# Tema 6: Matrices

## 6.1. Matrices. Definición y primeros ejemplos

Se llama matriz real de ***dimensión mxn***, al conjunto de m·n números reales ordenados en m filas (horizontales) y n columnas (verticales). La forma más general de representar una matriz ***mxn*** es:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde puede verse que cada número real ocupa una posición determinada por los dos subíndices (ij). El primer subíndice (i) indica el número de la fila, y el segundo (j) el de la columna. Así, el término $a_{12}$ es el elemento que está en la 1ª fila y en la 2ª columna.

Las matrices se suelen representar por letras mayúsculas A, B..... ó por $A_{mxn}$ si queremos indicar su dimensión.

***Ejemplos:***

$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ Es una matriz de 2 filas y 3 columnas.

$C_{1x4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Es una matriz de 1 fila y 4 columnas.

- Dos matrices son ***iguales*** cuando coinciden término a término.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=B$$

## 6.2.- Tipos de matrices:

Entre las matrices existen algunas que reciben nombres especiales y a las cuales nos referiremos con frecuencia, las más importantes son:

✓ Se llama ***matriz fila***, a una matriz con una sola fila.
Así pues, una matriz fila de orden m es una matriz con 1 fila y m columnas:

$$A_{1xm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1m} \end{pmatrix}$$

***Ejemplo:*** $A_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

✓ Se llama ***matriz columna***, a una matriz de una sola columna.

Así pues, una matriz columna de orden n es una matriz con n filas y 1 columna: $A_{nx1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

***Ejemplo:*** $A_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

- ✓ Se llama ***matriz opuesta*** de A, y se simboliza por ***–A***, a la matriz en la que todos los elementos tienen el signo opuesto.

***Ejemplo:*** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

- ✓ Se llama ***matriz nula***, a la matriz que tiene todos los elementos igual a cero.

***Ejemplo:*** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ✓ Se llama ***matriz cuadrada***, a una matriz que tiene igual número de filas que de columnas.

***Ejemplo:*** $A_{3x3} = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Se llama ***diagonal principal*** de una matriz cuadrada, a la formada por los elementos $a_{ij}$ con i=j. En el ejemplo anterior la diagonal está formada por los elementos $a_{11}=1$, $a_{22}=1$, $a_{33}=0$.

- A la otra diagonal, se le llama ***diagonal secundaria***.

- ✓ Se llama ***matriz diagonal***, a la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos excepto los de la diagonal principal.

***Ejemplo:*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- ✓ Se llama ***matriz escalar***, a aquella matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

***Ejemplo:*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- ✓ Se llama ***matriz identidad*** de orden n, y se denota por $I_n$, a la matriz escalar del mismo orden cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual a la unidad.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplos:**

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ Matriz identidad de orden 2

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ Matriz identidad de orden 3

- ✓ Se llama ***matriz triangular***, a la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos situados por encima de la diagonal principal (triangular superior) o por debajo de ella (triangular inferior).

**Ejemplos:** $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}$ Triangular superior, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ Triangular inferior.

- ✓ Se llama ***matriz transpuesta de A***, y se representa $A^t$, a la matriz que resulta de intercambiar sus filas por columnas:

**Ejemplo:** Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\\7&9\end{pmatrix}$ entonces $A^t=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&9\end{pmatrix}$. Vemos que la dimensión de A es 2x3 mientras que la de $A^t$ es 3x2.

- ✓ Se llama ***matriz simétrica***, a la matriz que coincide con su transpuesta, es decir que $a_{ij}=a_{ji}$.

**Ejemplo:** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&-1&0\end{pmatrix}$ y $A^t=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&-1&0\end{pmatrix}$, vemos que $A=A^t$

- ✓ Se llama ***matriz antisimétrica***, a la matriz cuya transpuesta es igual a su opuesta. $A^t=-A$.

**Ejemplo:** $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $A^t=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $-A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ vemos que $A^t=-A$

## 6.3.- Operaciones con matrices:

### 6.3.1.- Suma:

Para que dos matrices A y B se puedan sumar es necesario que tengan el ***mismo número de filas que de columnas***, es decir la misma dimensión. La matriz resultante se obtiene sumando los elementos de A y de B que estén en la misma posición (ij).

**Ejemplo:** $A=\begin{pmatrix}2&0\\4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&9\\8&-4\end{pmatrix}$ entonces $A+B=\begin{pmatrix}2-1&0+9\\4+8&3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\12&-1\end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de Matrices:

- Asociativa: (A+B)+C=A+(B+C)
- Conmutativa: A+B = B+A
- Elemento Neutro: A+0=0+A=A
- Elemento opuesto: A+(-A)=0

### 6.3.2.- Producto por un escalar:

El producto de una matriz ***A*** por un escalar ***k*** (número real), es una matriz de igual dimensión ***kA***, que se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz ***A*** por ***k***.

***Ejemplo:*** Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y k=2 entonces $kA=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$

> Propiedades del producto de números por matrices:
>
> Sean A y B matrices, y sean a y b escalares
> - A·(b·A)=(a·b)·A
> - (a+b)·A=a·A+b·A
> - a·(A+B)=a·A+a·B
> - 1·A=A
> - Elemento Neutro: A+0=0+A=A
> - Elemento opuesto: A+(-A)=0

### 6.3.3.- Producto de dos matrices:

Dos matrices A y B ***solo son multiplicables si el número de columnas de A es igual al número de filas de B***. El producto es otra matriz C, que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, y cuyos elementos se obtienen del siguiente modo:

$$C_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+.........+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

> ***Ejemplo 6.1:*** Sean $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. Calcular A·B y B·A.
>
> Como ya sabemos, para multiplicar matrices tiene que ocurrir que el número de columnas de A ha de ser igual al numero de filas de B. Vemos que el número de columnas de A es 2, y que el número de filas de B es 2, por tanto ambas matrices se pueden multiplicar y la matriz resultante tiene 3 filas y 2 columnas.
> - Para multiplicar hacemos: Fila de A · Columna de B
>
> $$A_{3x2}\cdot B_{2x2}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 5\\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 5\\ 2\cdot 2+0\cdot 1 & 2\cdot(-1)+0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 5 & -8\\ 4 & -2\end{pmatrix}=C_{3x2}$$
>
> Veamos ahora el caso de B·A; como el número de columnas de B es 3 y el de filas de A es 2, entonces no podemos calcular B·A.
>
> $$B_{2x2}\cdot A_{3x2}=?$$

> Propiedades del producto de Matrices:
>
> - Asociativa: (A·B)·C=A·(B·C)
> - No Conmutativa: A·B ≠ B·A
> - Elemento Neutro: A·I=A (Siempre y cuando se puedan multiplicar)
> - Distrubituva con respecto a la suma:
>
>   A·(B+C)=A·B+A·C
>
>   (B+C)·D=B·D+C·D

En general, el producto de matrices no es conmutativo, pero existen algunos casos en los que sí lo es, en estos casos, se dice que las matrices son ***permutables***.

## 6.3.4.- Potencia de una matriz cuadrada:

Se define la potencia de una matriz cuadrada (si no es cuadrada no tiene sentido calcular la potencia), al producto matricial de n matrices iguales, esto es:

$$A^n = A\cdot A\cdot A\cdot A..............\cdot A$$

***Ejemplo 6.2:*** Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar $A^3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3 = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -9 \\ 27 & -10 \end{pmatrix}$$

Algunas veces nos piden calcular potencias de una matriz de exponente muy elevado. En estos casos, podemos encontrar una formula de inducción, como veremos en el siguiente ejemplo.

***Ejemplo 6.3:*** Calcular $A^{100}$ Siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo primero es calcular $A^2$: $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Después calculamos $A^3$: $A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Parece ser que las sucesivas potencias conservan la primera fila igual, la segunda cambia en primer término y lo mismo ocurre con la tercera.

Cabe suponer entonces que la potencia n-ésima será: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos si lo hace para n+1: $A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto queda demostrado ***por inducción*** que la igualdad supuesta $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es cierta.

Y otras veces la potencia es cíclica, es decir, conforme se va elevando el exponente encontramos que para un cierto exponente el resultado es la misma matriz o la matriz indentidad:

***Ejemplo 6.4:*** Calcular $A^{2000}$ y $A^{2001}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lo primero es calcular $A^2$: $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Después $A^3$: $A^3 = A^2\cdot A = I\cdot A = A$

Vemos que para potencias pares (2n) la matriz es I y para las impares (2n-1) la matriz es A

Por tanto: $A^{2000} = \left(A^2\right)^{1000} = (I)^{1000} = I$ y $A^{2001} = A^{2000}\cdot A = I\cdot A = A$

## 6.4.- Actividades:

1.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, calcular:

a) A+B y B+A
b) A·B y B·A
c) ¿Es A·B=B·A?

2.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Calcular:
a) A·(B+C)  b) $A\cdot B^t$  c) A·(3B-2C)  d) $A^2$

3.- Calcular A·B y B·A, siendo las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$

4.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ calcular $A^2 - 3\cdot A - I$

5.- Probar que $A^n = 2^{n-1}\cdot A$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

6.- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y sea ***n*** un número natural cualquiera. Encontrar el valor de $A^n$ para cada ***n*** y hallar $A^{350} - A^{250}$.

7.- Se consideran las matrices $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & 0\\ y & 0 & 0\end{pmatrix}$

a) Determinar ***x*** e ***y*** para que M·N=N·M.
b) Calcular $M^{2001}$ y $M^{2002}$

8.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, calcular $A^n$.

9.- Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

a) Siendo ***I*** la matriz identidad de orden 3, comprueba $A^3 - I = 0$
b) Calcular $A^{10}$.

10.- Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

11.- Encuentra dos matrices A y B, cuadradas 3x3 con coeficientes reales tales que satisfagan:

$$3A+2B=\begin{pmatrix}3 & 8 & -3\\ -2 & 2 & -3\\ 7 & 2 & 4\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

12.- Comprueba que $(A+B)^t = A^t + B^t$ y que $\left(A^t\right)^t = A$ a partir de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

13.- Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

efectúa los posibles productos entre ellas. (Hay 6 posibles multiplicaciones)

14.- Encuentra las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

15.- Sea $A=\begin{pmatrix}6 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$. Encontrar una matriz cuadrada triangular B tal que $A=B\cdot B^t$. ¿existe una sola?

## 6.5.- Soluciones

***1.- Dadas las siguientes matrices:*** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ***calcular:***

***a) A+B y B+A***
***b) A·B y B·A***
***c) ¿es A·B=B·A?***

a) A+B = $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ B+A = $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

b) A·B = $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}$ B·A= $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 13\end{pmatrix}$

c) No. El producto de matrices no es conmutativo.

***2.- Dadas las siguientes matrices:*** $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

***Hallar:***

***a) A·(B+C)***

$$A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&1&5\\6&1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&6&7\\3&5&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&6&9\\6&6&5\\6&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51&50&64\\45&28&48\\24&37&60\end{pmatrix}$$

***b) A·B^t***

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&6\\0&1&1\\2&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&24&31\\7&26&25\\-4&23&40\end{pmatrix}$$

***c) A·(3B-2C)=***

$$\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3&0&6\\9&3&15\\18&3&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&12&14\\6&10&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11&-12&-8\\3&-7&15\\18&3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&-65&67\\70&-21&69\\-48&-69&-40\end{pmatrix}$$

***d) A²***

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5&2\\1&3&4\\6&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&30&28\\30&14&18\\24&30&13\end{pmatrix}$$

***3.- Calcular A·B y B·A siendo A y B las matrices:*** $A=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&6&-3\\1&3&2&-1\\-2&-6&-4&2\\2&6&2&-2\end{pmatrix}$$

***4. -Dadas las matrices*** $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$***; calcular*** $A^2-3A-I$

$A^2-3A-I=$

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&9\\3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&9\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

***5.- Probar que*** $A^n=2^{n-1}\cdot A$***, siendo*** $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

Lo primero que hacemos es calcular $A^2$:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=2A$$

Ahora $A^3$ : $A^3 = A^2 \cdot A = 2 \cdot A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2 \cdot A = 4A = 2^2 A$

Para $A^4$: $A^4 = A^3 \cdot A = 2^2 \cdot A \cdot A = 2^2 A^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot A = 2^3 A$

Vemos que se cumple que $A^n=2^{n-1} \cdot A$

Supongamos que se cumple que $A^n=2^{n-1} \cdot A$, entonces por inducción:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 2^{n-1} \cdot A \cdot A = 2^{n-1} \cdot A^2 = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot A = 2^n \cdot A$$

Por tanto $A^n=2^{n-1} \cdot A$

***6.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera. Encontrar el valor de $A^n$ para cada n y hallar $A^{350}$ - $A^{250}$***

Lo primero es calcular $A^2$: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora calculamos $A^3$: $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos que se cumple que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$

Supongamos que esto es cierto, entonces por inducción: $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n+3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$

y

$$A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

***7.- Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$***

***a) Determinar x e y para que M·N=N·M***
***b) Calcular $M^{2001}$ y $M^{2002}$***

a)

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Para que N·M=M·N tiene que ocurrir que ***x=0, y=1***

b) Primero calculamos $M^2$ ; $M^2 = M\cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Ahora calculamos $M^3$: $M^3 = M^2\cdot M = I\cdot M = M$

Vemos que las potencias pares (2n) resultan la matriz identidad, y las impares (2n-1) resultan M.

Por tanto: $M^{2001} = M^{2000}\cdot M = \left(M^2\right)^{1000}\cdot M = \left(I\right)^{1000}\cdot M = I\cdot M = M$

y $M^{2002} = M^{2001}\cdot M = M\cdot M = M^2 = I$

***8.- Sea la matriz*** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***calcular*** $B^n$

$$B^2 = B\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot B$$

$$B^3 = B^2\cdot B = 3\cdot B\cdot B = 3\cdot B^2 = 3\cdot 3\cdot B = 3^2\cdot B \qquad B^4 = B^3\cdot B = 3^2\cdot B\cdot B = 3^2\cdot B^2 = 3^2\cdot 3\cdot B = 3^3\cdot B$$

Por tanto cabe suponer que $B^n=3^{n-1}\cdot B$

Supongamos que esto es cierto, entonces por inducción $B^{n+1}=3^n\cdot B$

$$B^{n+1} = B^n\cdot B = 3^{n-1}\cdot B\cdot B = 3^{n-1}\cdot B^2 = 3^{n-1}\cdot 3\cdot B = 3^n\cdot B$$

Por tanto $B^n=3^{n-1}\cdot B$

***9.- Considere la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

***a) Siendo I la matriz identidad de orden 3 comprueba que $A^3$+I=0***
***b) Calcula la matriz $A^{10}$***

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$ ***Por tanto $A^3$+I=0***

$$A^{10} = A^9\cdot A = \left(A^3\right)^3\cdot A = (-I)^3\cdot A = -I\cdot A = -A$$

***10.- Resolver la siguiente ecuación matricial:*** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Haciendo la multiplicación, obtenemos :

$\left.\begin{matrix} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{matrix}\right\}$ De donde resolviendo el sistema $x = \dfrac{-5}{4}, y = \dfrac{-7}{4}$

***11.- Encuentra dos matrices A y B, cuadradas 3x3, con coeficientes reales tales que satisfagan las dos igualdades siguientes:***

$$3A+2B=\begin{pmatrix}3&8&-3\\-2&2&-3\\7&2&4\end{pmatrix}\quad y\quad A-B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&4&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

Si multiplicamos A-B por 2 y sumar con 3A+2B, de esta forma obtendríamos

$$\left.\begin{array}{l}3A+2B=\begin{pmatrix}3&8&-3\\-2&2&-3\\7&2&4\end{pmatrix}\\+\\2A-2B=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&8&8\\-2&-2&4\end{pmatrix}\\\hline 5A=\begin{pmatrix}5&10&-5\\0&10&5\\5&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&1\\1&0&0\end{pmatrix}\text{ y de } A-B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&4&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}\text{ despejamos B:}$$

$$A-\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&4&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}=B\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&4&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-2&-3\\2&1&2\end{pmatrix}$$

***12.- Comprueba que $(A+B)^t = A^t + B^t$, y que $\left(A^t\right)^t = A$, a partir de las matrices***

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}3&3&2\\4&8&4\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)^t=\begin{pmatrix}3&4\\3&8\\2&4\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\text{ y } B^t=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^t+B^t=\begin{pmatrix}3&4\\3&8\\2&4\end{pmatrix}$$

$$\left(A^t\right)^t=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

***13.- Dadas las siguientes matrices,***

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&5&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}7&0\\-1&1\\0&1\\3&4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&7&1&5\\6&3&0&0\\-2&-5&1&0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&2\\2&3&-3\end{pmatrix}$$

***efectúa los posibles productos entre ellas. (Hay 6 posibles multiplicaciones)***

Las posibles multiplicaciones son: A·C, A·D, C·B, B·A, D·C, D·D

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}8&-2&4&5\\24&-4&-1&-10\end{pmatrix}\qquad A\cdot D=\begin{pmatrix}7&18&-4\\0&30&5\end{pmatrix}\qquad C\cdot B=\begin{pmatrix}22&28\\39&3\\-9&-4\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}7&14&21\\-3&3&-2\\-2&5&1\\-5&26&13\end{pmatrix}\qquad D\cdot C=\begin{pmatrix}-6&-1&2&5\\26&5&2&0\\28&38&-1&10\end{pmatrix}\qquad D\cdot D=\begin{pmatrix}3&-3&-4\\4&31&4\\-4&4&17\end{pmatrix}$$

***14.- Encuentra las potencia n-ésimas de las siguientes matrices:***

$$B=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^n=\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix};C^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix};D^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n^2+n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

***15.- Sea $A=\begin{pmatrix}6&-6\\-6&10\end{pmatrix}$. Encontrar una matriz cuadrada triangular B tal que A=B·B$^t$. ¿existe una sola?***

Sea $B=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$ ➔ $B^t=\begin{pmatrix}a&o\\b&c\end{pmatrix}$ entonces: $A=B\cdot B^t=\begin{pmatrix}a^2+b^2&b\cdot c\\c\cdot b&c^2\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}a^2+b^2=6\\b\cdot c=-6\\c^2=10\end{array}\right\}\text{ Si resolvemos este sistema (no lineal) obtenemos : }\left.\begin{array}{l}c=\pm\sqrt{10}\\b=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\\a=\pm\dfrac{2\sqrt{15}}{5}\end{array}\right\}$$

La matriz B es de la forma: $B=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{15}}{5}&\frac{3\sqrt{10}}{5}\\0&\sqrt{10}\end{pmatrix}$

La solución no es única, hay varias matrices, según sea el signo de a, b y c. Además si la matriz B es de la forma $B=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}$ obtenemos otros resultados.