Tema V: CALCULO DE INTEGRALES

1.- CONCEPTO DE PRIMITIVA DE UNA FUNCION:

Como hemos visto hasta ahora, la derivación es una técnica a partir de la cual dada una función cualquiera f(x) podemos calcular su derivada f'(x). Pues bien, ahora vamos a trabajar el proceso contrario, en el que conocida la derivada de una función f'(x), tratamos de encontrar la función de la que proviene, *primitiva,* f(x).

Función		**Derivada**
$f(x)=x^2+2$	Derivación → ← Integración	$f'(x)=2x$

Sean f y F dos funciones definidas en un mismo intervalo de definición I, decimos que F(x) es la primitiva de f(x) en el intervalo I si ocurre que: $F'(x)=f(x)$.

F(x) es la función primitiva de f(x) $\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas, que se diferencian entre sí en una constante.

Ejemplo: La función f(x) = 2x tiene por primitivas $F(x)=\begin{cases} x^2+7 \\ x^2 \\ x^2-4 \end{cases}$ en general x^2+K

Se llama ***integral indefinida*** de una función f(x) al conjunto formado por todas sus primitivas, y se representa por:

$$\boxed{\int f(x)\cdot dx = F(x)+C}$$

Se lee ***integral de f(x) diferencial de x***, y donde C es un número real cualquiera llamado *constante de integración.*

2.- PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS:

- La integral de la suma (diferencia) de dos funciones es igual a la suma (diferencia) de las integrales de dichas funciones.

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- La integral del producto de una función por una constante *k*, es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot \int f(x)dx$$

(un factor constante puede sacarse fuera de la integral)

3.- TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

Tipos	Formas: Simple	Formas: Compuesta
Potencial $(a \neq -1)$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f' \cdot f^a dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\|$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln\|f\|$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)}$ $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = senx$	$\int \cos f \cdot f' dx = senf$
Coseno	$\int senx dx = -\cos x$	$\int senf \cdot f' dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = tgx$ $\int (1 + tg^2 x) dx = tgx$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx$	$\int \sec^2(f) \cdot f' dx = tg(f)$ $\int [1 + tg^2(f)] \cdot f' dx = tg(f)$ $\int \frac{f'}{\cos^2(f)} dx = tg(f)$
Cotangente	$\int co\sec^2 x dx = -cotgx$ $\int (1 + cotg^2 x) dx = -cotgx$ $\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -cotgx$	$\int co\sec^2(f) \cdot f' dx = -cotg(f)$ $\int [1 + cotg^2(f)] \cdot f' dx = -cotg(f)$ $\int \frac{f'}{Sen^2(f)} dx = -cotg(f)$
Arco Seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = Arcsen(x) = -Arc\cos(x)$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = Arcsen\left(\frac{x}{a}\right) = -Arc\cos\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = Arcsen(f) = -Arc\cos(f)$ $\int \frac{f'}{\sqrt{a^2 - f^2}} dx = Arcsen\left(\frac{f}{a}\right) = -Arc\cos\left(\frac{f}{a}\right)$
Arco Tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x)$ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = arctg(f)$ $\int \frac{f'}{a^2 + f^2} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{f}{a}\right)$
Neperiano – Arco tangente	$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx =$ neperiano + arco tangente $M \neq 0$, $ax^2 + bx + c$ irreducible	

4.-TECNICAS DE INTEGRACIÓN:

4.1.- El método de Sustitución (ó Cambio de Variable)

Se basa en la utilización de la regla de la cadena. Consiste en expresar la función a integrar en función de otra variable, normalmente t, de modo que la integral resultante sea inmediata, o por lo menos más sencilla.

Para hallar una primitiva de $\int f(x)dx$, haremos el siguiente cambio de variable: $x = g(t)$, después diferenciamos en ambas partes: $dx = g'(t) \cdot dt$ y sustituimos en la primitiva, de forma que la primitiva quedará:

$$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right]\cdot g'(t)\cdot dt$$

Tras hallar el miembro de la derecha en función de *t*, se deshace el cambio de variable y así obtenemos la integral buscada; es decir traducimos el resultado en términos de x.

Ejemplo 1: Calcular $\int (x+3)^{11}dx$.

Hacemos: $(x+3)=u$, de aquí, $x=u-3$ ➔ $dx=du$, sustituyendo:

$$\int (x+3)^{11}dx = \int u^{11}du = \frac{1}{12}u^{12}+K = \frac{1}{12}(x+3)^{11}+K$$

Este método se suele utilizar en funciones que tienen raíces (Radicalarias).

Ejemplo 2: Calcular $\int x\sqrt{1-x}\,dx$.

Hacemos: $(1-x)=u$, de aquí, $x=1-u$ ➔ $dx=-du$, sustituyendo:

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx = \int (1-u)\cdot u^{\frac{1}{2}}(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{5}{2}}du = -\int u^{\frac{1}{2}}du + \int u^{\frac{5}{2}}du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+K = (1-x)\sqrt{1-x}\cdot\left(\frac{2}{5}(1-x)-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=(1-x)\sqrt{1-x}\left(\frac{-6x-4}{15}\right)+K$$

4.2.- Integración por simple inspección:

Dos sencillas fórmulas nos capacitan para hallar primitivas de forma casi inmediata. La primera es:

$$\boxed{\int g'(x)\cdot[g(x)]^r\,dx = \frac{1}{r+1}[g(x)]^{r+1}+K} \quad \text{con } r \neq -1$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

Utilizando la fórmula anterior: $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3+K$

La segunda fórmula de integración rápida es: $\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)|+K}$

Ejemplo 4: Calcular $\int \frac{x^2}{x^3-5}dx$

Utilizando la fórmula anterior:

$$\int \frac{x^2}{x^3-5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-5}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-5|+K$$

4.3.- Integración por Descomposición:

Consiste en descomponer una función f(x) de la forma: $f_1(x)+f_2(x)+\dots\dots\dots+f_n(x)$, de forma que descomponemos una integral en muchas que se resuelven más fácilmente.

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots\dots\dots\dots + \int f_n(x)dx$$

Ejemplo 5: Calcular $\int (senx+\cos x)^2 dx$

Utilizando este método: $\int (senx+\cos x)^2 dx = \int (sen^2 x+\cos^2 x+2senx\cos x)dx = \int (sen^2 x+\cos^2 x)dx +$
$+\int 2senx\cos x dx = \int 1dx + \int sen2x\cdot dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + K$

4.4.- Integración por Partes:

Este método se suele utilizar cuando tenemos producto de funciones, y lo que hacemos es separar la integral en dos partes, mediante la fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

La mecánica que se sigue para integrar con este método es la siguiente: Si tenemos que calcular $\int f(x)\cdot g(x)dx$, hacemos $u=f(x)$ y $dv=g(x)dx$; calculamos $du=f'(x)$ y $v=\int g(x)\cdot dx$, y después sustituimos cada una de ellas en la fórmula de integración por partes. $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

Para recordar la fórmula de la integración por partes, existe una regla nemotécnica: "***un dia ví una vaca vestida de uniforme*** "

- A la hora de elegir u y dv, hemos de tener en cuenta dos cosas:
  - ✓ La parte escogida como dv ha de ser fácil de integrar.
  - ✓ $\int v\cdot du$ no debe ser más complicada de integrar que $\int u\cdot dv$

A = Funciones Arco (Arcsen, Arccos, Arctg…)
L= Funciones logarítmicas. ($\log_a$, log, ln)
P = Funciones polinómicas.
E = Funciones exponenciales (a^x, e^x)
S = Funciones trigonométricas (Sen, Cos, tg…)

Para facilitar las cosas a la hora de elegir u, utilizaremos la regla ALPES.

El orden de preferencia al elegir quien es la función u es de izquierda a derecha:

A > L > P > E > S

Ejemplo 6: Calcular $\int x^n\cdot \ln x dx$

Hacemos $u=\ln x$ $\quad dv = x^n$

$du=\frac{1}{x}$ $\quad v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Aplicamos la regla de integración por partes:

$$\int x^n\cdot \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)+K$$

A veces será necesario repetir este método varias veces. ¿Cuándo?, Si tenemos:

- Producto de un polinomio por una exponencial. ($x^n e^x$)
- Producto de un polinomio por seno o coseno. ($x^n\cos x$, $x^n senx$)
- Producto de un polinomio por ln. ($x^n\cdot \ln x$)
- Producto de una exponencial por sen ó cos ($e^x senx$, $e^x\cos x$)
- Las funciones circulares inversas.

4.5.- Integración de funciones Racionales.

Para el cálculo de integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde P(x) y Q(x) son polinomios enteros en x con coeficientes reales, lo que haremos es descomponer el polinomio Q(x) en suma de fracciones simples de la forma (ax + b).

- Si grado P(x) ≥ grado Q(x), antes de descomponer, efectuamos la división euclidea:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- Si grado P(x) < grado Q(x), no es necesario hacer división euclídea y directamente pasamos a factorizar el polinomio Q(x).

Factorizamos el polinomio Q(x), y una vez descompuesto Q(x) en sus raíces, se pueden presentar varios casos:

4.5.1.- Caso I: Factores lineales distintos.

A cada factor lineal ax+b que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional propia le corresponde una sola fracción de la forma: $\frac{A}{ax+b}$, donde A es una constante que habrá que determinar.

Ejemplo 7: Calcular $\int \frac{dx}{x^2-4}$

Factorizamos el denominador $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Descomponemos:

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$ ➔ Calculamos las constantes A y B:

$$1 = A(x-2) + B(x+2) \qquad (1)$$
$$1 = (A+B)x + (2A-2B) \qquad (2)$$

a) Por comparación: A + B = 0 y 2A-2B=1

De donde:

$$A = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{-1}{4}$$

b) O directamente sustituyendo x=2 y x=-2 en la ecuación (1).

$$\begin{matrix} 1 = 4A \\ 1 = -4B \end{matrix} \quad ➔ \quad A = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{-1}{4}$$

Por cualquiera de los dos métodos, tenemos:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + K = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + K$$

4.5.2.- Caso II: Factores lineales Repetidos.

A cada factor ax+b que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde A_i son constantes que habrá que determinar.

Ejemplo 8: Calcular $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$

Como el grado de arriba es mayor que el de abajo, primero dividimos:

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}=x-\frac{x+1}{x^3-x^2}=x-\frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Descomponemos:

$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$ ➔ Calculamos las constantes A,B y C:

$$x+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

Sustituyendo x=0 obtenemos:

1=-B ➔ B=-1

Sustituyendo x=1, obtenemos:

2=C

Y sustituyendo x=2, (elegimos el 2 al azar), obtenemos:

3=2A+B+4C ➔ A=-2.

De modo que nos queda:

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\int x\cdot dx+2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+K=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+K$$

4.5.3.- Caso III: Factores cuadráticos distintos:

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional le corresponde una sola fracción simple de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Donde A y B son constantes a determinar.

Ejemplo 9: Calcular $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+3x^2+2}dx$

Factorizamos $x^4+3x^2+2=(x^2+1)\cdot(x^2+2)$

Descomponemos:

$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$ ➔ Calculamos las constantes A,B,C y D:

$$x^3+3x^2+2=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)$$

De donde A+C=1; B+D=1, 2A+C=1 y 2B+D=2, que resolviendo nos da: A=0, B=1, C=1 y D=0.

Entonces:

$$\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+3x^2+2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{x^2+2}=arctgx+\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+K$$

4.5.4.- Factores cuadráticos repetidos.

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\dots\dots\dots\dots+\frac{A_3x+B_3}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}$$

Donde A_i y B_i son constantes a determinar:

<u>Ejemplo 10:</u> Calcular $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$

Descomponemos:

$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+1)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}$ ➔ Calculamos las constantes A,B,C,D,E y F:

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)(x^2+2)^2+(Cx+D)(x^2+2)+Ex+F=$$
$$Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x-(4B+2D+F)$$

De donde A=1; B=-1, C=0 y D=0, E=4 y F=0.

Entonces:

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx=\int \frac{x-1}{x^2+2}dx+4\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{(x^2+2)^2}+K$$

5.- Teorema fundamental del Cálculo:

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces su función integral $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ con a ≤ x ≤ b es continua en [a,b] y derivable en (a,b), y su derivada F'(x)=f(x).

$$\left.\begin{array}{l}\text{f contínua en [a,b]}\\ \text{F(X)}=\int_a^x f(t)dt\end{array}\right\} F'(x)=f(x)$$

5.1.- Derivada de integrales:

- $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

<u>Ejemplo 11:</u> Hallar la derivada de: $\int_a^x \sqrt{t^2+1}dt$ ➔ $\frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{t^2+1}dt=\sqrt{x^2+1}$

5.2.- Derivada de integrales cuando el límite superior es una función:

- $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt=f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$

<u>Ejemplo 12:</u> Hallar la derivada de: $\int_0^{t^2} \cos x^2dx$ ➔ $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \cos x^2dx=2t\cos t^4$

5.3.- Derivada de integrales cuando los dos límites son funciones:

- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x) - h\left[g(x)\right]\cdot h'(x)$

Ejemplo 13: Hallar la derivada de: $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln t dt$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \ln t dt = \ln x^3 \cdot 3x^2 - \ln x^2 \cdot 2x = 9x^2 \ln x - 4x \ln x = (9x^2 - 4x)\ln x$$

Podemos encontrarnos con ejercicios como este en el que al aplicar la regla de L'Hôpital, la integral desaparece.

Ejemplo 14: Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}dt}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}dt}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{senx\cdot 2x}{3x^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

* Donde hemos utilizado la aproximación senx $\approx$ x cuando x$\to$ 0

6.- Integral Definida

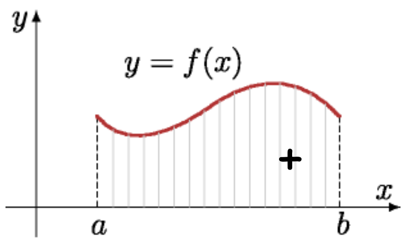
La integral definida de una función en el intervalo [a,b] se simboliza por $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ donde b es el límite superior de integración y a el límite inferior de integración.

6.1.- Significado Geométrico de la integral:

Con la integral definida se pretende calcular el área de una región del plano limitada por una curva.

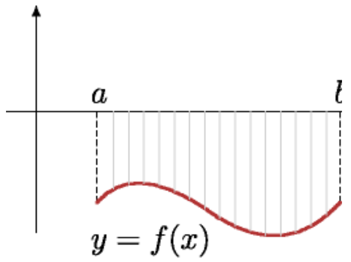
Sea el plano afín real euclídeo y $(O,\vec{u_1},\vec{u_2})$ un sistema de referencia ortonormal de ejes OX y OY.

- Si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, es positiva e integrable, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b, y la integral es positiva.



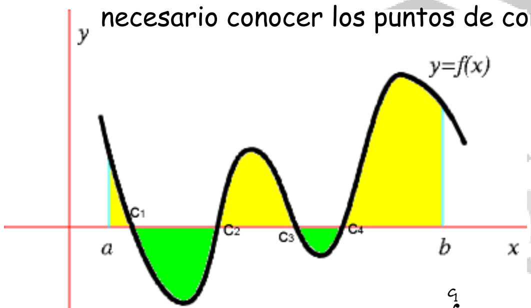
$$\int_a^b f(x)dx = \text{Área bajo la curva } > 0$$

- Si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, es negativa e integrable, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b, pero con signo negativo.



$$-\int_a^b f(x)dx = \text{Área bajo la curva}$$

- Si la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, toma valores positivos y negativos sobre el intervalo cerrado [a,b], entonces, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa la suma de las áreas de las regiones comprendidas entre la función, el eje de las x, y las perpendiculares por a y b, pero asignándole a cada una de ellas el signo + o - según que esté por encima o por debajo del eje x. Para ello es necesario conocer los puntos de corte de la curva con el eje OX.



$$Area = +\int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx - \int_{c_3}^{c_4} f(x)dx + \int_{c_4}^{b} f(x)dx$$

Ejemplo 15: Calcular el área encerrada por el eje OX, las rectas $x=0$ y $x=\pi$ y la curva $y=\cos x$.

Vamos a ver si la función $y=\cos x$, cambia de signo en el intervalo $[0,\pi]$, para ello la igualamos a cero y calculamos sus raíces:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}+k\pi$, dentro del intervalo a estudiar solo está $\frac{\pi}{2}$. Sabemos que el coseno es positivo en el primer cuadrante $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, y negativo en el segundo $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$, por tanto:

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \left[senx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[senx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1-(-1) = 2$$

6.2.- Propiedades de la Integral Definida:

- Si los límites de integración son iguales, la integral es nula: $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si c es un punto interior al intervalo [a,b], se verifica: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Esta propiedad es generalizable al tomar más puntos interiores en el intervalo [a,b].

- Al intercambiar los límites de integración, la integral definida cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- La integral definida de la suma es la suma de las integrales definidas:

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

- Si k es un número real, se verifica: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \left[a,b\right]$, entonces se verifica: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

6.3.- Regla de Barrow:

Sea f(x) una función y g(x) una primitiva suya, [g'(x)=f(x)], se cumple que:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = g(a) - g(b) = \left[g(x)\right]_b^a}$$

Observaciones:

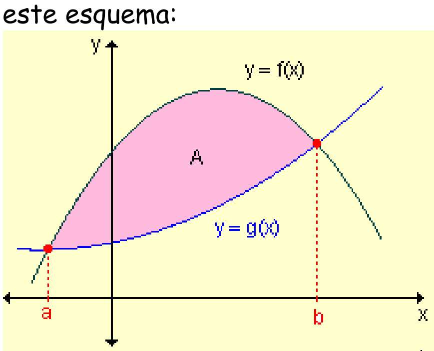
- La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación las integrales con las derivadas. Sin embargo hay que advertir que solamente es aplicable a funciones continuas definidas en intervalos cerrados.
- Para hallar la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado seguiremos el siguiente proceso:
  → Se halla una primitiva cualquiera de la función, sin tener en cuenta la constante (la más sencilla).
  → Se sustituyen en esta primitiva los límites de integración (el superior y el inferior) y se restan los resultados.

Ejemplo 16: Calcular el valor del área que está debajo de la función f(x)=senx.

$$Area = \int_0^{\pi} Senxdx = \left[-Cosx\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

6.4.- Área limitada por dos gráficas:

Para hallar el área limitada por las gráficas de dos funciones f(x) y g(x) seguiremos este esquema:



a) Definimos una nueva función h(x) = f(x) – g(x)

b) Igualamos a cero para hallar los puntos de corte entre ambas: h(x)=0 ↔ f(x)=g(x)

c) Una vez que obtengamos los puntos de corte, a y b, integramos la función h(x) entre esos límites de integración.

$$Area = \int_b^a h(x)dx$$

Ejemplo 17 : Calcular el área comprendida entre $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4-4x^3-8x^2+4x-1$

Escribimos la función h(x) como la diferencia entre f(x) y g(x). $h(x)=x^3+x^2-2x$

Calculamos sus raices igualando a cero: $h(x)=x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \end{cases}$

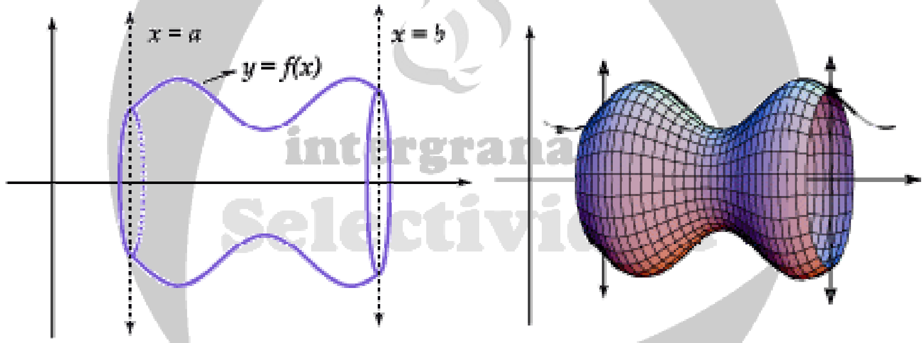
$$Area=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx=\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{1}\right|=\left|\left[0-\frac{-8}{3}\right]\right|+\left|\left[\frac{-5}{12}-0\right]\right|=$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

6.5.- Volumen de un sólido de revolución:

Sea f una función continua definida en el intervalo [a,b].

Recibe el nombre de *sólido de revolución*, al sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y=f(x)$, el eje x, y las gráficas de $x=a$ y $x=b$. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo de radio $|f(x)|$.



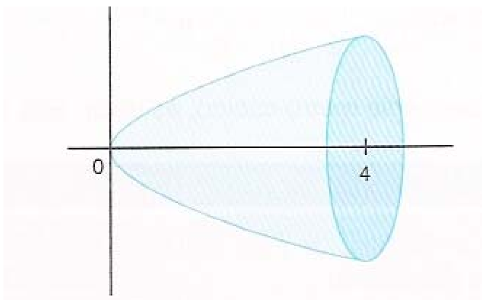
El área de la sección circular será: $A(x)=\pi\cdot\left[f(x)\right]^2$, y un elemento de volumen de revolución será un pequeño cilindro de radio $|f(x)|$ y altura dx.

Por tanto, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por la expresión:

$$\boxed{Vol=\int_{b}^{a}\pi\cdot f(x)^2\,dx}$$

Este procedimiento recibe el nombre de ***integración por discos***.

Ejemplo 18: Calcular el volumen engendrado al girar la parábola $y=\sqrt{x}$ alrededor del eje X, entre 0 y 4.

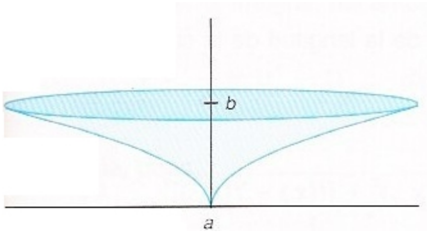


$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4 x\cdot dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$

Si al trozo de curva $y=f(x)$ se le hace girar alrededor del eje Y, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por esta otra expresión: $\boxed{Vol=\int_b^a \pi\cdot\phi(y)^2\,dy}$

Se hace exactamente igual que al girar en torno al eje X, con la salvedad de que hay que escribir x en función de y, e integrar en y.

Ejemplo 19: Calcular el volumen engendrado por la curva $y=\sqrt{x}$ al girar alrededor del eje Y, entre y=0 e y=2.



$$Volumen=\pi\int_0^2 \left(y^2\right)^2 dy=\pi\int_0^2 y^4 dy=\left[\pi\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{32}{5}\pi$$

7.- Ejercicios:

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int\frac{dx}{(x-1)^2}$ b) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$ c) $\int\frac{\ln x^2}{x}dx$ d) $\int sen^2x\cdot\cos 3x\,dx$ e) $\int tgx\,dx$

f) $\int\frac{1}{x^2+9}dx$ g) $\int sen^3x\,dx$ h) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ i) $\int\frac{x}{x^4+9}dx$ j) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

2.- Hallar la función F(x) tal que F(0)=2 y que sea primitiva de la función $f(x)=\frac{e}{e^x+1}$

3.- Determinar f(x) sabiendo que f'''(x)=24x; f''(0)=2, f'(0)=1 y f(0)=0.

4.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int\frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx$ b) $\int\frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}dx$ c) $\int\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3+x^2-2x}dx$

5.- Calcular las siguientes integrales: a) $\int x\cdot arctgx\,dx$ b) $\int e^{-x}\cos x\,dx$

c) $\int x^2\cos x\,dx$ d) $\int xe^{4x}dx$ e) $\int x^3e^{-x^2}dx$ f) $\int sen(\ln x)dx$

6.- Calcular: a) $\int_1^3 |x|dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos 2x\,dx$ c) $\int_0^{\pi}(1+x^2)\cos x\,dx$

d) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e) $\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-x^2}dx$ f) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}$

7.- Siendo $I=\int_0^x t^2e^{-t}dt$, demostrar que $\lim_{x\to+\infty} I(x)=2$

8.- Calcular el área encerrada por la curva $f(x)=x^2-4x$ y la recta $g(x)=2x-5$

9.- Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=1+\frac{x}{3}$ y $g(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

10.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones:

$$f(x)=6x-x^2 \text{ y } g(x)=x^2-2x.$$

11.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$, el eje de abscisas y las rectas: $x=2\sqrt{3}$ y $x=2$

12.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x)=x^2+x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (0,0).

13.- Se considera la función $f(x)=xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a, sabiendo que el área limitada por la curva $f(x)=xe^{ax}$ y las rectas x=0 y x=1 es igual a $\frac{1}{a^2}$.

14.- Calcula la primitiva de la función $f(x)=[\ln x]^2$ que se anule en $x=e$

15.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int(2x^2-4x+5)dx$

b) $\int\left[\frac{x^4-3x\sqrt{x}+2}{x}\right]dx$

c) $\int\frac{3x}{x^2+5}dx$

d) $\int\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

e) $\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

f) $\int\frac{dx}{4+7x^2}dx$

g) $\int\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

h) $\int\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

i) $\int\frac{(1+x)^2}{x}dx$

j) $\int\frac{4x+8}{x^2+4x}dx$

k) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

l) $\int 3x\cdot 3^{x^2}dx$

m) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$

n) $\int sen^3 2x\cdot\cos 2x\cdot dx$

ñ) $\int\left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$

o) $\int(2x^2+3)^2\cdot 5x\cdot dx$

p) $\int 4x^2\sqrt{1-x^3}dx$

q) $\int\frac{1-\cos 2x}{2x-sen2x}dx$

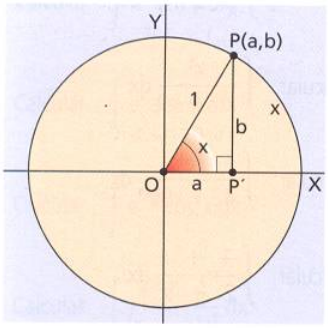
r) $\int\frac{e^{\ln x}}{x}dx$

s) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

t) $\int\frac{1-\ln x}{x\cdot\ln x}dx$

8.- Apéndice:

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS



$\operatorname{sen} x = b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{b} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\cos x = a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sec x = \frac{1}{a} = \frac{1}{\cos x}$

$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\operatorname{ctg} x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

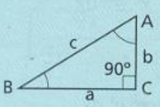
$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ (T. de Pitágoras)

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
Suma	$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
Diferencia	$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$	$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
Doble	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$	$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
Mitad	$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
Producto	$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{2}$	$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$	$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

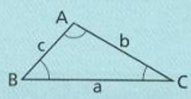


1. $C = 90°$ $\quad A + B = 90°$
2. $\operatorname{sen} A = \cos B = \frac{a}{c}$, $\operatorname{sen} B = \cos A = \frac{b}{c}$

   $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$
3. $c^2 = a^2 + b^2$

   (T. de Pitágoras)

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS



1. $A + B + C = 180°$
2. $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$

   (T. del seno)
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

   (T. del coseno)

Equivalencia de radianes y grados

Rad		Grad
2π	$\Leftrightarrow$	360°
π	$\Leftrightarrow$	180°
$\pi/2$	$\Leftrightarrow$	90°
$\pi/4$	$\Leftrightarrow$	45°
$2\pi/3$	$\Leftrightarrow$	120°
$\pi/3$	$\Leftrightarrow$	60°
$\pi/6$	$\Leftrightarrow$	30°
$3\pi/2$	$\Leftrightarrow$	270°

8.- Soluciones

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1} + C$

b) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx = 2\int \frac{\ln x}{x} dx = 2\int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{\ln^2 x}{4} + C$

$$\int sen^2 x \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{\cos 3x}{3} - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \cos 3x \right) dx =$$

d) $= \int \frac{\cos 3x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(-x) + \cos(5x)}{2} \right) dx = \int \frac{\cos 3x}{2} dx - \int \frac{\cos(-x)}{4} dx + \int \frac{\cos 5x}{4} dx =$

$$= \frac{sen(3x)}{6} + \frac{sen(5x)}{20} + \frac{sen(-x)}{4} = \frac{sen(3x)}{6} + \frac{sen(5x)}{20} - \frac{sen(x)}{4} + C$$

e) $\int tgx dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx = -\int \frac{-senx}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

f) $\int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{3} arctg \left(\frac{x}{3} \right) + C$

g) $\int sen^3 x dx = \int senx(1-\cos^2 x) dx = \int senx dx - \int senx \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} arcsen(x^2) + C$

i) $\int \frac{x}{x^4+9} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} arctg \left(\frac{x^2}{3} \right) + C$

j) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(e^{2x}+1\right) + C$

2.- Hallar la función F(x) tal que F(0)=2 y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e}{e^x+1}$

Calculamos la integral de $\int \frac{e}{e^x+1} dx = e\int \frac{1}{e^x+1} dx =$

Hacemos un cambio de variable $\left[e^x = t \quad \begin{array}{l} e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right]$, por tanto la integral queda:

$$\int \frac{1}{t^2+t} dt = \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{B}{t+1} dt = \begin{bmatrix} 1 = A(t+1) + Bt \\ si\ t = 0 \to 1 = A \\ si\ t = -1 \to 1 = -B \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|$$

Deshacemos el cambio:

$\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|$, y multiplicamos por e, de forma que:

$$\int \frac{e}{e^x+1} dx = e\int \frac{1}{e^x+1} dx = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|^e + C$$

Como F(0)=2;

$$e\ln\frac{1}{2} + C = 2 \Rightarrow C = 2 - e\ln\frac{1}{2}$$

De forma que:

$$\boxed{\int \frac{e}{e^x+1}dx = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|^e +2-e\ln\frac{1}{2}}$$

3.- Determinar f(x) sabiendo que f'''(x)=24x; f''(0)=2, f'(0)=1 y f(0)=0.

$f''(x)=\int 24x dx = 12x^2 + C$ Como f''(0)=2, entonces C=2 ➔ $f''(x)=12x^2+2$

$f'(x)=\int (12x^2+2)dx = 4x^3+2x+C'$, Como f'(0)=1, entonces C'=1 ➔ $f'(x)=4x^3+2x+1$

Y por último:

$f(x)=\int (4x^3+2x+1)dx = x^4+x^2+x+C''$, Como f(0)=0, ➔ C''=0 y $\boxed{f(x)=x^4+x^2+x}$

4.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario dividir.

$\frac{x^2-x+1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2+1} \to x^2-x+1 = A(x^2+1)+B(x)$

Si x=0 ➔ 1=A

Si x=1 ➔ 1=2A+B ➔ B=-1

Por tanto:

$\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x| - arctg(x)+C$

b) $\int \frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario hacer la división euclídea.

Sacamos las raíces de $x^3+3x^2-x-3=0$; Hacemos Ruffini:

	1	3	−1	−3
1		1	4	3
	1	4	3	0
−3		−3	−3	
	1	1	0	

Por tanto: $x^3+3x^2-x-3=(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-1)$

Descomponemos:

$$\frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+10x+5 = A(x+1)\cdot(x+3)+B(x-1)\cdot(x+3)+C(x-1)\cdot(x+1)$$

Si x=1 ➔ 16=8A ➔ A=2

Si x=-1 ➔ -4=-4B ➔ B=1

Si x=-3 ➔ -16=8C ➔ C=-2

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-2}{x+3}dx = 2\ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x+3| + C$$

c) $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

En este caso, tenemos que el grado del numerador (arriba) es mayor que el grado del denominador (abajo), por tanto es necesario hacer la división euclídea.

$$\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} = (x-2) - \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Vamos a calcular primero:

$$\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Descomponemos el denominador en raíces:

$$x^3-x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{7x+2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 7x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Sustituyendo los valores de las raíces obtenemos:

Si x=0 ➔ 2 = -2A ➔ A=-1
Si x=2 ➔ 16 = 6B ➔ B=8/3
Si x=-1 ➔ -5 = 3C ➔ C=-5/3

Entonces:

$$\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{x+1}dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\ln|x| + \frac{8}{3}\ln|x-2| - \frac{5}{3}\ln|x+1|$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{5}{3}\ln|x+1| + C$$

5.- Calcular las siguientes integrales:

a) $$\int x\cdot arctgx dx=\begin{bmatrix} u=arctgx & du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=x & v=\frac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\frac{x^2 Arctg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2 Arctg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^2 Arctg(x)}{2}-\frac{1}{2}x+Arctg(x)+C$$

b) $$\int e^{-x}\cos x dx=\begin{bmatrix} u=e^{-x} & du=-e^{-x}dx \\ dv=\cos x & v=senx\end{bmatrix}=e^{-x}senx+\int e^{-x}senxdx=e^{-x}senx+$$

$$+\begin{bmatrix} u=e^{-x} & du=-e^{-x}dx \\ dv=senx & v=-\cos x\end{bmatrix}-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos xdx$$

Tenemos una integral que en la que volvemos a la original (cíclica). Por tanto:

$$I=e^{-x}senx-e^{-x}\cos x-I\Rightarrow I=\frac{e^{-x}senx-e^{-x}\cos x}{2}+C$$

$$\int x^2\cos xdx=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos x & v=senx\end{bmatrix}=x^2senx-2\int xsenxdx=x^2senx-$$

c) $$-\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=senx & v=-\cos x\end{bmatrix}+x\cos x+\int\cos xdx=$$

$$=x^2senx+2x\cos x-2senx=2x\cos x+(x^2-2)senx+C$$

d) $$\int xe^{4x}dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{4x} & v=\frac{1}{4}e^{4x}\end{bmatrix}=\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx=\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{e^{4x}}{16}+C$$

e)

$$\int x^3e^{-x^2}dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=xe^{-x^2} & v=\frac{-1}{2}e^{-x^2}\end{bmatrix}=-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}+\int xe^{-x^2}dx=-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2}=-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C$$

f) $$\int sen(\ln x)dx=\begin{bmatrix} u=sen(\ln x) & du=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \\ dv=dx & v=x\end{bmatrix}=xsen(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=xsen(\ln x)-$$

$$-\begin{bmatrix} u=\cos(\ln x) & du=-sen(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \\ dv=dx & v=x\end{bmatrix}=-x\cos(\ln x)-\int sen(\ln x)dx$$

Volvemos a tener una integral cíclica:

$$I=xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)-I\Rightarrow I=\frac{xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)}{2}+C$$

6.- Calcular:

a) $$\int_1^3|x|dx=\int_1^3 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\frac{1}{2}(9-1)=4$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\left(2\cos^2 x - 1\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx = 2\left[-sen^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$$

c) $\int_0^{\pi}(1+x^2)\cos x dx = \int_0^{\pi}\cos x dx + \int_0^{\pi} x^2\cos x dx = -2\pi$

d)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = x\left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}} & v = -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = -x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \int 2x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\left(x^2+2\right) + C$$

e)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arcsenx - \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$Arcsenx - \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} = Arcsenx + x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}dx$$

Esta es cíclica, por tanto:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{Arcsenx}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} =$; Calcularemos primero la primitiva:

$$\int\frac{dx}{e^x+1} = \begin{bmatrix} e^x = t & e^x dx = dt \\ & dx = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int\frac{dt}{(t+1)\cdot t} = \int\frac{A}{t+1}dt + \int\frac{B}{t}dt \Rightarrow 1 = At + B(t+1)$$

Si t=0 ➔ 1=B

Si t=-1 ➔ 1=-A

$$\int\frac{dt}{(t+1)\cdot t} = -\int\frac{1}{t+1}dt + \int\frac{1}{t}dt = -\ln|t+1| + \ln|t|$$

Si deshacemos el cambio:

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+1} = \left[-\ln\left(e^x+1\right) + \ln\left(e^x\right)\right]_0^1 = 1 - \ln(e+1) - \ln(2)$$

7.- Siendo $I = \int_0^x t^2 e^{-t}dt$ ***, demostrar que*** $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 2$

Vamos a calcular la Integral:

$$\int t^2 e^{-t}dt = \begin{bmatrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{bmatrix} = -e^{-t}t^2 + 2\int te^{-t}dt = -e^{-t}t^2 + \begin{bmatrix} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-t}t^2 - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}dt = -e^{-t}t^2 - 2te^{-t} - 2e^{-t} = -e^{-t}(t^2+2t+2)$$

Por tanto:

$$I=\int_0^x t^2e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\right]_0^x=\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+\frac{2}{1}\right]$$

Por tanto: $\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+\frac{2}{1}\right]=2$ como queríamos demostrar.

8.- *Calcular el área encerrada por la curva $f(x)=x^2-4x$ y la recta $g(x)=2x-5$*

Definimos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x+5$
Igualamos a cero, para calcular sus puntos de corte.
$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x+5=0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)=0$
Por tanto sus raíces son 1 y 5.

Integramos h entre 1 y 5
$\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx=\frac{-32}{3}$

Como un área no puede ser negativa, $A=\left|\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx\right|=\left|\frac{-32}{3}\right|=\frac{32}{3}$

9.- *Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=1+\frac{x}{3}$ y $g(x)=\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$*

Al igual que en el ejercicio anterior, definimos la función h(x):
$h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}$
Igualamos a cero para encontrar sus puntos de corte:
$h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=3;x=0$
Por tanto ya tenemos los límites de integración.

$\int_0^3\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}\right)dx=-\frac{1}{6}$

Como las áreas no son nunca negativas: Área = $\left|\int_0^3\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}\right)dx\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$

10.- *Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=x^2-2x$.*

Como siempre, definimos la función h(x) como la diferencia entre f y g:
$$h(x)=f(x)-g(x)=8x-2x^2$$
Igualamos a cero para obtener los extremos de los intervalos de integración:
$$h(x)=8x-2x^2=0\Leftrightarrow x=0;x=4$$
Por tanto: $Area=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx=\frac{64}{3}$

11.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x=2\sqrt{3}$ y $x=2$

La función f(x) es siempre positiva, por tanto la integral es positiva:

Tenemos que calcular: $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2} = \left[\frac{1}{2}Arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}Arctg\sqrt{3}-\frac{1}{2}Arctg(1)\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{24}$

12.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x)=x^2+x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (0,0).

Lo primero es calcular la recta tangente en el punto (0,0)

La ecuación de la recta tangente es: y = mx + b, donde m es la pendiente f'(a) y b es la ordenada en el origen b = f(a).

En este caso: f'(x)=2x + 1; f'(0)=1; f(0)=0; por tanto la recta tangente en el (0,0) es y = x

La recta perpendicular a esta es: y = -x.

Así que tenemos que calcular el área entre la gráfica f(x)= x^2 + x y g(x) = - x

Definimos la función h(x):

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+x-(-x)=x^2+2x$$

Igualamos a cero para encontrar las soluciones:

$$h(x)=x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0, x=-2$$

Integramos la función h entre esos dos valores:

$$\int_{-2}^{0}\left(x^2+2x\right)dx=-\frac{4}{3}$$

Como el área no puede ser negativa:

$$Area=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^2+2x\right)dx\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

13.- Se considera la función $f(x)=xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a, sabiendo que el área limitada por la curva $f(x)=xe^{ax}$ y las rectas x=0 y x=1 es igual a $\frac{1}{a^2}$.

Tenemos que $\int_0^1 xe^{ax}dx=\frac{1}{a^2}$; Vamos a resolver la integral:

$$\int_0^1 xe^{ax}dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{ax} & v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{bmatrix}=\frac{x}{a}e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}dx=\left[\frac{x}{a}e^{ax}-\frac{e^{ax}}{a^2}\right]_0^1=\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}+\frac{1}{a^2}$$

Y según el enunciado:

$$\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow a^2-a=0\Leftrightarrow a=0;a=1$$

Por tanto a=1, porque no puede ser igual a cero.

14.- Calcula la primitiva de la función $f(x)=\left[\ln x\right]^2$ que se anule en $x=e$

Calculamos la integral indefinida de f(x)

$$\int\left[\ln x\right]^2dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}\\ dv=\ln x & v=x\left(\ln x-1\right)\end{bmatrix}=x\ln x\left(\ln x-1\right)-\int\left(\ln x-1\right)dx=x\ln x\left(\ln x-1\right)-$$

$$-x\left(\ln x-1\right)+x=x\left[\ln x\right]^2-2x\ln x+2x+K$$

Como tiene que ocurrir que $f(e)=0$, entonces: $e-2e+2e+k=0\Leftrightarrow k=-e$

Por tanto la primitiva pedida es es: $x\left[\ln x\right]^2-2x\ln x+2x-e$

15.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int\left(2x^2-4x+5\right)dx$

$\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x+C$

b) $\int\left[\frac{x^4-3x\sqrt{x}+2}{x}\right]dx$

$\frac{x^4}{4}-2x\sqrt{x}+2\ln|x|+C$

c) $\int\frac{3x}{x^2+5}dx$

$\frac{3}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C$

d) $\int\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

$\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+C$

e) $\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

f) $\int\frac{dx}{4+7x^2}dx$

$\frac{\sqrt{7}}{14}Arctg\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)+C$

g) $\int\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$3\cdot Arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

h) $\int\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x}+C$

i) $\int\frac{\left(1+x\right)^2}{x}dx$

$\frac{x^4}{4}+x^2+\ln|x|+C$

j) $\int\frac{4x+8}{x^2+4x}dx$

$2\ln\left|x^2+4x\right|+C$

k) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3}+C$

l) $\int 3x\cdot 3^{x^2}dx$

$\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}+C$

m) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$

$\frac{1}{4}Arcsenx^4+C$

n) $\int sen^3 2x\cdot\cos 2x\cdot dx$

$\frac{sen^4 2x}{8}+C$

ñ) $\int\left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$

$\frac{8}{7}x\sqrt[4]{x^3}-5\ln|x|+C$

o) $\int\left(2x^2+3\right)^2\cdot 5x\cdot dx$

p) $\int 4x^2\sqrt{1-x^3}dx$

q) $\int\frac{1-\cos 2x}{2x-sen2x}dx$

r) $\int\frac{e^{\ln x}}{x}dx$

s) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

t) $\int\frac{1-\ln x}{x\cdot\ln x}dx$