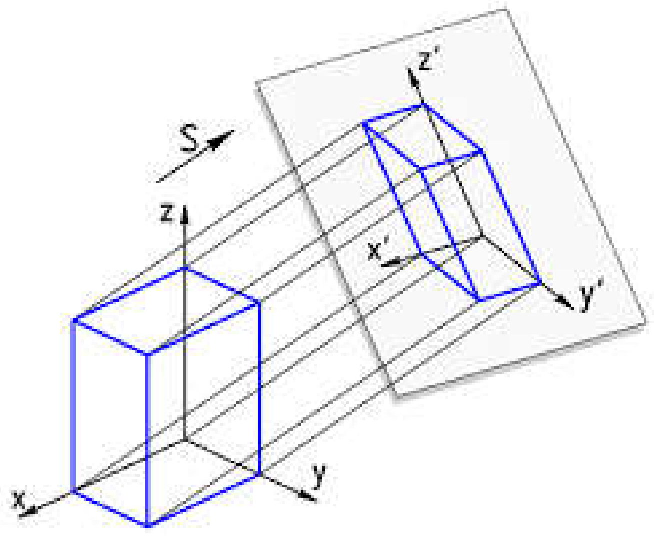
Tema 11

Espacio Afín Tridimensional



0.- Introducción.
1.- Sistema de Referencia.
2.- Ecuaciones del Plano.
   2.1.- Ec. Vectorial
   2.2.- Ec's. Paramétricas
   2.3.- Ec. General o Implícita.
   2.4.- Ec. Segmentaria.
   2.5.- Ec. Normal.
3.- Ecuaciones de una Recta
   3.1.- Ec.Vectorial.
   3.2.- Ec's. Paramétricas
   3.3.- Ec. Continua
   3.4.- Ec's Explícitas.
4.- Incidencias punto-plano y punto-recta.
5.- Posiciones Relativas de dos rectas.
6.- Posición relativa recta-plano.
7.- Posición relativa de dos planos.
8.- Posición relativa de 3 planos.
9.- Haces de Planos.
10.- Ejercicios Resueltos.

Raúl González Medina

I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 11

11.0.- Introducción

El bloque que comenzamos con el tema de vectores es el bloque correspondiente a **Geometría**, aunque en realidad corresponde a una pequeñísima parte de la geometría: la Geometría analítica del espacio tridimensional. La Geometría constituye, sin duda, una de las ramas más importantes de las Matemáticas y han estado presentes, de una forma u otra, desde la existencia del ser humano.

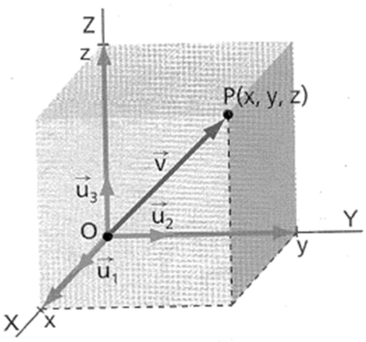
Uno de los principales creadores de lo que hoy conocemos como Geometría y quizás el más importante de la historia fue **Euclides** de Alejandría (330 – 275 a.C.) que estudió Matemáticas, Música, Óptica,… aunque su obra más importante la forman 13 pequeños libros con un total de 465 proposiciones llamados "*Los Elementos de Euclides*" y que han sido los pilares básicos de la Geometría durante siglos. Posteriormente, con el paso de los siglos, la Geometría se ha ido desarrollando, estudiándose desde las **Geometrías no euclídeas,** hasta la moderna **Geometría fractal,** pasando, entre otras por la **Geometría esférica.**

Centrándonos en la **Geometría Analítica** que nos ocupa, fueron los matemáticos franceses **Pierre de Fermat** (1601-1665) y sobre todo **René Descartes** (1596-1650) los que crearon esta nueva disciplina matemática, también denominada geometría con coordenadas, cuya idea central fue asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies. De esta manera, consiguieron unir los elementos geométricos con los números a través de los sistemas de referencia. Esta creación surgió dentro de la búsqueda de métodos generales para el estudio de curvas junto con las nuevas aportaciones del Álgebra. Lo que haremos es identificar los conceptos geométricos (puntos, rectas, planos, etc) con números o ecuaciones de modo que, por ejemplo, estudiar dónde se cortan dos rectas se convierte en estudiar un sistema de ecuaciones.

Abordaremos en la unidad problemas del espacio relativos a incidencia, intersección y paralelismo de figuras, rectas o planos.

11.1.- Sistema de Referencia

Se llama sistema de referencia del espacio afín E al conjunto (O, $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$). Siendo O un punto de E y $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ tres vectores libres que forman una base de V. Si la base es ortogonal el sistema se llama sistema de referencia ortogonal y si es ortonormal se llama sistema de referencia ortonormal. Las rectas OX, OY, OZ que pasan por O y son paralelas respectivamente a los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ se llaman ejes de coordenadas del sistema de referencia (O, $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$), y el punto O se corresponde con el origen de coordenadas.



En adelante utilizaremos como sistema de referencia el sistema formado por el origen de coordenadas O(0,0,0) y la base canónica $B=\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$

Todo punto P(x,y,z) del espacio determina el vector $\overrightarrow{OP}$, $\vec{v}$ en la figura, llamado vector de posición de P, tal que $\overrightarrow{OP}=\vec{v}=x\cdot\vec{u}_1+y\cdot\vec{u}_2+z\cdot\vec{u}_3$.

A partir de las definiciones anteriores, es inmediato comprobar que:

- Dados dos puntos A(a_1,a_2,a_3) y B(b_1,b_2,b_3) las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ son $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

- Las coordenadas del ***punto medio*** del segmento $\overline{AB}$ vienen dadas por: $M_{\overline{AB}}=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$

- Las coordenadas del ***baricentro*** (punto de intersección de las medianas) de un triángulo de Vértices A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3) y C(c_1,c_2,c_3) son:

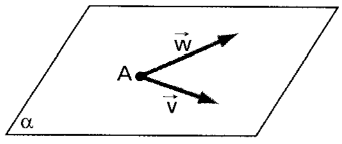
$$B_{ABC}=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3},\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$$

11.2.- Ecuaciones del Plano en el espacio

Para determinar un plano en el espacio necesitamos conocer:

- ✓ Un punto A y dos vectores directores (paralelos al plano) $\vec{u}$ y $\vec{w}$. ***(determinación lineal del plano)***
- ✓ Tres puntos A, B, C no alineados
- ✓ Un punto A y un vector normal (perpendicular) al plano.

Sea un plano π definido por $\begin{cases} A(a_1,a_2,a_3)\in\pi \\ \vec{w}(u_1,u_2,u_3)\|\pi \\ \vec{v}(v_1,v_2,v_3)\|\pi \end{cases}$

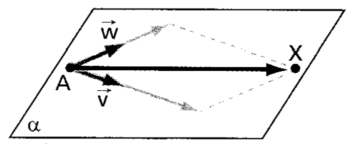


$\alpha(A, \vec{v}, \vec{w})$

11.2.1.- Ecuación Vectorial.

Si cogemos un punto X del plano, el vector $\overrightarrow{AX}$ es linealmente dependiente de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$, es decir, podemos escribir el vector $\overrightarrow{AX}$ en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$:

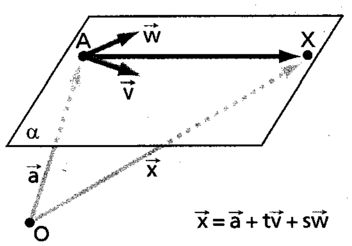
$\boxed{\overrightarrow{AX} = t\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w}}$ donde t y s son números reales.



$\overrightarrow{AX} = t\vec{v} + s\vec{w} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AX}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Por tanto Rang($\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$)=2

Si $\vec{a}$ y $\vec{x}$ son los vectores de posición de los A y X, respectivamente:



$\vec{x} = \vec{a} + \overrightarrow{AX}$ y como $\overrightarrow{AX} = t\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w}$

Podemos escribir: $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w}}$

que se corresponde con la ecuación vectorial de un plano

Escribiendo las componentes de cada vector, la ecuación vectorial queda de la forma:

$$\boxed{(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t(v_1,v_2,v_3) + s(w_1,w_2,w_3)}$$

11.2.2.- Ecuaciones paramétricas.

Si separamos la ecuación vectorial en cada una de sus componentes, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 + sw_1 \\ y = a_2 + tv_2 + sw_2 \\ z = a_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$$

11.2.3.- Ecuación General o Implícita.

Como hemos visto, los vectores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes, por tanto su determinante es nulo:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

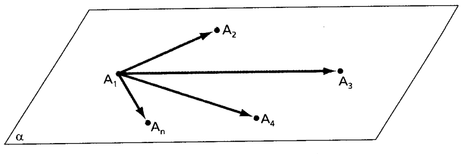
Si desarrollamos este determinante y simplificamos, nos quedará una ecuación lineal de la forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Donde el vector $\vec{n}_\pi = (a,b,c)$ es el vector normal (perpendicular) al plano.

Cuatro o mas puntos del espacio son ***coplanarios*** cuando pertenecen al mismo plano. Sean A_1, A_2,A_3,……A_n n puntos no alineados, la condición necesaria y suficiente para que sean coplanarios es que entre los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \dots\dots\dots, \overrightarrow{A_1A_n}$ solo haya 2 linealmente independientes, es decir:

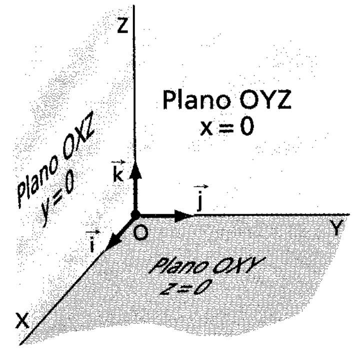
A_1, A_2,A_3,……A_n son ***coplanarios*** $\leftrightarrow$ Rang $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \dots\dots\dots, \overrightarrow{A_1A_n})$ =2



rango($\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, ..., $\overrightarrow{A_1A_n}$) = 2

En la siguiente tabla se recogen las distintas ecuaciones de los planos cartesianos:

	E. vectorial	E. paramétrica	E. implícita
Plano OXY:	$\vec{x} = t\vec{i} + s\vec{j}$	$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$	$z = 0$
Plano OXZ:	$\vec{x} = t\vec{i} + s\vec{k}$	$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases}$	$y = 0$
Plano OYZ:	$\vec{x} = t\vec{j} + s\vec{k}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases}$	$x = 0$



Planos cartesianos.

11.2.4.- Ecuación Segmentaria.

Sea la ecuación general de un plano $ax + by + cz + d = 0$ que no pasa por el origen de coordenadas (es decir $d \neq 0$)

Si pasamos al término de la derecha el coeficiente independiente, tenemos:

$$ax + by + cz = -d$$

Si dividimos ambas partes de la igualdad por (-d), tenemos:

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

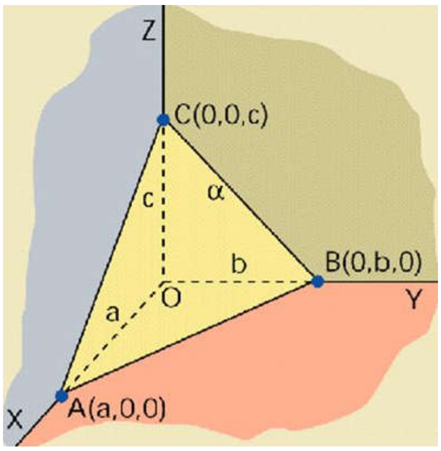
Y si hacemos los siguientes cambios de variable:

$$\frac{a}{-d} = \frac{1}{m}, \frac{b}{-d} = \frac{1}{n}, \frac{c}{-d} = \frac{1}{t}$$

la ecuación queda:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{t} = 1$$

Que recibe el nombre de ***ecuación segmentaria***.



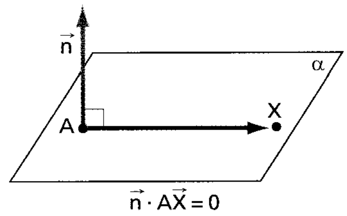
Donde los puntos A(m,0,0,), B(0,n,0) y C(0,0,t) son los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

11.2.5.- Ecuación Normal.

Sea $A(a_x,a_y,a_z)$ un punto del plano π, cualquier otro punto $X(x,y,z)$ del plano determina con A un vector $\overrightarrow{AX}$.

Como los vectores $\overrightarrow{AX}$ y el vector normal al plano $\vec{n}_\pi = (a,b,c)$ son perpendiculares, su producto escalar es nulo:

$$\boxed{\overrightarrow{AX}\cdot\vec{n}_\pi = 0} \Rightarrow a(x-a_x)+b(y-a_y)+c(z-a_z)=0$$



Ecuación normal del plano.

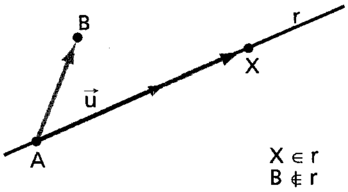
De donde si simplificamos:

$$ax+by+cz+d=0$$

11.3.- Ecuaciones de una recta en el espacio

Una recta queda determinada por:

- ✓ Dos de sus puntos.
- ✓ Dos planos no paralelos, que se cortan dando lugar a una recta.
- ✓ Por un punto por el que pasa y un vector director (paralelo a la recta)



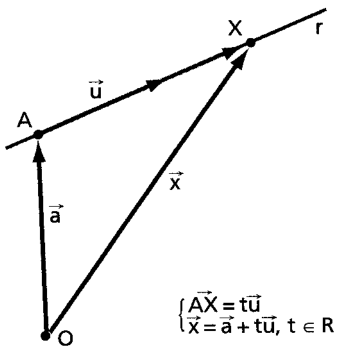
Sea r una recta definida por: $r:\begin{cases} A(a_1,a_2,a_3) \\ \vec{u}(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$

11.3.1.- Ecuación Vectorial.

$$\vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{u}$$

Que podemos escribir:

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t(u_1,u_2,u_3)$$



Ecuación vectorial de la recta.

11.3.2.- Ecuaciones paramétricas.

Si escribimos cada una de las componentes de la ecuación vectorial por separado, llegamos a: $\begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \\ z = a_3 + tu_3 \end{cases}$

En la que para cada valor de t, obtenemos un punto de la recta.

11.3.3.- Ecuación Continua.

Si en cada una de las ecuaciones paramétricas despejamos t, obtenemos:

$$t = \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$$

Por tanto:

$$\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3}$$

es la ecuación de una recta en forma continua.

11.3.4.- Ecuaciones explícitas.

Cuando tenemos 2 planos, estos se pueden cortar en una recta. Por tanto podemos determinar la ecuación de una recta mediante la intersección de dos planos secantes (que se cortan).

Esto es a lo que se llaman ***ecuaciones explícitas***, son las dos ecuaciones de los planos que se cortan:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Para determinar el vector director de la recta, ***r***, a partir de las ecuaciones explícitas, basta calcular el producto vectorial de los vectores normales a ambos planos:

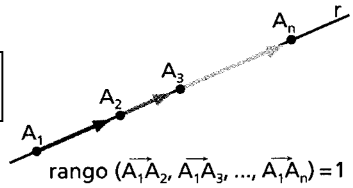
$$\overrightarrow{dr}=\vec{n}_{\pi}(a,b,c)\wedge\vec{n}_{\pi'}(a',b',c')$$

Y para obtener un punto de ella, calculamos una de las infinitas soluciones del sistema (S.C.I.) formado por las ecuaciones de los dos planos.

Dos o más puntos del espacio se dicen que están ***<u>alineados</u>*** o son ***<u>colineales</u>*** cuando pertenecen a la misma recta.

Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ n puntos, la condición necesaria y suficiente para que estén alineados es que los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{A_1A_n}$ sean proporcionales, es decir:

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ están ***alineados*** $\leftrightarrow$ Rang $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{A_1A_n}) = 1$



11.4.- Incidencia entre punto y recta y entre punto y plano

- Se dice que <u>un punto A es incidente con una recta ***r***</u>, cuando el punto pertenece a la recta r. Para comprobar si un punto es incidente con una recta basta con sustituir las coordenadas del punto en las ecuaciones de la recta, para ver que se verifican.

- Se dice que <u>un punto A es incidente con un plano $\boldsymbol{\pi}$</u>, cuando el punto pertenece al plano. Para comprobar si un punto es incidente con un plano basta con sustituir las coordenadas del punto en la ecuación general del plano para ver si la verifica.

11.5.- Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas pueden ser:

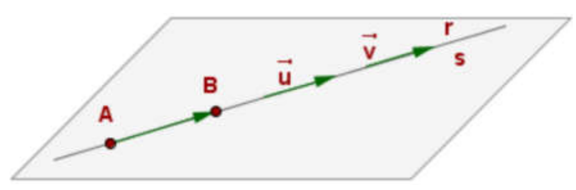
- **Paralelas**
  - **Paralelas** (No tienen ningun punto en común)
  - **Coincidentes** (Todos los puntos son comunes)
- **No Paralelas**
  - **Secantes** (Tienen un punto en común)
  - **Cruzadas** (Ningun punto en común y estan en distintos planos)

Posiciones relativas de dos rectas

Sea la recta ***r*** definida por: $\begin{cases} A(a_1,a_2,a_3) \\ \overrightarrow{dr}=(r_1,r_2,r_3) \end{cases}$ y la recta ***s*** por: $\begin{cases} B(b_1,b_2,b_3) \\ \overrightarrow{ds}=(s_1,s_2,s_3) \end{cases}$

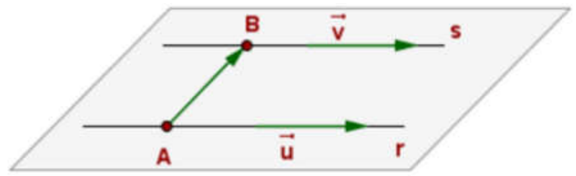
El vector $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ tiene su origen sobre la recta ***r*** y su extremo sobre la recta ***s***.

Paralelas Coincidentes



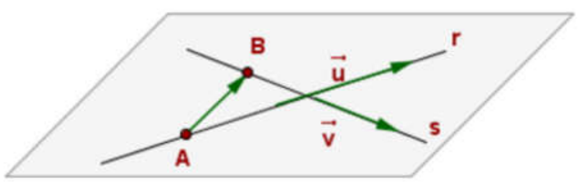
Caso 4: $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})=1$ y $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds},\overrightarrow{AB})=1$

Paralelas



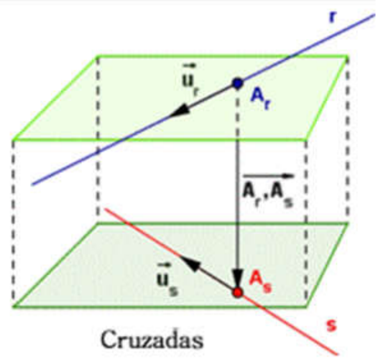
Caso 3: $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})=1$ y $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds},\overrightarrow{AB})=2$

Paralelas Coincidentes



Caso 2: $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})=2$ y $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds},\overrightarrow{AB})=2$

Paralelas



Caso 1: $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})=2$ y $Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds},\overrightarrow{AB})=3$

También lo podemos estudiar de otra forma: (aunque como veremos es la misma)

- Caso 1: $\frac{r_1}{s_1}=\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_3}{s_3}$ y $\frac{b_1-a_1}{r_1}=\frac{b_2-a_2}{r_2}=\frac{b_3-a_3}{r_3}$ ➔ Las rectas son Coincidentes
- Caso 2: $\frac{r_1}{s_1}=\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_3}{s_3}$ y $\frac{b_1-a_1}{r_1}\neq\frac{b_2-a_2}{r_2}$ ó $\frac{b_1-a_1}{r_1}\neq\frac{b_3-a_3}{r_3}$ ➔ Las rectas son Paralelas y distintas
- Caso 3: $\frac{r_1}{s_1}\neq\frac{r_2}{s_2}$ ó $\frac{r_1}{s_1}\neq\frac{r_3}{s_3}$ y $\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{vmatrix}=0$ ➔ Las rectas se cortan
- Caso 4: $\frac{r_1}{s_1}\neq\frac{r_2}{s_2}$ ó $\frac{r_1}{s_1}\neq\frac{r_3}{s_3}$ y $\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{vmatrix}\neq 0$ ➔ Las rectas se cruzan

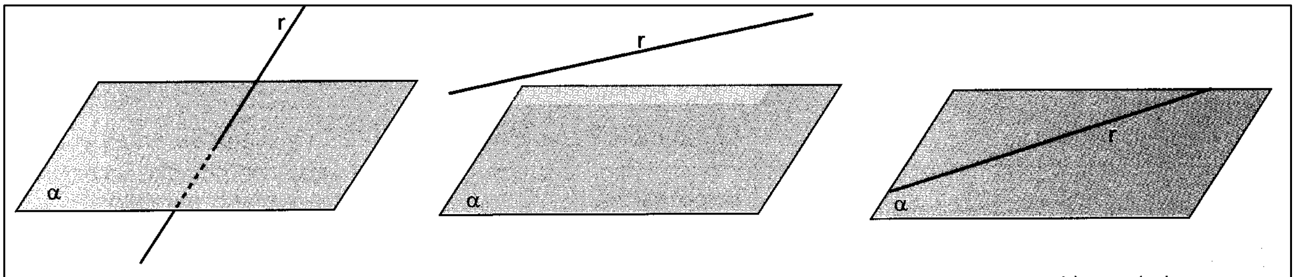
Si nos dan las dos rectas ***en forma explícita***: $r:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''+d'''=0 \end{cases}$

Escribimos las matrices $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$ y estudiamos sus rangos:

- Si Rang(M)=3 y Rang(M*)=4 ➔ Las rectas r y s se cruzan
- Si Rang(M)=3 y Rang(M*)=3 ➔ Las rectas r y s se cortan
- Si Rang(M)=2 y Rang(M*)=3 ➔ Las rectas r y son paralelas
- Si Rang(M)=2 y Rang(M*)=2 ➔ Las rectas r y s son coincidentes.

11.6.- Posición relativa de recta y plano

Una recta y un plano pueden ser:
- **Paralelos**
  - **Paralelos** (No tienen ningun punto en común)
  - **Recta contenida en plano** (Todos los puntos son comunes)
- **No Paralelos**
  - **Secantes** (Tienen un punto en común)



Recta y plano secantes. Recta y plano paralelos. Recta contenida en el plano.

Sea la recta ***r*** definida por: $\begin{cases} A(a_1,a_2,a_3) \\ \vec{dr}=(r_1,r_2,r_3) \end{cases}$ y el plano por $\pi : ax+by+cz+d=0$

Haciendo el producto escalar del vector normal al plano $\vec{n}_\pi=(a,b,c)$ y el vector director de la recta $\vec{dr}=(r_1,r_2,r_3)$

- Si $\vec{n}_\pi \cdot \vec{dr}=0$ ➔ $ar_1+br_2+cr_3=0$ ➔ La recta y el plano son paralelos.
- Si $\vec{n}_\pi \cdot \vec{dr}\neq 0$ ➔ $ar_1+br_2+cr_3\neq 0$ ➔ La recta corta al plano.

Para distinguir si la recta es paralela al plano o está contenida en él, comprobamos si el punto A pertenece al plano. Si pertenece, la recta está contenida en el plano, y si no pertenece, la recta y el plano son paralelos.

Si nos dan la recta en forma explícita; tenemos: $r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

$$\pi : \{A''x+B''y+C''z+D''=0$$

Si escribimos la matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada $M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$.

Según los rangos de las matrices se tienen los siguientes casos:

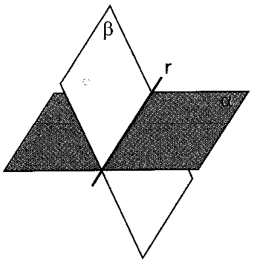
- ***Caso 1:*** Si Rang(M)=3 y Rang(M*)=3 ➔ Recta y plano son Secantes
- ***Caso 2:*** Si Rang(M)=2 y Rang(M*)=3 ➔ Recta y plano paralelos
- ***Caso 3:*** SI Rang(M)=2 y Rang(M*)=2 ➔ Recta y plano coincidentes

11.7.- Posición relativa de dos planos

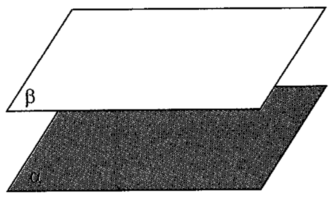
Sean los planos $\pi_1 = ax + by + cz + d = 0$ y $\pi_2 = a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Las posiciones relativas de dos planos en el espacio son:

— **planos secantes:** tienen en común los puntos de una recta;
— **planos paralelos:** no tienen ningún punto en común;
— **planos coincidentes:** tienen todos sus puntos en común.



Planos secantes.



Planos paralelos.

Planos coincidentes.

Si escribimos la matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$, y estudiamos sus rangos, se presentan los siguientes casos:

- ***Caso 1:*** Si Rang(M)=2 y Rang(M*)=2 ➔ Los planos se cortan en una Recta
- ***Caso 2:*** Si Rang(M)=1 y Rang(M*)=2 ➔ Paralelos
- ***Caso 3:*** SI Rang(M)=1 y Rang(M*)=1 ➔ Planos coincidentes

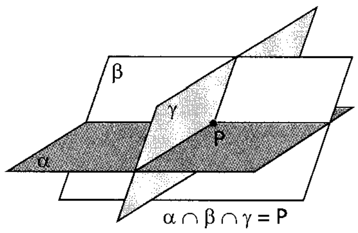
11.8.- Posición relativa de tres planos

Sean los planos $\pi_1 = ax + by + cz + d = 0$, $\pi_2 = a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y $\pi_3 = a''x + b''y + c''z + d'' = 0$

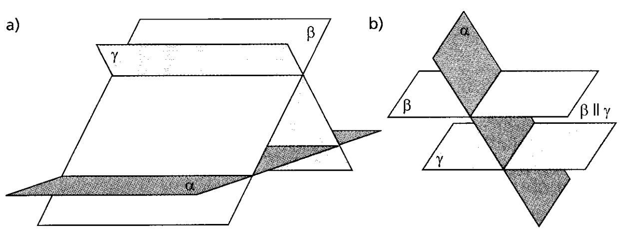
La matriz de coeficientes: $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$.

Según los distintos rangos de las matrices M y M*, se presentan los siguientes casos:

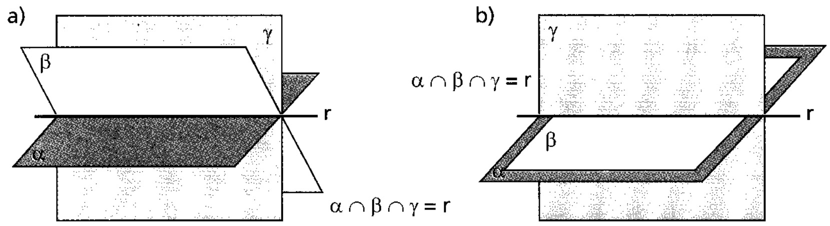
<u>**Caso 1:**</u> Si Rang(M)=3 y Rang(M*)=3 ➔ Los planos se corta en un punto (SCD)



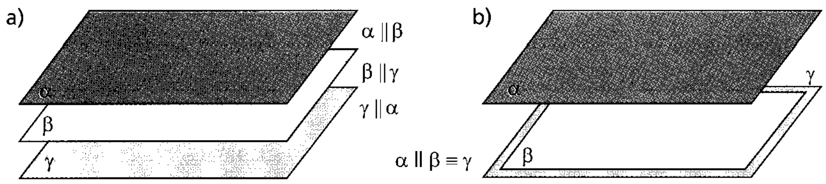
<u>**Caso 2:**</u> Si Rang(M)=2 y Rang(M*)=3 ➔ Dos planos paralelos y otro secante a ambos, o los planos se cortan dos a dos.



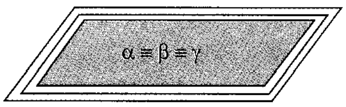
Caso 3: Si Rang(M)=2 y Rang(M*)=2 ➔ Los planos se cortan en una recta.



Caso 4: Si Rang(M)=1 y Rang(M*)=2 ➔ Paralelos

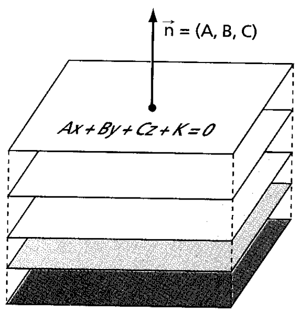


Caso 5: Si Rang(M)=1 y Rang(M*)=1 ➔ Los planos son coincidentes.



11.9.- Haces de Planos

11.9.1.- Haz de planos paralelos

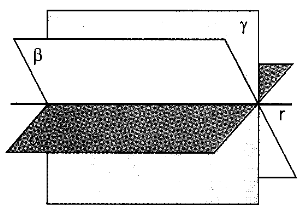


Se llama haz de planos paralelos, al conjunto de planos paralelos a uno dado. El haz de planos paralelos viene determinado por un plano cualquiera del mismo. Su ecuación es:

$$Ax + By + Cz + K = 0, \qquad \forall K \in \mathbb{R}$$

Puesto que todos los planos son paralelos, todos tienen el mismo vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$.

11.9.2.- Haz de planos secantes

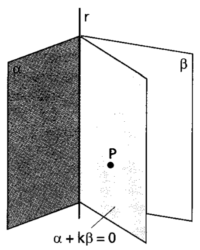


El plano γ es combinación de los planos α y β.

Se llama haz de planos secantes al conjunto de planos que pasan por una recta que se llama ***arista*** del haz. (r en el dibujo).

El haz de planos queda determinado por dos planos distintos de mismo, su ecuación es:

$$t(Ax + By + Cz + D) + s(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$



con $t, s \in \mathbb{R}$

11.10.- Ejercicios Resueltos

1.- Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas: r: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-8}{4}$ ***y s:*** $x=y=z$

Para determinar la ecuación de un plano, necesitamos 1 punto y 2 vectores directores, pues bien, en este ejercicio como el plano pasa por el origen de coordenadas (0,0,0) este va a ser el punto del plano, y ahora necesitamos 2 vectores directores, como el plano es paralelo a las rectas r y s, pues los vectores directores de r y de s van a ser lo vectores directores del plano.

Por tanto dr=(2,3,4) y ds=(1,1,1).

Así que $\pi=\begin{cases} x=0+2\alpha+\beta \\ y=0+3\alpha+\beta \\ z=0+4\alpha+\beta \end{cases}$. Como no me piden la ecuación de ninguna forma en concreto, escribimos la más fácil, y en este caso es la Ecuación Paramétrica.

2.- Determina el plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$ ***y es paralelo a la recta s:*** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-10}{4}$.

Al igual que en el ejercicio anterior, para determinar un plano necesito un punto y dos vectores. Como la recta r está contenida en el plano, de aquí obtenemos un punto y un vector, y como la recta s es paralela al plano, de aquí obtenemos el otro vector. Y de esta manera ya podemos escribir la ecuación del plano.

Para calcular el vector de la recta r, que me la dan como intersección de dos planos, tenemos que hacer el producto vectorial de los vectores normales de cada plano:

$dr=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=i(2)-j(-2)+k(-4)=(2,2,-4)$, ahora, para calcular un punto de la recta, lo que hacemos es resolver el sistema $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$ haciendo z=0, de aquí obtenemos: $\begin{cases} x+y=-5 \\ x-3y=3 \end{cases}$ y por Gauss 4y=-8 ➔ y= -2 y x=-3. Por tanto el punto de la recta, que también es del plano es P=(-3,-2,0).

Ahora de la recta s tenemos su vector director ds=(2,3,4)

Y entonces la ecuación del plano pedida es: $\begin{cases} x=-3+2\alpha+2\beta \\ y=-2+2\alpha+3\beta \\ z=0-4\alpha+4\beta \end{cases}$

3.- Hallar la ecuación implícita del plano π que pasa por el punto P(1,1,1) y es paralelo a π'= $\begin{cases} x=1+2\alpha-3\beta \\ y=3+2\beta \\ z=-1-\beta \end{cases}$

Tenemos que el punto P es (1,1,1) y los vectores directores son los mismos que los del otro plano puesto que ambos son paralelos. Por tanto V(2,0,0) y u(-3,2,-1). Así que la ecuación del plano pedida es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} y-1 & z-1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2(-y+1-2z+2)=2(-y-2z+3)=-2y-4z+6$$

Y simplificando nos queda: $\boxed{y+2z-3=0}$

4.- Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-4}{3}$ ***y es paralelo a la recta***

s: $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases}$

Este ejercicio es igual que los anteriores, como la recta r está en el plano de ella sacamos un punto y un vector. P(2,2,4) y dr(1,-2,3) y de la recta ***s*** que es paralela al plano sacamos un vector ds(3,2,1).

La ecuación del plano pedida es: $\pi = \begin{cases} x = 2+\alpha+3\beta \\ y = 2-2\alpha+2\beta \\ z = 4+3\alpha+\beta \end{cases}$

5.- Estudia si los puntos A(1,1,1),B(2,3,4),C(-5,0,-2) están alineados. En caso afirmativo, halla las ecuaciones paramétricas de la recta que definen, y en caso negativo, la ecuación del plano correspondiente.

Para que un conjunto de puntos estén alineados, tiene que ocurrir que el rango de los vectores que los unen sea 1, o lo que es lo mismo, si todos los puntos están en la misma recta, entonces todos los vectores serán paralelos. Ya sabemos que los vectores paralelos son proporcionales, y los vectores proporcionales son dependientes, y los vectores dependientes tienen rango 1.

Por tanto calculamos los vectores que van de A a B y de A a C, y vemos como son.

$$\vec{AB}=(1,2,3) \ \text{ y } \ \vec{AC}=(-6,-1,-3)$$

Veamos si son proporcionales.

Como $\frac{1}{-6}\neq\frac{2}{-1}\neq\frac{3}{-3}$, no son ni proporcionales ni paralelos, por tanto no están alineados porque el $rang(\vec{AB},\vec{AC})=2$, así que con ellos podemos definir un plano.

Tenemos 2 vectores y un punto, pues la ecuación del plano es: $\pi: \begin{cases} x = 1+\lambda-6\beta \\ y = 1+2\lambda-\beta \\ z = 1+3\lambda-3\beta \end{cases}$

6.- Consideramos la recta r, el plano π y el punto P, siendo: $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-2}{5}$***; π: 2x-y+3z=0; P(1,0,4). Obtén una recta s paralela a r que pase por P. Calcula el punto de intersección de r y π.***

Para obtener una recta paralela a r y que pase por p, lo único que tenemos que hacer es sustituir el punto de la recta r por el nuevo punto.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{5}$$

Ahora, para calcular el punto de intersección entre $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-2}{5}$ y π: 2x-y+3z=1, escribo la ecuación de la recta en forma paramétrica. $r:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -8+3t \\ z = 2+5t \end{cases}$ y la sustituyo en el plano π:

$2(1+2t)-(-8+3t)+3(2+5t)=0$ ➔ $2+4t+8-3t+6+15t=0$ ➔ 16t+16=0 ➔ $t=-1$

Por tanto el punto de intersección entre la recta y el plano P es: $(-1,-11,-3)$

7.- Dada la familia de planos: $2mx+(m+1)y-3(m-1)z+2m=0$
a) Calcular la ecuación del plano de esa familia que pasa por el punto (1,1,-2)
b) Calcular la ecuación del plano de esta familia perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x+3z-1=0 \\ y-5z+2=0 \end{cases}$

a) Tenemos un haz de planos secantes, pues bien, para calcular la ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,-2) tenemos que sustituir el punto en la ecuación del haz.

Por tanto, $2m+(m+1)\cdot 1-3(m-1)\cdot(-2)+2m+4=0$ ➔ $2m+m+1+6m-6+2m+4=0$ ➔ $11m-1=0$ ➔ $m=\frac{1}{11}$

De manera que la ecuación del plano pedida es:

$$\frac{2}{11}x+\frac{12}{11}y+\frac{30}{11}z+\frac{46}{11}=0$$

de donde simplificando tenemos:

$$\boxed{x+6y+15z+23=0}$$

b) Si el plano es perpendicular a la recta, quiere decir que el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos.

Vamos a calcular primero el vector director de la recta, para ello hacemos el producto vectorial de los dos vectores normales a los planos:

$$dr=\vec{n}\wedge\vec{n}'=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}=\hat{i}(-3)-\hat{j}(-5)+\hat{k}(1)=(-3,5,1)$$

El vector director del haz de planos es (2m,m+1,-3m+3), por tanto ambos vectores, tienen que ser proporcionales. $(-3,5,1)=k(2m,m+1,-3m+3)$

De aquí: $\begin{cases} k=\dfrac{-3}{2m} \\ k=\dfrac{5}{m+1} \\ k=\dfrac{1}{3-3m} \end{cases}$ ➔ Tenemos un sistema, que si resolvemos tenemos :

Utilizando la 1ª y la 2ª ➔ $\frac{-3}{2m}=\frac{5}{m+1}$ ➔ $-3m-3=10m$ ➔ $m=\frac{-3}{13}$

Y si utilizamos la 1ª y la 3ª ➔ $\frac{-3}{2m}=\frac{1}{3-3m}$ ➔ $-9+9m=2m$ ➔ $m=\frac{9}{7}$

Por tanto, tenemos un sistema incompatible.

Así que en este haz de planos no existe ningún plano perpendicular a la recta dada.

8.- Estudiar la posición relativa de las rectas r y s de ecuaciones: $r\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=2+2t \end{cases}$ $\quad s\begin{cases} x=1 \\ z=y+2 \end{cases}$

Tenemos la recta r en ecuaciones paramétricas, su vector de posición es dr(2,0,2), y la recta s está en ecuaciones explícitas, vamos a calcular su vector director ds:

$$ds=n\wedge n'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-(1)(j+k)=(0,-1,-1)$$

Vemos que los vectores dr y ds no son proporcionales $dr\neq kds$ ➔ $(2,0,2)\neq k(0,-1,-1)$ Por tanto las rectas no son paralelas.

O son Secantes, o se cruzan.

Vamos a coger un punto de cada una de ellas, y vamos a crear el vector que las une.

Un punto de r es a=(1,0,2) y un punto de s será (resolviendo el sistema) b= (1,0,2). En este caso vemos que el punto (1,0,2) pertenece a ambas rectas, por tanto son secantes.

Si al calcular otro punto de s no nos sale el mismo, entonces tenemos que calcular el vector $\vec{ab}$, y después ver el rango de $\vec{dr},\vec{ds},\vec{ab}$. Si el rango es 2, entonces ambas están en el mismo plano y se cortan, y si el rango es 3, no están en el mismo plano y se cruzan.

9.- Dada la recta $r:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$ ***y el plano*** $\pi: 2x+my+2z-3=0$ ***, hallar razonadamente:***

a) El valor de m para que r y π sean paralelos.
b) Los valores de m para que r y π sean perpendiculares.
c) ¿Existe algún valor de m para el que la recta esté contenida en el plano?.

a) Para que r y π sean paralelos, ha de ocurrir que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares.

$\vec{dr}\cdot\vec{n}=0$ ➔ $(1,-2,1)\cdot(2,m,2)=0$ ➔ 2-2m+2=0 ➔ 4=2m ➔ m=2

b) Para que r y π sean perpendiculares, los vectores normal al plano y director de la recta, han de ser paralelos. Por tanto:

$\vec{n}=k\vec{dr}$ ➔ (1,-2,1)=k(2,m,2) ➔ k=2 ➔ m= -4

c) Para que la recta esté contenida en el plano, tiene que ocurrir que m=2 y que un punto de la recta pertenezca al plano. Por ejemplo el punto (-1,0,1). Veamos si pertenece sustituyendo en π.

$2x+2y+2z-3=0$ ➔ 2(-1)+2(0)+2(1)-3=0 ➔ -3=0 No existe ningún m.

10.- Estudiar la posición relativa de los planos $\begin{matrix}\pi_1: mx+y-z=1\\ \pi_2: 2x-y+mz=3\\ \pi_3: x-2y+(m+1)z=3m-1\end{matrix}$ **según m.**

Escribimos la matriz $M=\begin{pmatrix}m&1&-1\\2&1&m\\1&-2&m+1\end{pmatrix}$ y la matriz $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&-1&1\\2&1&m&3\\1&-2&m+1&3m-1\end{array}\right)$ y estudiamos sus rangos.

$$|M|=\begin{vmatrix}m&1&-1\\2&-1&m\\1&-2&m+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+2&0&-1+m\\2&-1&m\\-3&0&-m+1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}m+2&-1+m\\-3&-m+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+2&m-1\\3&m-1\end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix}m+2&1\\3&1\end{vmatrix}=(m-1)^2$$

- Si m≠1 ➔ Rang(M)=3=Rang(M*) ➔ Los planos se cortan en un punto.

- Si m=1 ➔ Rang(M)=2 y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&1&1&3\\1&-2&2&2\end{array}\right)$ ➔ $\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\-2&2&2\end{vmatrix}=(2+2+6)-(-2+6-2)=10-2=8$

Rang(M*)=3 ➔ Los planos son secantes dos a dos (porque ninguno es paralelo).

11.- Hallar el valor de k para que los planos $\begin{matrix} \pi_1 : x+y+z=2 \\ \pi_2 : 2x+3y+z=3 \\ \pi_3 : kx+10y+4z=11 \end{matrix}$ ***tengan una recta común.***

Para que 3 planos tengan una recta común, tiene que ocurrir que el Rang(M)=Rang(M*)=2. Para que esto ocurra, una ecuación tiene que ser combinación lineal de las otras dos.

Por tanto, a simple vista vemos que si K=7, la 3ª ecuación es igual a 3·2ª más la 1ª.

12.- Halar la ecuación de una recta que pasa por el punto A(1,2,1) y corta perpendicularmente a la recta $s : \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

La recta s está determinada por dos planos. Vamos a calcular su vector director

$$ds = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i-2j+k = (-1,-2,1)$$

Un punto de ella es por ejemplo: Si z=0 ➔ Q (2,1,0).

Si escribimos la recta s en forma paramétrica tenemos: $s : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases}$; un punto genérico de ella sería el punto B(2-t,1-2t,t), por tanto el vector $\overrightarrow{BA} = (t-1, 2t+1, 1-t)$. Y como ambas rectas han de ser perpendiculares, entonces el producto escalar $\overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, tiene que ser nulo. Así que:

$$\overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{BA} = (-1,-2,1)\cdot(t-1, 2t+1, 1-t) = 1-t-2-4t+1-t = -6t = 0 \;\; ➔ \;\; t=0$$

Por tanto el vector director de la recta r es (-1,1,1). Ya podemos escribir las ecuaciones paramétricas de la recta

$$r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

13.- Hallar el valor de p para que las rectas $r : \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ ***y*** $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$ ***sean perpendiculares, el punto de intersección y la ecuación del plano que determinan.***

Para que sean perpendiculares, el producto de sus vectores directores ha de ser nulo, por tanto:

$$dr \cdot ds = (4,-2,2)\cdot(1, p-1, 3) = 4-2p+2+6 = -2p+12 = 0 \;\; ➔ \text{ p=6}$$

Para que sean perpendiculares p=6.

Para calcular el punto de intersección, escribimos ambas ecuaciones en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 4t \\ y = 1-2t \\ z = 2t \end{cases} \; y \quad s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 6+5\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{cases}$$

Y ahora igualamos ambas:

$$\left.\begin{array}{l} 4t = 1+\lambda \\ 1-2t = 6+5\lambda \\ 2t = 3+3\lambda \end{array}\right\}$$ y resolvemos este pequeño sistema: ➔ $\lambda = -1$ y t=0

Para calcular el punto de intersección sustituyo en cualquiera de las ecuaciones paramétricas, obsérvese que si sustituimos t en la ecuación de r y λ en la ecuación de s, obtenemos el mismo punto.

El punto de intersección de las rectas r y s es: (0,1,0)

Para calcular la ecuación del plano que determinan, necesitamos un punto y dos vectores, por tanto:

$$\pi : \begin{cases} x = 0+4t+\lambda \\ y = 1-2t+5\lambda \\ z = 0+2t+3\lambda \end{cases}$$

14.- Deducir una ecuación para el plano π que es perpendicular a $\pi_1 : x-6y+z=0$ y que contiene a la recta intersección de $\pi_2 : 4x-2y+z=2$ y $\pi_3 : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 2+\lambda+\mu \\ z = 1+\lambda+2\mu \end{cases}$

Si el plano contiene a la recta intersección de los planos π_2 y π_3, vamos a calcularla, porque de ella vamos a obtener un punto y un vector.

Sustituimos la ecuación del plano π_3 en el plano π_2: $4(2+\lambda)-2(2+\lambda+\mu)+(1+\lambda+2\mu)=2$

Por tanto la ecuación de la recta contenida en el plano es: $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$ Así que un punto de la recta es el punto (1,1,0) y el vector director es (0,1,2).

Como tenemos que calcular la ecuación de un plano, perpendicular a otro, tenemos que el vector normal del plano $\pi_1 : x-6y+z=0$ es n(1,-6,1) es paralelo al otro.

Por tanto ya tenemos 1 punto y 2 vectores; por lo que podemos escribir las ecuaciones paramétricas del plano que nos piden:

$$\pi : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-6\lambda+\mu \\ z = \lambda+2\mu \end{cases}$$

15.- Los puntos A(3,3,5) y B(3,3,2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C, consecutivo de B, está en la recta de ecuaciones $r : x = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Determinar los vértices C y D.

Si el vértice C está en la recta, tiene por coordenadas genéricas $(t, 6-t, 1+2t)$, y como la figura es un rectángulo, entonces los vectores AB y BC son perpendiculares, así que si producto escalar será nulo.

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,-3)\cdot(t,6-t,1+2t) = -3+6t = 0$$ ➔ $t = \frac{1}{2}$ ➔ Por tanto el punto C es $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, 2\right)$.

Sea el punto D(x,y,z), el vector DA es $(3-x, 3-y, 5-z)$ y este vector también es perpendicular al vector AB, entonces $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} = (3-x,3-y,5-z)(0,0,-3) = -15+z = 0$ ➔ $z = 5$

Como la figura es un rectángulo, las componentes x e y del punto D tienen que ser iguales que las del punto C, así que el punto D es $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2},5\right)$

16.- Dados el plano $\pi: x+3y-z=1$ **y la recta** $r: \frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$**, se pide:**

a) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

Como el plano π' contiene a la recta, de ella sacamos un punto y un vector, y como además este plano es perpendicular a π, el vector normal de π es paralelo al plano π', así que ya tenemos 1 punto y dos vectores, por lo que podemos escribir la ecuación del plano π'.

$A(-2,1,0); \vec{u}(6,2,1); \vec{n}_\pi(1,3,-1)$ ➔ $\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$ ➔ $-5(x+2)+7(y-1)+16z=0$ ➔ Por tanto la ecuación del plano es $\pi': -5x+7y+16z-17=0$

Las ecuaciones explícitas de la recta intersección son: $r: \begin{cases} x+3y-z=1 \\ -5x+7y+16z-17=0 \end{cases}$

Lo primero es calcular el vector director de la recta: $\overrightarrow{dr}=\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 16 \end{vmatrix}=55\hat{i}-11\hat{j}+22\hat{k}$

$\overrightarrow{dr}=(5,-1,2)$, y ahora necesitamos un punto. Si hacemos z=0, nos queda $\begin{cases} x+3y=1 \\ -5x+7y=17 \end{cases}$

Si multiplico la primera por 5 y sumamos ambas ecuaciones: 22y=22 ➔ y=1 , x= -2 P(-2,1,0)

Por tanto la recta intersección de los planos π y π' es: $r: \begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

17.- Obtén el valor de a para el cual las rectas $r: x=y=z-a$ **y** $s: \frac{2x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{0}$ **se corten, y hallar el punto de corte.**

Para que dos rectas se corten sus vectores directores no pueden ser proporcionales, dr(1,1,1) y ds (3/2,-2,0).

Mucho cuidado con la ecuación en forma continua, como hemos visto en clase, la forma continua es $\frac{x-a_1}{v_1}$ ***, y aquí aparece*** $\frac{2x-1}{3}$***, por tanto hemos de escribirla bien:*** $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$. Estas rectas no son paralelas, pueden ser secantes o que se crucen. Para que sean secantes: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 & 0 \end{vmatrix}=1-\frac{9}{2}-7+\frac{7}{2}a=-21+7a=0$ ➔ $a=3$

Para hallar el punto de corte, escribimos ambas rectas en forma paramétrica: $s:\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ y=-3-2\lambda \\ z=2 \end{cases}$ y $r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=3+t \end{cases}$

igualando $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\lambda \\ t=-3-2\lambda \\ 3+t=2 \end{array}\right\}$ ➔ $t=-1$ Por tanto el punto de intersección es: $(-1,-1,2)$

18.- ¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=y=z+1$ ***y*** $s:\begin{cases} x=2t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$

Para poder construir un triángulo sobre estas dos rectas, ambas han de ser secantes. Si vemos el vector director de r (2,1,1) y el vector director de s (2,1,1), vemos que ambos son proporcionales (el mismo), por tanto las rectas son paralelas. ➔ ***No podemos construir un triángulo con dos de sus lados sobre las rectas r y s.***

19.- Se sabe que los puntos A(m,0,1), B(0,1,2), C(1,2,3) y D(7,2,1) están en un mismo plano. Hallar m y calcular la ecuación de dicho plano.

Si todos los puntos están en un mismo plano, el rango de los vectores que formamos desde un punto a los otros va a ser dos.

$\overrightarrow{BA}=(m,-1,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{BD}=(7,1,-1)$ ➔ Vamos a calcular $Rang\begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y para ello calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+F_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = m+1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2(m+1)$$

Este determinante tiene que ser nulo porque los vectores son coplanarios.

$-2(m+1)=0$ ➔ m=-1

Si m=-1, y sustituyendo, obtenemos : $\overrightarrow{BA}=(-1,-1,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{BD}=(7,1,-1)$

Para escribir la ecuación del plano, podemos utilizar el punto (0,1,2) y los vectores: $\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{BD}=(7,1,-1)$

Por tanto: $\pi:\begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=1+\alpha+\beta \\ z=2+\alpha-\beta \end{cases}$

b) ¿Están los puntos B, C y D alineados?

Para que los puntos B,C y D estén alineados, el Rango de los vectores que unen ambos puntos tiene que valer 1.

$\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{BD}=(7,1,-1)$ ➔ $Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}=2$ ➔ Por tanto no están alineados.