Tema 8: Teorema de Rouché-Frobenius

Se llaman ***ecuaciones lineales*** a las ecuaciones en las que las incógnitas aparecen todas con grado 1; no están elevadas a ninguna potencia, ni bajo ningún radical, ni multiplicadas unas por otras.... como por ejemplo: $2x-4y=2$; $x-5y=7$; $6x-3y+2z=0$

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Donde m es el nº de ecuaciones lineales y n el nº de incógnitas, los a_{ij} son los coeficientes del sistema (números reales), los x_j son las incógnitas y los b_i son los términos independientes (también números reales).

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de los x_j para los que se cumplen todas las ecuaciones o concluir que el sistema no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones puede tener solución ***(compatible)*** o no tenerla ***(incompatible)***.
Los sistemas compatibles pueden tener una solución ***(determinados)*** o infinitas soluciones ***(indeterminados)***.

En resumen podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales del siguiente modo:

$$\text{Sistemas de ecuaciones lineales} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado } (S.C.D.) - \text{Solución única} \\ \text{Indeterminado}: (S.C.I.) - \text{Muchas Soluciones} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible}: (S.I.) - \text{Sin solución} \end{cases}$$

Llamamos ***A*** a la ***matriz de coeficientes*** y ***B*** a la ***matriz ampliada*** con los términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

8.1 Teorema de Rouché-Frobenius

Permite conocer si un sistema de ecuaciones tiene solución a partir del estudio del rango de la matriz asociada al sistema (matriz de coeficientes A) y del rango de la matriz ampliada de éste (matriz B).

$$\text{Sistemas}\begin{cases}\text{Compatible: Rang}(A)=\text{Rang}(B)\begin{cases}\text{Determinado :Rang}(A)=\text{Rang}(B)=\text{n° de incógnitas}\\ \text{Indeterminado: Rang}(A)=\text{Rang}(B)<\text{n° de incógnitas}\end{cases}\\ \\ \text{Incompatible : Rang}(A)\neq\text{Rang}(B)\end{cases}$$

Este Teorema es muy útil para el estudio de sistemas con parámetros.

8.2.- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Estudiando un sistema de ecuaciones por el Teorema de Rouché-Frobenius, si resulta compatible, podemos hallar su solución mediante la regla de Cramer:

8.2.1.- Regla de Cramer:

Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si la matriz de coeficientes A, es regular. Por tanto, este tipo de sistemas son siempre S.C.D.

Para calcular las soluciones de un sistema utilizamos dos determinantes:

- Determinante de la matriz de coeficientes A. $|A|$
- Determinante $|\Delta_i|$ que se obtiene al sustituir, en la matriz del sistema, la columna de la incógnita i (x,y ó z) por la columna de los términos independientes.

El valor de cada incógnita se obtiene de la siguiente forma:

$$x=\frac{|\Delta_x|}{|A|}\qquad y=\frac{|\Delta_y|}{|A|}\qquad z=\frac{|\Delta_z|}{|A|}$$

Ejemplo 8.1: Resolver el sistema $\begin{cases}2x+3y-z=6\\ x-5y+2z=-4\\ 3x+2y-3z=-6\end{cases}$ ➔ $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&-5&2\\3&2&-3\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-5&2\\3&2&-3\end{vmatrix}=32\neq 0$ ➔ A es regular ➔ El sistema es de Cramer ➔ Sus soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&3&-1\\-4&-5&2\\-6&2&-3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{32}{32}=1\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&6&-1\\1&-4&2\\3&-6&-3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{96}{32}=3\ ;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&3&6\\1&-5&-4\\3&2&-6\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{160}{32}=5$$

S=(1,3,5)

Utilizando un pequeño truco, podemos utilizar este método de resolución a sistemas compatibles indeterminados.

Si un sistema es compatible indeterminado es porque Rang(A) = Rang(B) < nº de incógnitas, si llamamos ***grado de libertad (g)*** a la diferencia entre el nº de incógnitas y el rango de las matrices.

Llamaremos menor principal de la matriz A al menor que nos da el rango de las matrices, este menor nos da un nuevo sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como incógnitas llamado sistema principal. Este sistema es equivalente al principal y se puede resolver con la regla de Cramer, teniendo en cuenta que las soluciones quedarán en función de tantos parámetros como indique g.

Ejemplo 8.2: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$

Escribimos las matrices A y B.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(1+3)-(2+2)=0 = \text{Rang}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \Rightarrow \text{Rang}(A)=2$$

Para la matriz B ocurre exactamente igual ➔ Rang(B)=2=Rang(A) < nº de incógnitas.

Tenemos que el sistema es S.C.I. y como A no es regular, no podemos utilizar la regla de Cramer.
Como para obtener Rang(A) = 2 hemos utilizado las dos primeras ecuaciones, entonces la tercera la podemos eliminar y el sistema queda:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Si llamamos $z=\lambda$, tenemos: $\begin{cases} x+2y+\lambda=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ y si pasamos los términos con λ a la derecha de las igualdades, nos queda:

$\begin{cases} x+2y=-\lambda \\ x+y=0 \end{cases}$ Si aquí volvemos a escribir las matrices A y B: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como podemos observar, ahora A si es una matriz regular, porque es cuadrada y su determinante es distinto de cero. ➔ Podemos utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-\lambda}{-1}=\lambda \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda}{-1}=-\lambda \qquad z=\lambda$$

Por tanto las soluciones del sistema son $S=\{\lambda,-\lambda,\lambda\}$

8.3.- Sistemas con parámetros:

Se llama discutir un sistema de ecuaciones en función de uno o varios parámetros al hecho de *clasificarlo según los valores que puedan tomar dichos parámetros*.

Como norma general de discusión podemos seguir el siguiente proceso:

- Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes (A) en función del parámetro o parámetros, lo igualamos a cero y resolvemos la ecuación.
- Calculamos los rangos de las matrices A y B y utilizamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificarlo.
- Si es compatible (determinado o indeterminado), lo resolvemos por alguno de los métodos anteriores.

Ejemplo 8.3: Discutir el sistema: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y-2z=1 \\ 3x+y-az=b \end{cases}$ ➔ $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -a & b \end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -a \end{vmatrix}=-a-2$

- Si a=-2 ➔ Rang(A)=2 porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Si sustituimos a=-2 en B ➔ $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & b \end{pmatrix}$ y ahora calculamos el rango de B $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix}=b-1$
  - ✓ Si b=1 ➔ Rango(B)=2=Rang(A) , $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, entonces el sistema es S.C.I.
  - ✓ Si b≠1 ➔ Rang(A)≠Rang(B) ➔ el sistema es S.I.
- Si a≠-2 ➔ A es regular y el sistema es de Cramer ➔ S.C.D.

8.4.- Resolución de sistemas homogéneos.

Sabemos que un sistema es ***homogéneo*** si todos los términos independientes son cero, y que además, estos sistemas son siempre compatibles. Aplicando el Teorema de Rouché Frobenius:

- Si Rang(A)= nº de incógnitas ➔ S.C.D. Solución trivial. (0,0,0).
- Si Rang(A)< nº de incógnitas ➔ S.C.I. Infinitas soluciones, entre ellas la (0,0,0).

8.5.- Ejercicios:

1.- Comprobar que los sistemas de ecuaciones siguientes uno es determinado, otro indeterminado y otro incompatible:

$$a)\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y+0z=1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ -6x+8y+0z=-10 \\ 2x-5y-z=4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y+0z=5 \\ 7x-y-3z=8 \end{cases}$$

2.- Discutir el siguiente sistema según los valores de k. $\begin{cases} kx-y=1 \\ x-ky=2k-1 \end{cases}$

3.- Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} kx+y+(k+1)z=0 \\ ky+(k+1)z=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$

4.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$

a) Encontrar un valor de a para que el sistema sea incompatible.
b) Discutir si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.
c) Resolver el sistema para a=0.

5.- Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -9\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \alpha\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}-6\\ -11\\ \beta\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Determina el valor de α para que el sistema $AX=C_1$ sea incompatible.

b) Determina los valores de β para los cuales el sistema $AX=C_2$ es compatible, y para uno de estos valores resuelve dicho sistema.

c) Para $\alpha=3$ y $\beta=-13$ estudia el sistema $AX=C_1+C_2$

6.- Calcular los valores de a y b para los que el siguiente sistema $\begin{cases} ax+y+z=1\\ x+ay+z=b\\ x+y+az=1\end{cases}$ tiene infinitas soluciones y resolverlo para estos valores

7.- Discutir y resolver los siguientes sistemas:

$\begin{cases}3\lambda x+2y+3z=0\\ x-\lambda y-z=0\\ x-y-z=\lambda\end{cases}$ $\begin{cases}ax+y+z=1\\ x+ay+z=b\\ x+y+az=1\end{cases}$ $\begin{cases}x+2z=3\\ 3x+y+z=-1\\ 2y-z=-2\\ x-y+az=-5\end{cases}$ $\begin{cases}x+ay+z=0\\ y+z=b\\ y+az=2\end{cases}$

$\begin{cases}(2-m)x-y=1\\ x+(1-m)y=1\\ x-y=m\end{cases}$ $\begin{cases}x+y+mz=1\\ x-y+2z=0\\ 2x-y-z=m\end{cases}$ $\begin{cases}y+kz=1\\ kx-y+z=1\\ kx-z=-k\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=1\\ x+y-2z=1\\ 3x+y+az=b\end{cases}$

$\begin{cases}ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{cases}$ $\begin{cases}ax-y+z=1\\ x+by=1\\ x+y+z=0\end{cases}$ $\begin{cases}6x-2y+2az=2\\ 3x+ay-z=0\\ 2x+y+z=0\end{cases}$

8.6.- Soluciones

1.- Comprobar que los sistemas de ecuaciones siguientes uno es determinado, otro indeterminado y otro incompatible:

$$a)\begin{cases}8x+y+4z=9\\ 5x-2y+4z=6\\ x+y+0z=1\end{cases}\quad b)\begin{cases}6x-y+3z=6\\ -6x+8y+0z=-10\\ 2x-5y-z=4\end{cases}\quad c)\begin{cases}x+y+z=1\\ 3x-4y+0z=5\\ 7x-y-3z=8\end{cases}$$

a) Sea el sistema, $\begin{cases}8x+y+4z=9\\ 5x-2y+4z=6\\ x+y+0z=1\end{cases}$ lo primero que hacemos es escribir su matriz A (matriz de coeficientes) y su matriz B Ampliada (Coeficientes + términos independientes)

$$A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 4\\ 5 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 4 & 9\\ 5 & -2 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el rango de cada una de ellas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(2^a \text{ Fila - } 1^a \text{ Fila})} = 0$$

Calculamos ahora un menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$

Por tanto Rang(A)=2

$B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cojo de ella un menor de orden 3, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, tendríamos que calcular todos los menores de orden 3 que se puedan obtener de esta matriz. Pero no es necesario porque si:

$B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Si a la segunda fila le quito la primera, obtengo $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ que es igual que la 3ª fila multiplicada por 3.

Por tanto todos los menores de orden 3 de esta matriz son nulos porque la 3ª fila es combinación lineal de 2ª y la 1ª, así que calculo un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \text{. Por tanto Rang(B)=2}$$

Y como Rang(A)=Rang(B)=2<3(Nº de incógnitas), entonces el sistema es S.C.I.

Aunque el ejercicio no lo pide *vamos a calcular sus soluciones*. Como la 3ª fila es combinación lineal de la 1ª y la 2ª, la eliminamos.
Hacemos $z = \lambda$ y reescribimos el sistema:

$\begin{cases} 8x + y = 9 - 4\lambda \\ 5x - 2y = 6 - 4\lambda \end{cases}$, Por tanto ahora tenemos: $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9-4\lambda \\ 5 & -2 & 6-4\lambda \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de ambas: Rang(A)=Rang(B)=2(Nº de incógnitas), por tanto convertimos el sistema en un sistema de Cramer (A es regular). Y lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9-4\lambda & 1 \\ 6-4\lambda & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-18+8\lambda-6+4\lambda}{-21} = \frac{12\lambda-24}{-21} = \frac{4\lambda-8}{-7} = \frac{8-4\lambda}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 9-4\lambda \\ 5 & 6-4\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{48-32\lambda-45+20\lambda}{-21} = \frac{-12\lambda+3}{-21} = \frac{-4\lambda+1}{-7} = \frac{4\lambda-1}{7}$$

$$z = \lambda$$

Por tanto, multiplicando todas las soluciones por 7 tenemos:

S.C.I. $\{x = 8 - 4\lambda, y = 4\lambda - 1, z = 7\lambda\}$

b) $\begin{cases} 6x - y + 3z = 6 \\ -6x + 8y + 0z = -10 \\ 2x - 5y - z = 4 \end{cases}$

Lo primero es escribir A y B; $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 0 & -10 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculamos el rango de ambas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 42 - 42 = 0 ; \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 54 \neq 0 ,$$

Por tanto Rang(A)=2

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -10 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & 0 & 18 \\ 8 & 0 & -10 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -16 & 18 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -1(160 - 144) \neq 0$$

Por tanto Rang(B)=3.

Como Rang(A)≠Rang(B), entonces el sistema es Incompatible (No tiene solución)

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{cases}$ Como siempre, escribimos las matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Y calculamos sus rangos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$$ ➔ Rang(A)=3

Si para calcular el rango de B cogemos esta misma matriz, entonces Rang(B)=3

Y como Rang(A)=Rang(B)=3(Nº de incógnitas), entonces el sistema es S.C.D.

En este caso tampoco nos lo piden, pero vamos a calcular las soluciones del sistema.

Como la matriz A es cuadrada y su determinante es no nulo, entonces podemos aplicar la Regla de Cramer; por tanto:

$$X=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\5&-4&0\\8&-1&-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-4&0\\7&-1&-3\end{vmatrix}}=\frac{54}{46}=\frac{27}{23}; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&0\\7&8&-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-4&0\\7&-1&-3\end{vmatrix}}=\frac{-17}{46}; \qquad Z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-4&5\\7&-1&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\3&-4&0\\7&-1&-3\end{vmatrix}}=\frac{9}{46}$$

Resumiendo: S.C.D. $S=\left\{x=\frac{27}{23}, y=-\frac{17}{46}, z=\frac{9}{46}\right\}$

2.- Discutir el siguiente sistema según los valores de k. $\begin{cases}kx-y=1\\x-ky=2k-1\end{cases}$

Lo primero, como siempre, es escribir las matrices A y B.

$$A=\begin{pmatrix}k&-1\\1&-k\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}k&-1&1\\1&-k&2k-1\end{pmatrix}$$

Y después ver el rango de ellas.

$|A|=\begin{vmatrix}k&-1\\1&-k\end{vmatrix}=-k^2+1$ Igualamos a cero y calculamos los valores de k.

Si $k=\pm 1$ el rango de A es 1, y si $k\neq \pm 1$ el rango de A es 2.

Para la matriz B, tenemos que $\begin{vmatrix}-1&1\\-k&2k-1\end{vmatrix}=1-2k+k=1-k$, y este determinante es nulo si k=1.

Por tanto si K=1, Rang(B)=1, y si K≠1 Rang(B)=2.

Resumiendo:

- ***Si k=1: Rang(A)=Rang(B)=1<2 ➔ S.C.I.***
- ***Si k=-1: Rang(A)≠Rang(B) ➔ S.I.***
- ***Si $k\neq\pm 1$ Rang(A)=Rang(B)=2=Nº incógnitas ➔ S.C.D.***

2.- Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases}kx+y+(k+1)z=0\\ky+(k+1)z=0\\x+2z=1\end{cases}$

Escribimos las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}k&1&k+1\\0&k&k+1\\1&0&2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}k&1&k+1&0\\0&k&k+1&0\\1&0&2&1\end{pmatrix}$$

Veamos sus rangos:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = k^2+1 \Rightarrow \text{Rang(A)=3}$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1-k \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1-k \\ k & k+1 \end{vmatrix} = k^2+1 \neq 0 \forall k \quad \Rightarrow \text{Rang(B)=3}$$

Como Rang(A)=Rang(B)=3, entonces el sistema es S.C.D.

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{k^2+1} = \frac{1-k^2}{k^2+1} = \frac{1-k^2}{k^2+1} \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{k^2+1} = \frac{-(k^2+k)}{k^2+1}$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{k^2+1} = \frac{k^2}{k^2+1}$$

El sistema es S.C.D. para todo k número Real.

3.- Estudiar según los valores del parámetro m el sistema: $\begin{cases} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (m+2)x-12y+12z=0 \end{cases}$

Escribimos las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ m+2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ m+2 & -12 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

Este sistema es un sistema homogéneo, por tanto es un sistema compatible.

Vamos a ver si es determinado o indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ m+2 & -12 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ m+2 & -12 & 10-m \end{vmatrix} = (10-m)\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = (10-m)\cdot(-76) = 76(m-10) = 0 \leftrightarrow m = 10$$

Si m=10 ➔ $|A| \neq 0$ ➔ Rang(A) =3 ➔ S.C.D. La solución es la solución trivial $S = \{x=0, y=0, z=0\}$

Si m≠10 ➔ $|A| = 0$ ➔ $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = -76 \neq 0$ ➔ Rang(A) =2 < 3 = nº de incógnitas ➔ S.C.I.

4.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$

d) Encontrar un valor de a para que el sistema sea incompatible.

*e) **Discutir si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.***

*f) **Resolver el sistema para a=0.***

Escribimos las matrices de coeficientes A y B

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&a&3\\2&2+a&6\end{pmatrix}\text{ y } B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&a&3&2\\2&2+a&6&3\end{pmatrix}$$

a) Para que sea incompatible, ha de ocurrir que Rang(A)≠Rang(B)

Veamos cuanto vale Rang(A).

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&a&3\\2&2+a&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2-a&0\\1&a&3\\2&2+a&6\end{vmatrix}=-(2-a)\begin{vmatrix}1&3\\2&6\end{vmatrix}=0 \quad \text{Por tanto Rang}(A)<3$$

Veamos para orden 2. $\begin{vmatrix}1&2\\1&a\end{vmatrix}=a-2$

Por tanto si a=2 ➔ Rang(A)=1 y si a≠2 ➔ Rang(A)=2

Vamos ahora a estudiar la matriz B.

$$|B'|=\begin{vmatrix}2&3&1\\a&3&2\\2+a&6&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&1\\a-2&0&1\\a-2&0&1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\1&3&2\\2&6&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&1\\0&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1&2&1\\1&a&2\\2&2+a&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&a-2&1\\0&a-2&1\end{vmatrix}=0$$

Por tanto todos los menores de orden 3 obtenidos de la matriz B son nulos.

Pasamos a menores de orden 2. $\begin{vmatrix}3&1\\3&2\end{vmatrix}=3\neq 0$ ➔ Por tanto Rang(B)=2

Entonces para que el sistema sea incompatible, como hemos dicho antes, ha de ocurrir que Rang(A)≠Rang(B), y esto ocurre si a=2.

Si a=2 ➔ Rang(A)≠Rang(B) ➔ S.I.

b) Para que el sistema sea S.C.D. tiene que ocurrir que Rang(A)=Rang(B)=3, y esto no ocurre nunca, por tanto no existe ningún valor de a para que el sistema sea compatible determinado.

c) Si a=0, el sistema queda de la siguiente forma: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+2y+6z=3 \end{cases}$ y A y B ahora son:

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Como vimos en el caso a), si a≠2 el Rang(A)=2. Pues como a=0, entonces Rang(A)=2.

Veamos el rango de B. $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Como observamos a primera vista, tenemos que la 1° fila + 2° fila =3° fila, por tanto, el Rang(B) =2.

Así que si Rang(A)=Rang(B)=2<3 n° incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. (S.C.I.)

Para resolverlo hacemos, como siempre, $z=\lambda$, por tanto el sistema queda de la forma: $\begin{cases} x+2y=1-3\lambda \\ x=2-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ y resolvemos por el método más rápido posible, en este caso, sustituyendo obtenemos el valor de y, $2y=1-3\lambda-2+3\lambda=-1$ ➔ $y=-\frac{1}{2}$

Por tanto: Tenemos un S.C.I. con $S=\{4-6\lambda,-1,2\lambda\}$

5.- Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ \beta \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el valor de α ***para que el sistema*** $AX=C_1$ ***sea incompatible.***

b) Determina los valores de β ***para los cuales el sistema*** $AX=C_2$ ***es compatible, y para uno de estos valores resuelve dicho sistema.***

c) Para $\alpha=3$ ***y*** $\beta=-13$ ***estudia el sistema*** $AX=C_1+C_2$

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -9 & \alpha \end{pmatrix}$ la matriz ampliada. Para que el sistema AX=C_1 sea incompatible tiene que ocurrir que los rangos de A y B sean diferentes: Rang(A)≠Rang(B).

Veamos el rango de A. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, por tanto Rang(A) =2.

Vamos al ver el de B. $|B'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & \alpha-3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 6$

Por tanto si $\alpha \neq 2$ ➔ Rang(B) =3 y

2=Rang(A)≠Rang(B)=3 y el sistema sería incompatible.

Para que el sistema sea Incompatible tiene que ocurrir que $\alpha \neq 2$

e) Para este caso, las matrices A y B son de la forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & -9 & \beta \end{pmatrix}$. Del apartado a) tenemos que Rang(A)=2. Veamos Rang(B).

$|B'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -11 \\ 3 & -9 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & \beta+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & \beta+18 \end{vmatrix} = 3\beta + 39$ ➔ Igualamos a 0, y obtenemos $\beta = -13$

Por tanto, si $\beta = -13$ ➔ S.C.I. porque Rang(A)=Rang(B)=2<3.

Para resolverlo hacemos $z = \lambda$, y de esta forma convertimos al sistema en un sistema de Cramer, teniendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6+2\lambda \\ 2 & 1 & -11-\lambda \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -6+2\lambda & 1 \\ -11-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -1(-6+2\lambda+11+\lambda) = -5-3\lambda$$

Por tanto S.I. con $S = \{-5-3\lambda, 5\lambda-1, \lambda\}$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6+2\lambda \\ 2 & -11-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -1(-11-\lambda+12-4\lambda) = 5\lambda - 1$$

f) En este caso tenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$,

Aquí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 2 & 3 & -9 & -10 \end{pmatrix}$. Como ya hemos visto Rang(A)=2, falta ver el rango de la matriz B.

$$|B'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 3 & -9 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 12 = 27$$ ➔ Rang(B)=3.

Como Rang(A)≠Rang(B) ➔ S.I.

6.- Discutir el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -b \\ x + ay - 6z = 10 \end{cases}$

Escribimos las matrices A y B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -6 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -b \\ 1 & a & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2-a & 5 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-2a & 15 \\ 0 & 2-a & 5 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2a & 15 \\ 2-a & 5 \end{vmatrix} = 5a - 35$$

Por tanto:

- Si a=7 ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ ➔ Rang(A)=2
- Si a≠7 ➔ Rang(A)=3

Vamos a estudiar ahora el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -b \\ 1 & 7 & -6 & 10 \end{pmatrix}$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -b \\ 1 & -6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -b \\ -5 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -b \\ -6 & 10 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -b \end{vmatrix} = -50 - 30b + 15b - 5 = -15b - 55$$

Y si igualamos a cero, obtenemos $b = \frac{-55}{15} = \frac{-11}{3}$

Por tanto:

- Si $b = \frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=2
- Si $b \neq \frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=3

Resumiendo:

- Si a ≠ 7 ➔ El Sistema es de Cramer ➔ Sistema Compatible Determinado. (S.C.D.)
- Si a = 7 ➔ Rang(A) =2
  - Si $b = \frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=2 ➔ Rang(A)=Rang(B)=2 ➔ S. Compatible Indeterminado
  - Si $b \neq \frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=3 ➔ Rang(A)≠Rang(B) ➔ Sistema Incompatible.