Tema 7: Determinantes, Matriz Inversa y Rango

El determinante de la matriz cuadrada A de orden n se simboliza por $|A|$ o escribiendo los elementos de A entre dos rectas verticales.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

7.1.- Cálculo de Determinantes de Orden (2x2)

Un determinante de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

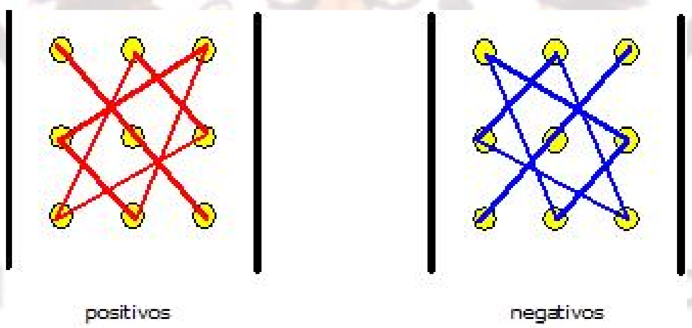
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

7.2.- Cálculo de Determinantes de Orden (3x3)

Para calcular el determinante de una matriz de orden 3, utilizamos la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right) - \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}\right)$$



Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-6 + 0 + 126) - (162 + 0 - 10) = 120 - 152 = -32$

7.3.- Propiedades de los determinantes:

Las más importantes, que conviene destacar son las siguientes:

1.- Un determinante que tiene todos los elementos de una línea (fila o columna) iguales a 0, es igual a cero.

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2.- Un determinante que tiene dos líneas paralelas iguales es nulo.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Porque la línea 1 y la 3 son iguales.

3.- Un determinante en el que los elementos de una línea son múltiples de los elementos de una paralela a ella es nulo.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ Porque la línea 3 es la línea 1 multiplicada por 2.

4.- Un determinante en el que los elementos de una línea son combinación lineal de los de otras líneas paralelas a ella es nulo.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0$ Porque la columna 3 es la suma de la 1 y la 2.

5.- El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su transpuesta.

$|A| = |A|^t$ Ejemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

6.- Si se intercambian entre si dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$

7.- Si se multiplican todos los elementos de una línea (fila o columna) por un mismo número a, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 18 = -6 = 3 \cdot (-2)$

selectividad-cgranada.com

8.- ***El determinante de una matriz triangular, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.***

Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$

9.- El valor de un determinante no varia, si a una línea le sumamos otra línea paralela multiplicada por un número λ, y los de otra paralela multiplicada por β, etc.......

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2$

10.- Sean A y B matrices de orden n, el determinante del producto, es el producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

11.- Sean A una matriz de orden n, y sea k un número natural, entonces: $|A^k| = |A|^k$

Definición: Una matriz se llama ***regular*** si su determinante es no nulo. $(|A| \neq 0)$. En caso contrario se llama ***singular***. (Matriz Regular = Cuadrada + determinante no nulo)

7.4.- Menor complementario y Adjunto de un elemento

Dada una matriz cuadrada de orden n, se llama ***menor complementario*** del elemento a_{ij} al determinante de orden n-1, que se obtiene al suprimir la fila i, y la columna j (o la fila y la columna que se cruzan en a_{ij}). Lo representaremos por α_{ij}

Ejemplo: Calcular los menores complementarios de los elementos a_{13} , a_{32} y a_{22} de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

Se llama ***adjunto de un elemento*** a_{ij} de una matriz, al valor del menor complementario precedido del signo más o menos según sea par o impar la suma de los subíndices i+j. Se representará por A_{ij} y se suele escribir como:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$$

Los sucesivos adjuntos de los elementos de una matriz tienen signos alternativamente (tanto por filas como columnas) positivos y negativos empezando por el primero que es siempre positivo, esto es:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

3.5.- Resolución de un determinante de cualquier orden

Método de los adjuntos:

Es un método para resolver determinantes de cualquier orden. Para ello buscamos la línea que más ceros tenga. (Y si no los tiene, procuramos hacerlos). Entonces el determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus respectivos adjuntos, esto es:

$$\boxed{|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}}$$

Utilizando el método de los adjuntos y aplicando algunas de las propiedades de los determinantes, podemos convertir el cálculo de determinantes complicados, en otros determinantes mucho más sencillos.

Ejemplo 7.1:

Calcular el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Este determinante es de orden 4, aplicando directamente el método de los adjuntos por la fila 1, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tendríamos que calcular 3 determinantes de orden 3, en los que es muy fácil cometer algún error.

Pero si intentamos buscar ceros combinando filas o columnas, podemos hacer que el determinante sea de muy fácil resolución.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1)' = (1) \\ (2)' = (2) - 3\cdot(1) \\ (3)' = (3) - (1) \\ (4)' = (4) - 6(1) \end{Bmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -12 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1)' = (1) \\ (2)' = (2) \\ (3)' = (3) + 2(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 18(-4+1) = 18\cdot(-3) = -54$$

Hemos convertido un determinante de orden 4 en uno de orden 2 que se resuelve de manera mucho más sencilla.

7.6.- Inversa de una matriz:

Dada una matriz cuadrada A. ***Se llama inversa de A y se representa por A^{-1}*** a la matriz que multiplicada por la matriz A da como resultado la matriz identidad, es decir:

$$\boxed{A x A^{-1} = A^{-1} x A = I}$$

La matriz A tendrá inversa si y solo sí es cuadrada y su determinante es distinto de cero, o lo que es lo mismo si A es una matriz regular. En la práctica, para hallar la matriz inversa de la matriz A, se siguen los siguientes pasos:

- Se halla el determinante de A.
  - Si $|A| = 0$, decimos que no existe la matriz inversa, A^{-1}.
  - Sí $|A| \neq 0$ continuamos.
- Calculamos la matriz transpuesta de A. A^t.
- Calculamos la matriz adjunta de A^t y se divide por $|A|$.

La inversa de una matriz A, viene dada por la expresión: $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A^t) = \dfrac{(A^t)^+}{|A|}}$

Ejemplo 7.2: ***Calcular la inversa de la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo primero es calcular su determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, como es distinto de cero, calculamos la matriz traspuesta. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, y ahora la adjunta la transpuesta: $adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Y por último, dividimos por su determinante: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7.7.- Ecuaciones Matriciales:

La matriz inversa facilita la resolución de las ecuaciones matriciales del tipo: ***AX+B=C***, cuando A es una matriz es Regular.

$$AX + B = C$$

De donde

$$AX = C - B$$

Y multiplicando por la izquierda por A^{-1} en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$A^{-1}AX = A^{-1}(C - B)$$

Operando: $\left(A^{-1} \cdot A\right)X = A^{-1}(C - B)$

De donde: $IX = X = A^{-1}(C - B)$

Ejemplo 7.3: ***Resolver la ecuación matricial*** $XA = B + C$ ***, siendo:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejando X en la ecuación dada, tenemos: $XA = B + C$

Multiplicando en ambos lados de la igualdad por la derecha por A^{-1}: $\left(XA\right)A^{-1} = \left(B + C\right)A^{-1}$

De donde: $X(A \cdot A^{-1}) = (B + C)A^{-1}$

Y operando: $X = (B + C) \cdot A^{-1}$

Veamos ahora si A admite inversa: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Por tanto existe la inversa de A.

La inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la solución de la ecuación es:

$$X = (B + C)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

7.8.- Rango de una matriz

Llamamos menor de orden p de una matriz al determinante que resulta de eliminar ciertas filas y columnas hasta quedar una matriz cuadrada de orden p. Es decir, al determinante de cualquier submatriz cuadrada de A (submatriz obtenida suprimiendo alguna fila o columna de la matriz A).

En una matriz cualquiera $A_{m\times n}$ puede haber varios menores de un cierto orden p dado.

- **Definición 1°**

RANGO de una matriz es el orden del mayor de los menores distintos de cero. Por tanto, el rango no puede ser mayor al número de filas o de columnas.

- **Definición 2°**

RANGO de una matriz es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes.

Una línea es linealmente dependiente de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

P. Ej., si $f_1 = 2\cdot f_3 - 3\cdot f_4$, entonces decimos que f_1 es linealmente dependiente de f_3 y f_4.

Una línea es linealmente independiente de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

El rango o característica de una matriz A se simboliza del siguiente modo : rang(A) o r(A)

- **OPERACIONES ELEMENTALES QUE PUEDEN REALIZARSE CON UNA MATRIZ PARA CALCULAR SU RANGO SIN QUE ÉSTE VARÍE**

1. **Intercambiar dos líneas entre sí.**
2. **Suprimir una línea que tenga todos sus elementos nulos.**
3. **Suprimir una línea que sea proporcional a otra.**
4. **Suprimir una línea que sea combinación lineal de otra/s**
5. **Multiplicar o dividir una línea por un número distinto de cero.**
6. **Sustituir una línea i de este modo : $L_i = a\cdot L_i + b\cdot L_j$**
7. **Sustituir una línea i de este modo : $L_i = L_i + a\cdot L_j$**

Las propiedades anteriores NO pueden ser aplicadas en el cálculo de determinantes, pues alterarían el valor de los mismos, excepto en el caso 7. Sin embargo, todas ellas pueden utilizarse para averiguar el rango de una matriz sin que se modifique el valor de éste.

Como mínimo, el rango de una matriz siempre será 1, salvo para la matriz nula, cuyo rango es cero.
Para poder calcular el rango de una matriz ésta no tiene por que ser necesariamente cuadrada.
Una matriz cuadrada de orden "n", como máximo su rango es n.
Una matriz cuadrada de orden "n" es inversible (regular) si el rango es n. Es decir, cuando las filas (columnas) son linealmente independientes.

Diremos que dos matrices A y B son equivalentes (A~B) si tienen el mismo rango.

7.8.1.- Cálculo del rango de una matriz

1º Método :Basado en el cálculo de menores.

- Comenzando por el orden *k=2* , se realiza el proceso siguiente (para una etapa *k* cualquiera)
- Se busca un menor $\alpha \neq 0$ de orden *k*, entonces el rango será ≥ *k*
- Se añade a dicho menor una fila *i* , y cada una de las columnas que en él no figuran, obteniéndose así menores de orden *k+1*. Si todos estos menores son nulos, significa que la fila *i* es combinación lineal de las *k* filas del menor anterior, por lo que podemos eliminar esa fila.
- Seguimos probando con las restantes filas, si todos los menores así formados son nulos, entonces la matriz tiene sólo *k* filas linealmente independientes, que son las que aparecen en el menor, y por tanto su rango es *k*.
- Si alguno de los menores *k+1* es distinto de cero, el rango es ≥ *k+1* y repetimos el proceso para otro orden *k* superior.

Ejemplo 7.4: ***Calcular el rango de la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Elegimos un menor de orden 2, por ejemplo $\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$ ➔ Rang(A)≥2

Elegimos otro menor de orden 3, $\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0+2+0)-(0+18+2) = -18 \neq 0$ ➔ Rang (A)≥3

Elegimos uno de orden 4:

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -12 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ➔ Rango (A)=3

selectividad-cgranada.com

Si al elegir un menor de orden 2 nos da 0, elegimos otro, y así sucesivamente hasta elegir todos, si todos son 0, el rango es 1. De la misma forma, cuando elegimos menores de orden 3.

2º Método : Conocido como "Método de Gauss"

Se utiliza con frecuencia en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Vamos a describir el método por filas (de igual forma sería por columnas). Básicamente consiste en hacer nulos los elementos que hay debajo de los a_{ii} con i= 1, 2, 3, ..., m-1 ; y el rango final será el ***número de filas distintas de cero.***

- El método consta de m-1 etapas, siendo m el número de filas.

- En una etapa i cualquiera se deja fija la fila i, y tomando como referencia el elemento a_{ii}, por medio de operaciones elementales (nombradas anteriormente) se hacen cero todos los elementos de su columna que estén por debajo de él.
- Si el elemento a_{ii} es igual a cero, es preciso intercambiar previamente esa fila por alguna otra *fila de debajo*, y si no es posible (porque también sea cero) con alguna *columna de la derecha*, hasta conseguir que a_{ii} sea distinto de cero (es conveniente, para evitar cálculos tediosos que sea 1).

Ejemplo 7.5 : ***Calcular el rango de la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(3)}{=} r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1) f_2 = f_2 - 3f_1 ; f_3 = f_3 - 2f_1$ $(2) f_2 \leftrightarrow f_4$ $(3) f_3 = f_3 - 7f_2$ ➔ Por tanto Rang(A)=3

Ejemplo 7.6 : ***Calcular el rango de la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} Rang\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} Rang\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$(1) f_5 = f_5 - f_4 ; f'_4 = f_4 - f_3 ; f'_3 = f_3 - f_2$ $(2) f'_2 = f_2 - f_1$

El cálculo del rango será fundamental para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el *Teorema de Rouché-Fröbenius* que veremos en el tema siguiente.

selectividad cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43

Ejemplo 7.7:

¿Para qué valores de k la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ***no admite inversa?.***

La matriz A no tiene inversa si $|A| = 0$, por tanto calculamos su determinante y lo igualamos a cero: $|A| = 3k + 2$,

$3k + 2 = 0$ ➔ $k = -\frac{2}{3}$

7.9.- Ejercicios

1.- Demuestra que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, verifica que $A^2 - (a+d)A + |A|I = 0$, donde $|A|$ es el determinante de A, $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2.- Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$ es nulo.

3.- Calcular: $\begin{vmatrix}2&1&3&-2\\1&0&2&3\\4&2&6&-4\\1&0&-3&2\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-1&x&1&1&1\\-1&-1&x&1&1\\-1&-1&-1&x&1\\-1&-1&-1&-1&x\end{vmatrix}$

4.- Obtener en función de a,b,c el valor del determinante $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1+a&1&1&1\\1&1+b&1&1\\1&1&1+c&1\end{vmatrix}$

5.- Contestar razonadamente si es posible resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix}1&0&1\\x&1&0\\0&x&x\end{vmatrix}+5=\begin{vmatrix}7&0\\0&1\end{vmatrix}$ b) $\left|\begin{pmatrix}1&2\\0&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\x&1&0\\0&x&x\end{pmatrix}\right|+5=0$

6.- Si $\begin{vmatrix}m&n\\p&q\end{vmatrix}=-5$, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}m+3n&p+3q\\n&q\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}p&m\\q&n\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}3n&-m\\3q&-p\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}p&2m\\q&2n\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1&\frac{n}{m}\\mp&mq\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}m&5m\\p&5p\end{vmatrix}$

7.- a) Definir el concepto de matriz inversa. Dar un criterio para expresar que una matriz es inversible.

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&m\end{pmatrix}$, determinar para que valores de m existe A^{-1}.

c) Para m=-1, resolver $|A^{-1}-xI|$, siendo I la matriz I_3.

8.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&-3\\6&-5\end{pmatrix}$, encontrar una matriz simétrica P no singular tal que $B=P^{-1}AP$.

9.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.Demostrar que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$

10.- En el supuesto que exista, calcular la matriz X tal que AX=B, en los siguientes casos:

selectividad-cgranada.com
Residencia Universitaria ... Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

a) $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}$

11.- Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X-Y=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-5\end{pmatrix} \qquad X+2Y=\begin{pmatrix}1&-4\\3&0\end{pmatrix}$$

a) Hallar X e Y.
b) Calcular si tiene sentido la inversa de ambas.

12.- Dada la identidad matricial $X\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$

a) ¿Cuáles son las dimensiones de de una matriz solución de la identidad anterior?
b) Calcular su solución:
c) ¿Es única la solución?. Razonar la respuesta.

13.- Obtén razonadamente una matriz A que verifique la siguiente igualdad.

$$3\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}0&12&15\\12&11&10\end{pmatrix}$$

14.- Se dice que una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su transpuesta, esto es, si $A^{-1}=A^t$. Comprobar que la matriz A es ortogonal.

$$A=\begin{pmatrix}senx&-\cos x\\\cos x&senx\end{pmatrix}$$

15.- Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa. $A=\begin{pmatrix}|x|&1\\|x-2|&2\end{pmatrix}$

16.- Hallar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}3&4&4&0\\1&3&2&-2\\2&1&2&2\end{pmatrix}$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
info@selectividad-cgranada.com

17.- Estudiar el rango de A para los diferentes valores de t. $A=\begin{pmatrix}t&t&0\\t&1&t\\t&1&3-t\end{pmatrix}$

18.- Determina el rango de la siguiente matriz según los valores de t. $\begin{pmatrix}t&2&2\\2&t&0\\1&t&t\end{pmatrix}$

19.- Determina la relación que deben cumplir los parámetros de a,b,c para que las matrices tengan ambas rango 2.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&0&b\\1&1&c\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&a\\0&-1&b\\3&1&c\end{pmatrix}$$

20.- Considera la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}a&0&2a\\0&a&0\\-a&0&-a\end{pmatrix}$, donde a es no nulo.

a) Calcular A^2
b) Calcular A^{-1}
c) Calcula razonadamente A^{20}
d) Calcula razonadamente $|A^{19}|$

21.- Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&-1\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

b) Hallar una matriz X que verifique: $ABX=\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix}$

22.- Hallar una matriz X que cumpla la condición $XB+B=B^{-1}$, siendo $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

23.- a) Calcula todas las matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa.
b) Si A es una de estas matrices, calcula A^2.

24.- Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M.

a) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ y que $|A|=4$ Calcula los siguientes determinantes:

$$\left|-3A^t\right| \text{ y } \begin{vmatrix}2b&2a\\-3d&-3c\end{vmatrix}$$

b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3=I$. Calcula $|B|$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

25.- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Hallar A^{10}
b) Hallar la matriz inversa de B.
c) En el caso particular k=0, Hallar B^{10}

26.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = 2a^2b^4c^2 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

27.- Comprobar por la regla de Sarrus y por el método de los adjuntos los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 & -5 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -245 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 66$$

28.- Calcular el rango de las siguientes Matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 11 \\ 5 & 6 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Sol: a)3, b)3, c)3, d)3

29.- ¿Qué condición deben cumplir los términos de a,b,c para que el rango de $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & x & c & 0 \\ r & t & z & d \end{pmatrix}$ sea 3?

Sol: Que alguno de ellos sea nulo.

30.- Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, Descomponer A en una suma de una matriz simétrica S y otra antisimétrica H.

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43

7.10.- Soluciones

1.- Demuestra que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ***verifica que*** $A^2 - (a+d)A + |A|I = 0$, ***donde*** $|A|$ ***es el determinante de A,*** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***y*** $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 - (a+d)A + |A|I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-cb)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-cb & 0 \\ 0 & ad-cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.- Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ ***es nulo.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.- Calcular:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ Porque la primera fila por 2 es igual a la tercera.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^4$$

Hemos sumado a todas las filas la primera.

4.- Obtener en función de a,b,c el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -(a\cdot b\cdot c)$$

Donde hemos usado el método del adjunto, usando la columna 4ª porque es la me mas ceros tiene.

5.- Contestar razonadamente si es posible resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \right|$

Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

a) Si es posible: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ➔ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & -x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ➔ $x^2 + x + 5 = 7$

➔ $x^2 + x - 2 = 0$ De donde X=1, Y=-2

b) $\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\x & 1 & 0\\0 & x & x\end{pmatrix}\right|=$ No se puede calcular, porque antes de calcular el determinante tenemos que sumar las matrices, y para poder sumar dos matrices, ambas tienen que ser de la misma dimensión.

6.- Si $\begin{vmatrix}m & n\\p & q\end{vmatrix}=-5$, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}m+3n & p+3q\\n & q\end{vmatrix}=(9)=\begin{vmatrix}m+3n-3n & p+3q-3q\\n & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m & p\\n & q\end{vmatrix}=(5)=\begin{vmatrix}m & n\\p & q\end{vmatrix}=-5$

b) $\begin{vmatrix}p & m\\q & n\end{vmatrix}=(5)=\begin{vmatrix}p & q\\m & n\end{vmatrix}=(6)=-\begin{vmatrix}m & n\\p & q\end{vmatrix}=-(-5)=5$

c) $\begin{vmatrix}3n & -m\\3q & -p\end{vmatrix}=(6)=3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}n & m\\q & p\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}n & m\\q & p\end{vmatrix}=(6)=-3\cdot(-1)\begin{vmatrix}m & n\\p & q\end{vmatrix}=3\cdot(-5)=-15$

d) $\begin{vmatrix}p & 2m\\q & 2n\end{vmatrix}=(6)=2\cdot\begin{vmatrix}p & m\\q & n\end{vmatrix}=(5)=2\begin{vmatrix}p & q\\m & n\end{vmatrix}=(6)=-2\begin{vmatrix}m & n\\p & q\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-5)=10$

e) $\begin{vmatrix}1 & \frac{n}{m}\\mp & mq\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}1 & n/m\\p & q\end{vmatrix}=\frac{m}{m}\begin{vmatrix}m & n\\p & q\end{vmatrix}=-5$

f) $\begin{vmatrix}m & 5m\\p & 5p\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}m & m\\p & p\end{vmatrix}=0$ Porque se repiten dos filas.

7.- a) Definir el concepto de matriz inversa. Dar un criterio para expresar que una matriz es inversible.

La matriz inversa es la matriz por la que hay que multiplicar otra para obtener la matriz identidad. Sea la matriz A, entonces la inversa de A es la matriz A^{-1}, de forma que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

Para que una matriz sea inversible ha de tener su determinante no nulo.

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & m\end{pmatrix}$, determinar para que valores de m existe A^{-1}.

Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

Para que exista su inversa, su determinante ha de ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & m\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & -1\\-1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

Por tanto el determinante es distinto de cero para todo valor de m.

Entonces A es invertible $\forall m\in\Re$.

c) Para m=-1, resolver $\left|A^{-1}-xI\right|$, siendo I la matriz I_3.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}^t=-1\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-1-x&1&1\\-1&-x&1\\-1&1&-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x&1&1\\-1-x&-x&1\\0&1&-x\end{vmatrix}=(-x)\begin{vmatrix}-x&1\\1&-x\end{vmatrix}+$$

$$+(1+x)\begin{vmatrix}1&1\\1&-x\end{vmatrix}=(-x)(x^2-1)+(x+1)(-x-1)=(x+1)[(-x)\cdot(x-1)-(x+1)]=-x^3-x^2-x-1$$

8.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&-3\\6&-5\end{pmatrix}$, encontrar una matriz simétrica P no singular tal que $B=P^{-1}AP$.

Como P tiene que ser simétrica y no singular (regular) cogemos $P=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$.

Si en la ecuación $\boldsymbol{B=P^{-1}AP}$ multiplico a ambos lados de la igualdad por P. (obsérvese que he de multiplicar por P por el mismo sitio (izquierda) en ambas partes)

$$PB=PP^{-1}AP \rightarrow PB=IAP \rightarrow PB=AP$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-3\\6&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4a+6b&-3a-5b\\4b+6c&-3b-5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a-6b&4b-6c\\3a-5b&3b-5c\end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales, si todos sus elementos son iguales, por tanto:

$$\left.\begin{array}{r}4a+6b=4a-6b\\-3a-5b=4b-6c\\4b+6c=3a-5b\\-3b-5c=3b-5c\end{array}\right\}\text{ Resolviendo el sistema tenemos: }\left.\begin{array}{r}b=0\\a=2c\\2c=a\\b=0\end{array}\right\}$$

$P=\begin{pmatrix}2c&0\\0&c\end{pmatrix}$. Como nos dicen que P es no singular, C no puede valer 0. Si tomamos c=1, entonces P queda de la forma:

$$P=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Vamos a comprobarlo.

Tiene que ocurrir que: $B=P^{-1}AP$

Lo primero es calcular P^{-1}.

$|P|=2$, por tanto existe P^{-1}. $P^{-1}=\frac{1}{|P|}(adjP)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{pmatrix}=B$$

9.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$***.Demostrar que la inversa de A^n es*** $\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Lo primero es calcular A^2.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad ;A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ A^4=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, parece que $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Vamos a demostrarlo (No olvidar)

Supongamos que $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, entonces ***<u>por inducción</u>*** tiene que ocurrir que $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Como:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto se cumple que $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Para ver si A es invertible, tiene que ocurrir que su determinante sea no nulo. $|A^n|=1$, por tanto es distinto de cero.

Pues entonces $(A^n)^{-1}=\dfrac{1}{|A^n|}(adjA^n)^t=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ c.q.d.

10.- En el supuesto que exista, calcular la matriz X ***tal que*** AX=B***, en los siguientes casos:***

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ A simple vista, como A=B, tiene que ocurrir que $X=I_3$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43

$$A\cdot I=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}=B$$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$

$A\cdot X=B$ entonces, si multiplicamos por A^{-1} a ambos lados de la igualdad y por la izquierda, tenemos:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \;\Rightarrow\; I\cdot X = A^{-1}\cdot B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}\cdot B$$

Como A no es invertible, entonces no existe la matriz X buscada.

11.- Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Hallar X e Y.
d) Calcular si tiene sentido la inversa de ambas.

a) Si multiplico la 1ª ecuación por 2 y las sumo:

$$4X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; 5x = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{de donde:} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si despejamos la matriz Y de la 1ª ecuación: $Y = 2X - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) La inversa de X no existe puesto que su determinante es nulo.

La inversa de Y es: $Y^{-1} = \dfrac{1}{|Y|} adjY^{t} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12.- Dada la identidad matricial $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuáles son las dimensiones de de una matriz solución de la identidad anterior?

La matriz X tiene que tener una dimensión de 3X2.

b) Calcular su solución:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces: $X\cdot A=B$, para calcular X, multiplico en ambos lados de la igualdad (y por la derecha) por A^{-1}.

$$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \;\Rightarrow\; X=B\cdot A^{-1}$$

Pues vamos a calcular la matriz inversa de A. Lo primero es ver si su determinante es no nulo.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$ ➔ Por tanto la matriz A es invertible. (si A no es invertible, no existe la matriz X)

$$A^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Adj(A^{t}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^{t}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Y por tanto :

selectividad-cgranada.com

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\9&-5\\13&-7\end{pmatrix}$$

Vamos a comprobarlo: $\begin{pmatrix}5&-3\\9&-5\\13&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$, Por tanto X es correcta.

c) ¿Es única la solución?. Razonar la respuesta.

Si. Es única porque la matriz inversa es única.

13.- Obtén razonadamente una matriz A que verifique la siguiente igualdad.

$$3\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}0&12&15\\12&11&10\end{pmatrix}$$

Sean $X=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ y $Z=\begin{pmatrix}0&12&15\\12&11&10\end{pmatrix}$, la ecuación matricial queda de la forma:

$$3\cdot X+Y\cdot A=Z$$

Como lo que quiero es calcular A:

$$Y\cdot A=Z-3\cdot X \;\rightarrow\; Y^{-1}\cdot Y\cdot A=Y^{-1}(Z-3\cdot X) \;\rightarrow\; A=Y^{-1}(Z-3\cdot X)$$

Calculamos la inversa de Y:

$$Y^{-1}=\frac{1}{|Y|}Adj(Y^t)=\frac{1}{5}Adj\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5&-2/5\\1/5&1/5\end{pmatrix}$$

$$A=Y^{-1}(Z-3\cdot X)=\begin{pmatrix}3/5&-2/5\\1/5&1/5\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0&12&15\\12&11&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6&3&3\\3&0&-3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3/5&-2/5\\1/5&1/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&9&12\\9&11&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}$$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}$$

14.- Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}|x|&1\\|x-2|&2\end{pmatrix}$$

La función $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y la función $|x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < -2 \\ x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Por tanto, de la definición de valor absoluto: $|a| = +\sqrt{a^2}$ donde a es un número Real.

Tenemos que para que la matriz A no sea inversible, su determinante tiene que ser nulo. Por tanto:

$2|x| - |x-2| = 0$ ➔ $2|x| = |x-2|$ ➔ $2\sqrt{x^2} = \sqrt{(x-2)^2}$ ➔ $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(x-2)^2}$ de donde:

$4x^2 = x^2 - 4x + 4$ ➔ $3x^2 + 4x - 4 = 0$ y resolviendo obtenemos $\begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vamos a Comprobar:

Para x=-2, tenemos: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y para x=2/3, tenemos: $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & 2 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto es correcto.

15.- Se dice que una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su transpuesta, esto es, si $A^{-1} = A^t$. Comprobar que la matriz A es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa, y para ello, calculamos primero su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{vmatrix} = sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = \begin{pmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{pmatrix}$$

Por tanto $A^{-1} = A^t$ ➔ A es ortogonal.

selectividad-cgranada.com
Residence ESSAADA, entree 7, 1er etage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 11 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

16.- Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Como el rango es el orden del mayor menor no nulo, tenemos que calcular los determinantes de todos los menores y ver cual de ellos es distinto de cero, y tiene mayor orden.

Vamos a calcular los determinantes de orden 2 que se pueden extraer de esta matriz. Cuando uno de ellos sea distinto de cero, entonces diremos que su rango es como mínimo 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto, la matriz A tiene de rango, como mínimo, el 2. r(A)=2

Ahora calculamos todos los determinantes de orden 3 que se puedan extraer de ella, e igual que en el caso anterior, cuando uno de ellos sea distinto de cero, diremos que el rango de A es como mínimo 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{porque la 1ª fila - la 2ª fila = 3ª fila}$$

Si observamos la matriz A, la 1ª fila – la 2ª fila = 3ª fila , entonces cualquier determinante de orden 3 que obtengamos de dicha matriz va a ser nulo.

Por tanto el Rang(A)=2

17.- Estudiar el rango de A para los diferentes valores de t. $A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix}$

Vamos a calcular el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & 1-t & 3-t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 1-t & t \\ 1-t & 3-t \end{vmatrix} = t(1-t)(3-2t)$$

Si igualamos a cero, tenemos que t=1, que t=0 y que t=3/2.

Por tanto si t≠1, t≠0 y t≠3/2 el rango de A es 3.

Si t=1 ➔ $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ➔ Rang(A)=2

Si t=3/2 ➔ $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 3/2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix} = 7/2$ ➔ Rang(A)=2

Si t=0 ➔ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ ➔ Rang (A) = 2

selectividad-cgranada.com
Residence ESSAADA entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

18.- Determina el rango de la siguiente matriz según los valores de t. $A = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

Si calculamos el determinante de esta matriz, tenemos que

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = (t^3 + 4t) - (2t + 4t) = t^3 - 2t$$

Por tanto si igualamos a cero, tenemos que si t≠0, t≠ $\sqrt{2}$ t≠- $\sqrt{2}$ entonces rango de la matriz es 3.

Si t=0 ➔ $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ ➔ $|A|=0$ ➔ $\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}=-4$ ➔ Rang(A)=2

Si t=$\pm\sqrt{2}$ ➔ $A=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{2}&2&2\\2&\pm\sqrt{2}&0\\1&\pm\sqrt{2}&\pm\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ➔ $|A|=0$ ➔ $\begin{vmatrix}\pm\sqrt{2}&2\\2&\pm\sqrt{2}\end{vmatrix}=-2$ ➔ Rang(A)=2

19.- Determina la relación que deben cumplir los parámetros de a,b,c para que las matrices tengan ambas rango 2.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&0&b\\1&1&c\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&a\\0&-1&b\\3&1&c\end{pmatrix}$$

Resolvemos ambos determinantes y los igualamos a cero.

Para que A sea de rango 2, tiene que ocurrir que: a-c=0. ➔ a=c

Para que B sea de rango 2, tiene que ocurrir que: 3a-2b-2c=0

Para que ambas sean de rango 2, se ha de cumplir el siguiente sistema:

$\begin{cases}a=c\\3a-2b-2c=0\end{cases}$ ➔ $c-2b=0$ ➔ c=2b ➔ a=2b, c=2b, b=b

20.- Considera la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}a&0&2a\\0&a&0\\-a&0&-a\end{pmatrix}$***, donde a es no nulo.***

a) Calcular A^2
b) Calcular A^{-1}
c) Calcula razonadamente A^{20}
d) Calcula razonadamente $|A^{19}|$

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}a&0&2a\\0&a&0\\-a&0&-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0&2a\\0&a&0\\-a&0&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a^2&0&0\\0&a^2&0\\0&0&-a^2\end{pmatrix}=a^2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
info@selectividad-cgranada.com

b) Lo primero es calcular el determinante: $|A|=a^3$, la transpuesta $A^t=\begin{pmatrix}a&0&-a\\0&a&0\\2a&0&-a\end{pmatrix}$

la adjunta: $Adj(A)^t=\begin{pmatrix}-a^2&0&2a^2\\0&a^2&0\\a^2&0&a^2\end{pmatrix}$ Por tanto la inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/a&0&2/a\\0&1/a&0\\1/a&0&1/a\end{pmatrix}$

c) Calculamos A^3 y luego A^4 y vemos que $A^4=a^4\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=a^4\cdot I$

Como: $A^{20}=\left(A^4\right)^5=\left(a^4\cdot I\right)^5=a^{20}\cdot I^5=a^{20}\cdot I=a^{20}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{20}&0&0\\0&a^{20}&0\\0&0&a^{20}\end{pmatrix}$

d) De la propiedad de los determinantes $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, tenemos que:

$$\left|A^{19}\right|=\left|A^{20}\cdot A^{-1}\right|=\frac{\left|A^{20}\right|}{|A|}=\frac{a^{60}}{a^3}=a^{57}$$

21.- Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&-1\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&2\end{pmatrix}$, de aquí $(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&2\end{pmatrix}$ por tanto se verifica la igualdad.

e) Hallar una matriz X que verifique: $ABX=\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix}$

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix};(A\cdot B)\cdot X=\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix};(A\cdot B)^{-1}(A\cdot B)\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix}$$

De donde $X=(A\cdot B)^{-1}\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&6\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&4\end{pmatrix}$

22.- Hallar una matriz X que cumpla la condición $XB+B=B^{-1}$***, siendo*** $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Tenemos que $XB+B=B^{-1}$; entonces $(X+I)B=B^{-1}$; multiplicando en ambas partes (a la derecha) por B^{-1}, tenemos: $X+I=B^{-2}$, de donde despejando X:

Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 ... 037 20 47 43

$$X=\left(B^{-1}\right)^2-I$$

Para calcular la inversa de B, lo primero es hacer si determinante.

$$|B|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

Después hacemos su transpuesta, y luego su adjunta, y por fin escribimos su inversa:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B)^t=\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(B^{-1}\right)^2=B^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

Y ahora calculamos X:

$$X=\left(B^{-1}\right)^2-I=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$$

23.- a) Calcula todas las matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa.

Una matriz cualquiera diagonal de orden dos, es por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, pues, para que A coincida con su inversa, calculamos la inversa e igualamos ambas:

$$A^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{pmatrix}b&0\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

Igualamos ambas

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

Y resolvemos:

$$\begin{matrix}a=\frac{1}{a}\\b=\frac{1}{b}\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{matrix}a=\pm1\\b=\pm1\end{matrix}$$

Entonces las matrices A son:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

b) Si A es una de estas matrices, calcula A^2.

Para cada una de ellas, su cuadrado es la matriz identidad I.

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ Si } a=\pm1 \text{ y } b=\pm1$$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com

24.- Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M.

c) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ y que $|A|=4$ Calcula los siguientes determinantes:

$$\left|-3A^t\right|=(-3)^2|A|=9\cdot4=36\ \ y\ \ \begin{vmatrix}2b&2a\\-3d&-3c\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=24$$

d) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula $|B|$

$$|I| = 1 = |B^3| = |B|^3 \Rightarrow |B| = \sqrt[3]{1} = 1$$

e) Sea C una matriz Cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser $|C| = 3$? Razonar la respuesta.

Si $C^{-1} \cdot C = I \Rightarrow |C \cdot C^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |C \cdot C^{-1}| = |C| \cdot |C^{-1}| = 1 \Rightarrow$ pero si $C^{-1} = C^t \Rightarrow |C| \cdot |C^t| = 1$ y como $|C| = |C^t| \Rightarrow |C| \cdot |C| = 1$; si $|C| = 3 \Rightarrow$ 9=1, cosa que es imposible. Por tanto no puede ser $|C| = 3$

25.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar A^{10}

Lo primero es como siempre $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, después:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la matriz inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj(B^t) = Adj(B^t) = Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ t & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) En el caso particular k=0, Hallar B^{10}

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, entonces por inducción, ha de ocurrir que* $B^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1)t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Calculamos*

$$B^{n+1} = B^n \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1)t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Y de aquí:* $B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ b^2c & -b^2 & 3ab \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot b \cdot c \cdot b \cdot a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -b & 3b \end{vmatrix} = a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2a^2b^4c^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$(b-a) \cdot (c-a) \cdot (c+a-b-a) = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$$

selectividad-cgranada.com
Résidence ESSAADA, entrée 7, 1er étage, Av. Hassan II, Rabat
Tel: 037 20 12 21 & 037 20 47 43
info@selectividad-cgranada.com