A, B y C en la ecuación dada, vemos que la cumplen.

Por otra parte, para ver los puntos de corte con los ejes de coordenadas del plano dado, hacemos lo siguiente:

- corte con el eje $X \to y = z = 0 \to x = a \to A(a, 0, 0)$
- corte con el eje $Y \to x = z = 0 \to y = b \to B(0, b, 0)$
- corte con el eje $Z \to x = y = 0 \to z = c \to C(0, 0, c)$

b) Evidentemente, los puntos de corte son:

$(5, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 7)$

Página 171

82 **Razona qué condición deben cumplir a, b y c para que la recta $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \\ z = -3 + ct \end{cases}$ sea:**

a) Paralela al plano XZ.

b) Perpendicular a XY.

c) Paralela al eje X.

d) Pase por $P(2, 3, -2)$.

a) π = plano XZ

$\overrightarrow{n_\pi} = (0, 1, 0)$

$\pi \,//\, r \to \overrightarrow{n_\pi} \perp \overrightarrow{d_r} \to (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \to b = 0$

b) π = plano XY

$\overrightarrow{n_\pi} = (0, 0, 1)$

$\pi \,//\, r \to \overrightarrow{n_\pi} \perp \overrightarrow{d_r} \to (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \to c = 0$

c) $\overrightarrow{d_{OX}} = (1, 0, 0)$

$(a, b, c) = k(1, 0, 0) \to b = c = 0$

d) $\overrightarrow{PP_r} = (2, 3, -2) - (1, 2, -3) = (1, 1, 1)$

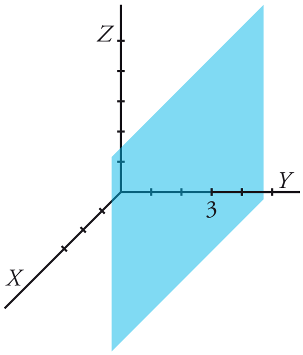
$\overrightarrow{PP_r} = k(a, b, c)$

$(1, 1, 1) = k(a, b, c) \to a = b = c$

83 Describe y representa cada una de las siguientes figuras:

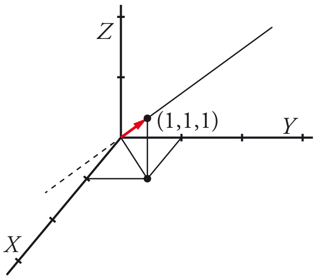
a) $y = 3$ **b)** $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **c)** $x = y = z$ **d)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

a) Es un plano paralelo al plano *XZ* que pasa por (0, 3, 0)

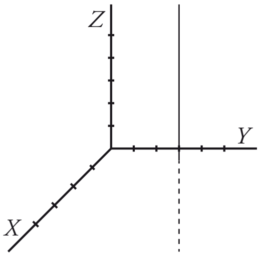


b) Es la recta intersección de los planos *YZ* y *XY*, es decir, la recta del eje *OY*.

c) Es una recta que pasa por el origen y tiene como vector de dirección (1, 1, 1).



d) Es una recta paralela al eje *OZ* que pasa por (0, 3, 0).



e) Es un plano que pasa por (0, 0, 0) y contiene a los vectores (1, 0, 0) y (0, 1, 0), es decir, es el plano *XY*.

f) Es el punto (0, 3, 0).

Para profundizar

84 Considera el plano π: $ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

π con r_1: $a + 2z + 1 = 0 \to z = \dfrac{-1-a}{2} \to P\left(1, \dfrac{-1-a}{2}, \dfrac{-1-a}{2}\right)$

π con r_2: $2a + 3z + 1 = 0 \to z = \dfrac{-1-2a}{3} \to Q\left(2, \dfrac{-2-4a}{3}, \dfrac{-1-2a}{3}\right)$

π con r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \ \to\ z = \dfrac{-1-3a}{4} \ \to\ R\left(3, \dfrac{-3-9a}{4}, \dfrac{-1-3a}{4}\right)$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \quad \overrightarrow{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \ \to\ -2-10a = -1-11a \ \to\ a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \ \to\ a = 1$$

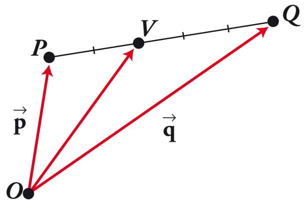
Por tanto, $a = 1$.

85 Puntos interiores en un segmento

Dividimos el segmento PQ en cinco partes iguales y situamos el punto V a dos unidades de P y a tres de Q. ¿Cuáles son las coordenadas de V?

Para hallarlas, llamamos: $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\quad \vec{q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OV} = \vec{p} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{5}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{3}{5}\vec{p} + \frac{2}{5}\vec{q}$$



a) Si $P(4, -1, 8)$ y $Q(-1, 9, 8)$, halla las coordenadas de V.

b) Obtén las coordenadas de un punto W situado en el segmento PQ del siguiente modo: se divide el segmento en 7 partes iguales y situamos W a 2 de P.

Aplícalo a los puntos $P(2, 11, -15)$, $Q(9, -3, 6)$.

c) Demuestra que si dividimos el segmento PQ en $m + n$ partes y situamos X a m unidades de P, las coordenadas de X son:

$$\frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Demuestra que si $0 \le \alpha \le 1$, entonces $(1-\alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$ es un punto de PQ.

a) $V = \dfrac{3}{5}(4, -1, 8) + \dfrac{2}{5}(-1, 9, 8) = (2, 3, 8)$

b) Razonando como en el caso anterior, llegamos a:

$$\overrightarrow{OW} = \vec{p} + \frac{2}{7}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{7}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{5}{7}\vec{p} + \frac{2}{7}\vec{q}$$

Si consideramos el caso $P(2, 11, -15)$ y $Q(9, -3, 6)$, entonces:

$$W = \frac{5}{7}(2, 11, -15) + \frac{2}{7}(9, -3, 6) = (4, 7, -9)$$

c) Razonando como en los casos anteriores, tenemos que:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}(\vec{q} - \vec{p}) =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q} = \frac{m}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Llamamos $d = |\overrightarrow{PQ}|$. Sea X un punto del segmento PQ que esté a una distancia αd de P y $(1-\alpha)d$ de Q. (Como $0 \le \alpha \le 1$, entonces $0 \le \alpha d \le d$; luego X pertenece al segmento PQ).

Razonando como en los apartados anteriores, tenemos que las coordenadas de X son:

$$\frac{(1-\alpha)\,d}{d}\vec{p} + \frac{\alpha d}{d}\vec{q}; \text{ es decir, } (1-\alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$$

Por tanto, este punto (que es X) es un punto del segmento PQ.

Autoevaluación

Página 171

1 **Considera la recta r que pasa por los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(1, -1, 3)$ y el plano que contiene a los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(4, 1, 0)$. Determina:**

a) Las ecuaciones implícitas de la recta y el plano.

b) Su posición relativa.

a) Ecuaciones implícitas de la recta:

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (1, -1, 3) - (1, 2, 3) = (0, -3, 0) = -3(0, 1, 0) \\ P_r = (1, 2, 3) \end{cases}$$

Es una recta paralela a OY:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ecuación del plano:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) - (1, 0, 1) = (1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 1, 0) - (1, 0, 1) = (3, 1, -1)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ \pi: -x + 7y + 4z - 3 = 0$$

b) $\vec{n}_\pi = (-1, -9, 4)$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = (-1, -9, 4) \cdot (0, 1, 0) = -9 \neq 0 \ \rightarrow$ luego se cortan.

2 **a) Halla el vector director de la recta** $r: \begin{cases} x - y \quad = 0 \\ \quad y + z = 2 \end{cases}$**.**

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta anterior.

a) $\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

b) Hallamos un punto de r:

$$P_r(2, 2, 0)$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3 **Dadas las rectas r y s de ecuaciones:**

$$r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = -\frac{z}{2}$$

Halla la ecuación de la recta paralela a r y que pasa por el punto de s cuya tercera coordenada, z, es 0.

$P(2, -1, 0)$

$\vec{d}_r = (1, -1, 1) \times (2, 1, -1) = (0, 3, 3) = 3(0, 1, 1)$

$$r': \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

4 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} x = \ \ 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \ \ \lambda \\ z = \qquad \lambda \end{cases} \text{ y es paralelo a } s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}.$$

Vectores de dirección de π: $(3, -1, 1)$ y $(5, 2, -3)$

Punto: $P_r(2, -1, 0)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ \pi: x + 14y + 11z + 12 = 0$$

5 Halla la posición relativa de las rectas r y s para $k = 2$ y $k = 5$. Si se cortan, indica en qué punto:

$$r: \frac{x-17}{7} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-8}{2} \qquad s: \begin{cases} x = \ 15 + 4\lambda \\ y = -2 - \ \ \lambda \\ z = \ 19 + k\lambda \end{cases}$$

- Para $k = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}_r(7, 0, 2); \ R(17, 1, 8) \in r \\ \vec{d}_s(4, -1, 2); \ S(15, -2, 19) \in s \end{array} \right\} \ \overrightarrow{SR}(2, 3, -11)$$

Veamos el rango de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 77 + 24 + 4 - 42 = 63 \neq 0$$

Los tres vectores son linealmente independientes. Las rectas, por tanto, se cruzan.

- Para $k = 5$:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}_r(7, 0, 2); \ R(17, 1, 8) \in r \\ \vec{d}_s(4, -1, 5); \ S(15, -2, 19) \in s \end{array} \right\} \ \overrightarrow{SR}(2, 3, -11)$$

Veamos el rango de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

El vector $\overrightarrow{SR}$ depende linealmente de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Las rectas, por tanto, se cortan.

Expresamos r en paramétricas e igualamos coordenada a coordenada:

$$r: \begin{cases} x = 17 + 7\mu \\ y = 1 \\ z = 8 + 2\mu \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} 17 + 7\mu = 15 + 4\lambda \\ 1 = -2 - \lambda \\ 8 + 2\mu = 19 + 5\lambda \end{cases}$$

El sistema tiene solución: $\lambda = -3$, $\mu = -2$

Sustituimos $\lambda = -3$ en s:

$$\left. \begin{array}{l} x = 15 + 4(-3) = 3 \\ y = -2 - (-3) = 1 \\ z = 19 + 5(-3) = 4 \end{array} \right\} \text{ Se cortan en el punto } (3, 1, 4)$$

Se obtiene el mismo punto sustituyendo $\mu = -2$ en las ecuaciones de r.

6 Estudia la posición relativa de los siguientes planos según el valor de m:

$$\alpha: 2x + y + z - 1 = 0 \qquad \beta: x + y - z - m = 0 \qquad \gamma: x + mz + 1 = 0$$

En caso de que se corten en una recta, escribe sus ecuaciones paramétricas.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = m - 2$$

- Si $m \neq 2 \to ran \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} = 3 \to$ Los planos se cortan en un punto.
- Si $m = 2 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$

  Si consideramos los términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

  Es decir, para $m = 2$ el rango de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado → los planos se cortan en una recta:

  $$r: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

  Resolvemos el sistema: $x = -2\lambda - 1$, $y = 3\lambda + 3$, $z = \lambda$

  $$r: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

7 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 7 - \lambda \\ y = -15 + 3\lambda \\ z = 7 \end{cases}$$

Halla una recta s que pasa por P y corta a r_1 y a r_2.

La recta pedida, s, será la intersección de dos planos:

- π_1, que contiene a P y a r_1.
- π_2, que contiene a P y a r_2.

El vector director de la recta r_1, $\overrightarrow{d_1}(0, 1, 2)$, es paralelo al plano y el vector que va desde el punto P al punto $R_1(1, 5, 2)$ de la recta r_1, $\overrightarrow{PR_1}(-1, 5, 1)$, también lo es. Por lo tanto, el plano π_1 será:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y & z - 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to 9(x - 2) + 2y - (z - 1) = 0 \to \pi_1: 9x + 2y - z - 17 = 0$$

De la misma forma, π_2 vendrá dado así:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y & z - 1 \\ 5 & -15 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -18(x - 2) - 6y = 0 \to \pi_2: 3x + y - 6 = 0$$

s es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\left.\begin{aligned} 9x + 2y - z - 17 = 0 \\ 3x + y - \quad 6 = 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} x = \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

8 **Determina la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$, es paralela a $\pi: x - y + z - 3 = 0$ y corta a la recta s: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.**

r es la intersección del plano π' paralelo a π que pasa por A y del plano π'' que contiene a s y a A.

$\pi': x - y + z + k = 0$

$A \in \pi': 1 - 1 + 1 + k = 0 \rightarrow k = -1$

$\pi': x - y + z - 1 = 0$

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{d_s} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) \\ P_s = (1, 3, 0) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AP_s} = (0, 2, -1)$

$$\pi'': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi'': 2 - 2x = 0 \rightarrow x - 1 = 0$$

$$r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$