Definición: Coordenadas.

En un espacio vectorial V, fijada una base $\{v_1,v_2,...v_n\}$, todo vector $u \in V$ puede ponerse de forma única como combinación lineal de dicha base:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... \alpha_n v_n$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se llaman coordenadas del vector u en la base $\{v_1,v_2,...v_n\}$.

Ejemplos de coordenadas.

1. Coordenadas en distintas bases.

En $\Re^2$ fijemos la base canónica, { (1,0), (0,1) }. Consideremos el vector **v**=(1,2). Para hallar sus coordenadas en esta base, ponemos u como combinación lineal de la misma:

$$(1,2)=\mathbf{1}\cdot(1,0) + \mathbf{2}\cdot(0,1)$$

Por tanto, (1,2) son las coordenadas de **v** en base canónica.

Cuando se utiliza la base canónica, obtenemos el sentido usual de "coordenadas".

Pero cuando se utiliza otra base no es así.

Por ejemplo, en $\Re^2$ fijemos ahora la base **B** = { (2,3), (1,–1) } y consideremos el mismo vector **v**=(1,2). Hallemos sus coordenadas en la base **B**. Para poner **v** como combinación lineal de dicha base, planteamos el sistema

$(1,2)= \alpha\,(2,3)+\beta\,(1,-1)$ cuya solución es $\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = -\frac{1}{5}$. Así pues,

$$\mathbf{v} = \frac{3}{5}\,(2,3) - \frac{1}{5}\,(1,-1)$$

Por tanto, $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son las coordenadas de **v** en base **B**.

No debe confundirse el vector con sus coordenadas; aquí el vector sigue siendo **v**=(1,2), y las coordenadas $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son un par de números que indican cómo expresar **v** en combinación lineal de la base B.

2. Si u es el vector que tiene como coordenadas (5, –6) en la base (1,2) (3,4), ¿cuál es el vector u?

Según la definición de coordenadas,

$$u = 5\,(1,2) + (-6)\,(3,4) = (-13, -14).$$

3. El vector cero tiene coordenadas (0, . . . ,0) en cualquier base.

4. Coordenadas en un subespacio.

En $\Re^3$, sea el subespacio S generado por los vectores (1,1,0) y (0,0,1). (Se trata del plano **x=y** en $\Re^3$). Los dos vectores son independientes, por tanto forman base de S.

Consideremos el vector **v** = (2,2,3) perteneciente a S. Hallemos las coordenadas de este vector respecto a la base (1,1,0), (0,0,1) de S. Para ello expresamos **v** como combinación lineal de dicha base:

(2,2,3)= **2**·(1,1,0) + **3**·(0,0,1)

Así pues, las coordenadas de **v** en esta base de S son (2,3).

No debe sorprendernos que **v** tenga sólo 2 coordenadas. El vector **v** ciertamente tendría 3 coordenadas como elemento de $\Re^3$, pero tiene 2 coordenadas como elemento del plano S, que es un subespacio de dimensión 2.

Definición: Matriz del cambio de base.

En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama matriz de cambio de base (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

Su utilidad es la siguiente: Conocidas las coordenadas de un vector en base B, nos permitirá hallar las coordenadas de dicho vector en base B'.

En efecto, sean $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ las coordenadas de un vector en base B, y sea P la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces:

$$P\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{o lo que es lo mismo,} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

obteniéndose así $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ las coordenadas del vector en base B'.

Ejemplo.

Consideremos en $\Re^2$ las dos bases siguientes:

la base del ejemplo (1) anterior, B ={ (2,3), (1, –1) }

la base canónica B' ={ (1,0), (0,1) }

- Vamos a construir la matriz de cambio de base de B a B'.

Para ello debemos expresar los vectores de la base B en función de la base canónica B'.

(2,3) = **2**·(1,0) + **3**·(0,1) → coordenadas (2,3)

(–1,1)= **1**·(1,0) –**1**·(0,1) → coordenadas (1, –1)

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B a B':

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- <u>Del mismo modo podemos construir la matriz de cambio de base de B' a B.</u>

Para ello expresamos los vectores de la base canónica B' en función de la base B. Podemos hallarlo planteando dos sistemas de ecuaciones, de los cuales se obtendrá

$$(1,0) = \frac{1}{5}(2,3) + \frac{3}{5}(1,-1) \rightarrow \text{coordenadas } \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$(0,1) = \frac{1}{5}(2,3) - \frac{2}{5}(1,-1) \rightarrow \text{coordenadas } \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B' a B.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar estas matrices para hallar las coordenadas en base B del vector **v**=(1,2). Tenemos sus coordenadas en la base canónica B' que son (1,2). Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así hemos obtenido $\left(\frac{3}{5} \quad , \quad -\frac{1}{5}\right)$, las coordenadas de v en base B. Comprobar que son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo (1) anterior.

Podemos volver a las coordenadas en base B' utilizando la matriz P de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedades de las matrices de cambio de base</u>.

1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada nxn, donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.

2. Toda matriz de cambio de base es inversible (es decir, con determinante no nulo).

Además, la matriz de cambio de B a B' es inversa de la matriz de cambio de B' a B.

- Comprobar en el ejemplo anterior que P y Q son inversas entre sí. Por tanto, después de hallar P, podríamos haber hallado Q como P^{-1}.

3. La matriz de cambio de una base B a la misma base B, es la matriz identidad.

- Observar en el ejemplo anterior que la matriz más fácil de obtener es la **P**, que pasa de una base B a la base canónica, pues basta escribir en las columnas la base B.

$$\begin{tikzcd} \text{Base B} \arrow[r, bend left, "P"] & \text{Base canónica} \arrow[l, bend left, "Q"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\textbf{P= base B en columnas; Q=P}^{-1}}$$

Ejemplo 1: *En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases*

$$\mathscr{B}_1 = \{(5,3,1),(1,-3,-2),(1,2,1)\}, \quad \mathscr{B}_2 = \{(-2,1,0),(-1,3,0),(-2,-3,1)\}$$

calcule la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$.

Para calcular la matriz asociada debemos calcular las coordenadas de los vectores de la base $\mathscr{B}_2$ respecto de los vectores de la base $\mathscr{B}_1$, es decir, debemos calcular los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
(-2,1,0) &= a_{11}(5,3,1)+a_{21}(1,-3,-2)+a_{31}(1,2,1) = (5a_{11}+a_{21}+a_{31}, 3a_{11}-3a_{21}+2a_{31}, a_{11}-2a_{21}+a_{31})\\
(-1,3,0) &= a_{12}(5,3,1)+a_{22}(1,-3,-2)+a_{32}(1,2,1) = (5a_{12}+a_{22}+a_{32}, 3a_{12}-3a_{22}+2a_{32}, a_{12}-2a_{22}+a_{32})\\
(-2,-3,1) &= a_{13}(5,3,1)+a_{23}(1,-3,-2)+a_{33}(1,2,1) = (5a_{13}+a_{23}+a_{33}, 3a_{13}-3a_{23}+2a_{33}, a_{13}-2a_{23}+a_{33})
\end{aligned}$$

Esto se reduce a la resolución de tres sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} -2 &=& 5a_{11}+a_{21}+a_{31}\\ 1 &=& 3a_{11}-3a_{21}+2a_{31}\\ 0 &=& a_{11}-2a_{21}+a_{31}\end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{rcl} -1 &=& 5a_{12}+a_{22}+a_{32}\\ 3 &=& 3a_{12}-3a_{22}+2a_{32}\\ 0 &=& a_{12}-2a_{22}+a_{32}\end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{rcl} -2 &=& 5a_{13}+a_{23}+a_{33}\\ -3 &=& 3a_{13}-3a_{23}+2a_{33}\\ 1 &=& a_{13}-2a_{23}+a_{33}\end{array}\right\}$$

Los tres tienen en común la matriz de coeficientes, de forma que podemos resolverlos simultáneamente sin más que encontrar la matriz escalonada reducida de:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Las columnas 4, 5 y 6 de la escalonada reducida será la matriz buscada.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3\\ 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2\end{array}\right) \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6\\ 0 & 11 & -4 & -2 & -1 & -7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-4F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6\\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17\end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6\end{array}\right) \xrightarrow{F_3+3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17\\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45\end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -17 & -36 & 46\\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17\\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45\end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -5 & -10 & 12\\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17\\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45\end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{-F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -5 & -10 & 12\\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 & -17\\ 0 & 0 & 1 & 17 & 36 & -45\end{array}\right)$$

Hemos resuelto los tres sistemas simultáneamente, las soluciones serían:

$$\begin{array}{lll} a_{11}=-5 & a_{21}=6 & a_{31}=17\\ a_{12}=-10 & a_{22}=13 & a_{32}=36\\ a_{13}=12 & a_{23}=-17 & a_{33}=-45\end{array}$$

por lo que la matriz de cambio de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es $P = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 12\\ 6 & 13 & -17\\ 17 & 36 & -45\end{pmatrix}$

Ejemplo 2: *En el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se consideran dos bases:*

$$\mathscr{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,1)\}$$
$$\mathscr{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

Si la matriz de cambio de base, tomando como base nueva la base $\mathscr{B}_2$ y como base antigua $\mathscr{B}_1$ es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

¿Puedes calcular los vectores de la base $\mathscr{B}_2$?

Las columnas de la matriz P son las coordenadas en la base antigua de los vectores de la base nueva, es decir,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (1,0,1)+2(1,1,0)-(0,0,1) = (3,2,0)\\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (1,0,1)+(1,1,0)-(0,0,1) = (2,1,0)\\
\vec{v}_3 &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 2(1,0,1)+(1,1,0)+(0,0,1) = (3,1,3)
\end{aligned}$$