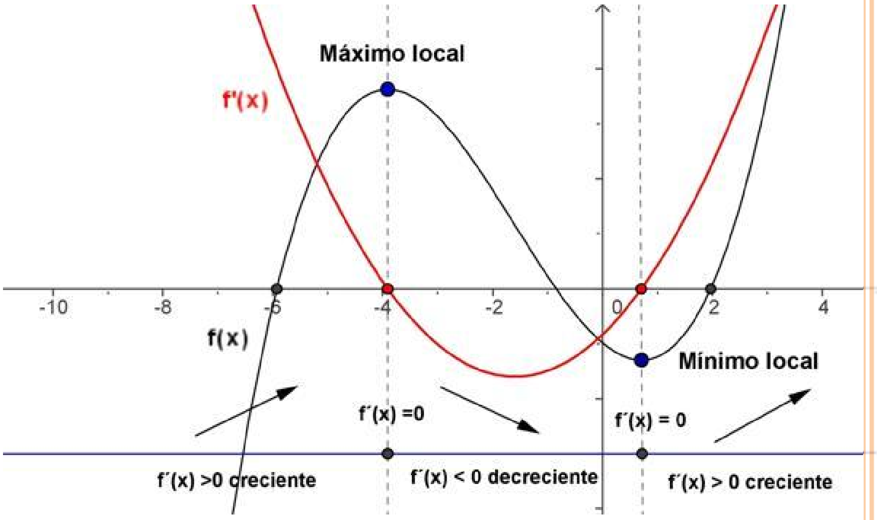
Tema 3

Aplicaciones de las Derivadas



Raúl González Medina

I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 3

3.0.- Introducción

Esta unidad sobre derivación y representaciones gráficas resume de alguna manera, todo un trabajo que hasta el momento de abordarla se ha desarrollado en este curso y en cursos precedentes. La relación entre derivación, continuidad y límite tiene aquí su punto culminante, cuando en 4º de la ESO se trataba de dejar patente, en sentido puramente geométrico, el concepto de límite y de continuidad.

Se trata así de repasar, consolidar y aportar nuevos planteamientos y desarrollos prácticos a lo aprendido en cursos precedentes y en este mismo de primero, todos los cuales serán de vital importancia tanto en el próximo curso como en los previsibles años universitarios.

Los contenidos de esta unidad didáctica están estrechamente relacionados con todos los de este mismo bloque de análisis, con el de trigonometría y geometría e incluso con el de aritmética y álgebra.

El cálculo de funciones derivadas se conforma en uno de los procedimientos más útiles para resolver cantidad de situaciones relacionadas con las diferentes ciencias: numerosas magnitudes físicas, como la velocidad y la aceleración de un móvil en cierto instante o rapidez con la que varía la cantidad de movimiento de una partícula se expresan mediante la derivada de una función.

Relacionados con las ciencias económicas aparecen conceptos, tales como inflación, presión fiscal o producto interior bruto que pueden ser presentado mediante gráficas de funciones, por tanto de puede realizar mediante la ayuda de conceptos matemáticos, como crecimiento y curvatura, lo mismo que ocurre a la hora de ajustar mediante funciones numerosos conceptos de la física: movimientos de partículas, el trabajo desarrollado al aplicar una fuerza para desplazar un objeto, la ecuación del estudio de un gas ideal o la propagación de la onda sonora plana son solo algunos de los numerosos ejemplos que se podrían enunciar.

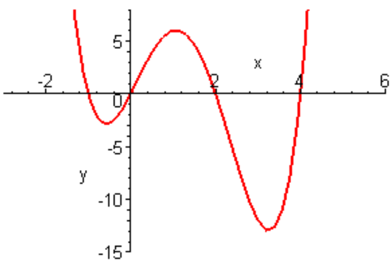
Aprovecharemos los conocimientos adquiridos sobre derivadas, junto con los de límite y continuidad, para afrontar el fin principal para el que se aprenden: la representación y el estudio local y global de funciones que constituyen la segunda y última parte de la unidad.

En ella, las etapas a seguir serán tres: estudiar “f” determinando sus características generales y realizando la determinación de sus posibles asíntotas, estudiar f’ y obtener intervalos de monotonía y extremos y estudiar f’’ obteniendo los intervalos de curvatura y puntos de inflexión. Para ello, se recuerdan los Teoremas pertinentes sobre la relación entre las derivadas sucesivas de una función y sus características locales. Los rasgos de la curva se irán perfilando “haciéndole preguntas” a la función. Empezaremos con la monotonía de una función.

3.1.- Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea f una función definida en un intervalo I. Si la función f es derivable en el intervalo I, se verifica:

- f es creciente en I ➔ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
- f es decreciente en I ➔ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$
- f es constante en I ➔ $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$
- f es estrictamente creciente en I ➔ $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$
- f es estrictamente decreciente en I ➔ $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$



Lo que ocurre, es que una función no es siempre creciente ni siempre decreciente, sino que tiene intervalos en los que es creciente, e intervalos en los que es decreciente.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f definida en [a,b], hemos de considerar:

- Los extremos a y b del intervalo
- Los puntos donde $f'(x)=0$.
- Los puntos donde no existe $f'(x)$

Tendremos así los posibles extremos de los intervalos en los que cambia de signo $f'(x)$.

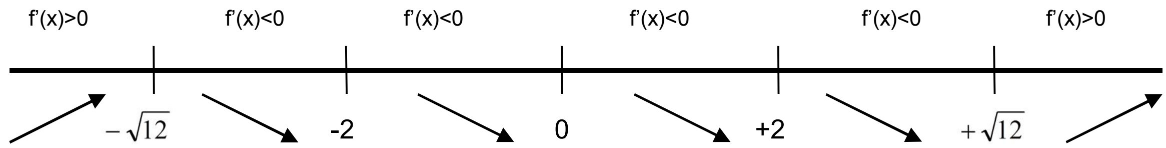
Ejemplo 1: *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}$ y la igualamos a cero para obtener sus raíces:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \rightarrow x^2(x^2-12)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12} \end{cases}$$

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, y los puntos donde no está definida la derivada, -2 y 2.



$f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},+\infty\right)$
$f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\sqrt{12},-2\right)\cup\left(-2,2\right)\cup\left(+\sqrt{12},+\infty\right)$

Simbolizamos con ↗ que la función es creciente, y con ↘ que es decreciente.

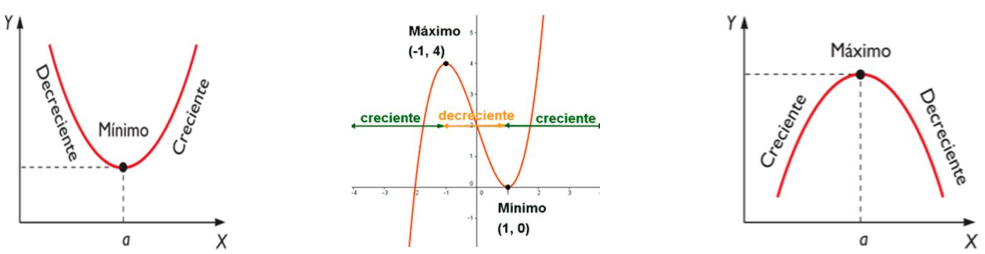
3.2.- Máximos y mínimos de una función

- Se dice que una función f tiene en el punto *a* un ***máximo relativo***, o que *a* es un máximo relativo de f, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: f(a+h) ≤ f(a).

- Se dice que una función f tiene en el punto *a* un ***mínimo relativo***, o que *a* es un mínimo relativo de f, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: f(a+h) ≥ f(a).

También podemos decir que:

- La función f posee un máximo relativo en el punto *a*, si en este punto la función cambia de ser creciente a ser decreciente.

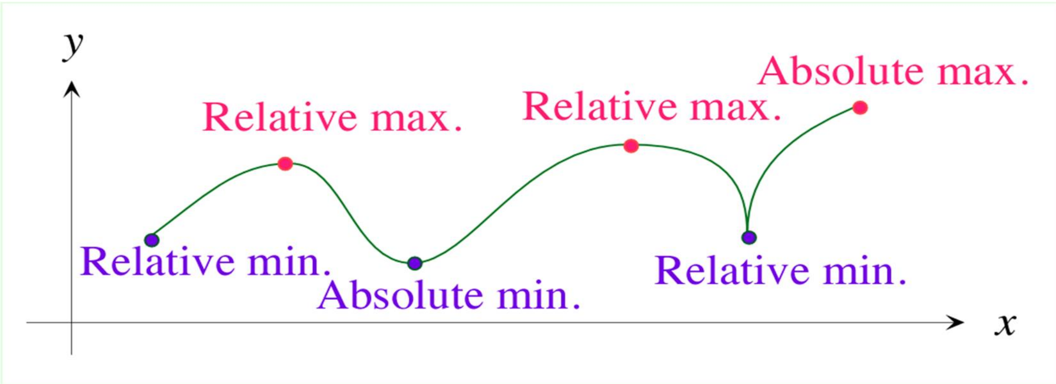


- La función f posee un mínimo relativo en el punto *a*, si en este punto la función cambia de ser decreciente a ser creciente.

3.2.1.- Máximos y mínimos absolutos

Decimos que un punto $x=a$ de una gráfica es el máximo absoluto, si además de ser máximo relativo, el punto a es el punto más alto de la gráfica, es decir: f tiene en el punto a un ***máximo absoluto***, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: $f(a+h) < f(a)$.

Y de la misma forma, que un punto $x=a$ de una gráfica es el mínimo absoluto, si además de ser mínimo relativo, el punto a es el punto más bajo de la gráfica, es decir: f tiene en el punto a un ***mínimo absoluto***, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: $f(a+h) > f(a)$.



3.2.1.- Condición necesaria de extremo

Sea a un punto interior del dominio de la función f. Si f tiene un extremo relativo en a y además f es derivable en a, entonces $f'(a)=0$.

> En el ejemplo anterior:
> $f(x)$ tiene un máximo en $x=-\sqrt{12}$ $f(-\sqrt{12})=-3\sqrt{3}$ en el punto $\left(-\sqrt{12},-3\sqrt{3}\right)$
> $f(x)$ tiene un mínimo en $x=\sqrt{12}$ $f(\sqrt{12})=3\sqrt{3}$ en el punto $\left(\sqrt{12},3\sqrt{3}\right)$

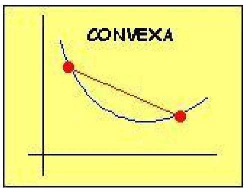
3.3.- Concavidad y Convexidad

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I, decimos que:

- La gráfica de la función es cóncava en un intervalo (a,b) si la gráfica de la función está por encima de cualquier tangente a la gráfica en dicho intervalo.
- La gráfica de la función es convexa en un intervalo (a,b) si la gráfica de la función está por debajo de cualquier tangente a la gráfica en dicho intervalo.

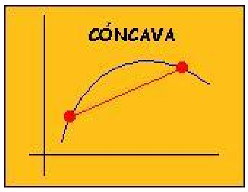
La función es convexa si:

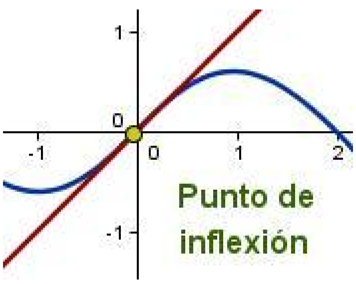
$$f''(x) \geq 0$$



La función f es cóncava si:

$$f''(x) \leq 0$$



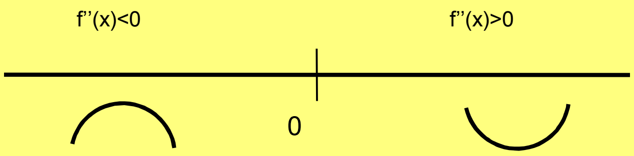


A los puntos donde una función cambia de cóncava a convexa o viceversa se les llama ***puntos de inflexión***, y en ellos ocurre que $f''(x)=0$.

En este ejemplo, la función tiene en x=0 un punto de inflexión.

En la función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$ Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$. Calculamos f''(x).

$f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ y la igualamos a cero $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=0$ ➔ $8x(x^2+12)=0$ ➔ x = 0



Por tanto, la función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$ Tiene un punto de inflexión en el punto (0,0)

3.4.- Teoremas Importantes

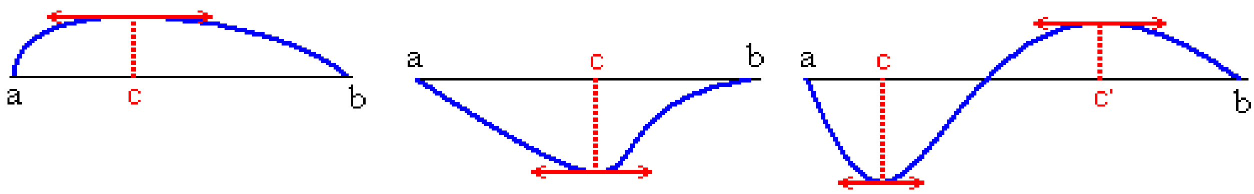
3.4.1.- Teorema de Rolle

Sea f una función real que cumple las condiciones:

- Está definida y es continua en [a,b]
- Es derivable en (a,b)
- f(a) = f(b)

entonces existe al menos un punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$

Geométricamente, quiere decir que si se cumplen todas las propiedades, entonces la curva de f tiene en c una recta tangente que es paralela al eje OX.



***Ejemplo 3:* Comprobar que la función $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ cumple las condiciones de teorema de Rolle en el intervalo [-1,3] y que efectivamente verifica ese teorema.**

La función f(x) es una función polinómica y por tanto continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto continua en [-1,3], por ser polinómica es derivable en $\mathbb{R}$ y por tanto lo es también en (-1,3).

Calculamos f(-1)=2 y calculamos f(3)=2, por tanto cumple las tres propiedades del teorema de Rolle, entonces tiene que existir un c, del intervalo (-1,3) tal que f'(C)=0.

Calculamos f'(x)=-2x+2 y la igualamos a 0. ➔ x=1. Entonces en el punto x=1, la tangente a la curva es paralela al eje OX.

3.4.2.- Teorema del Valor Medio de Lagrange

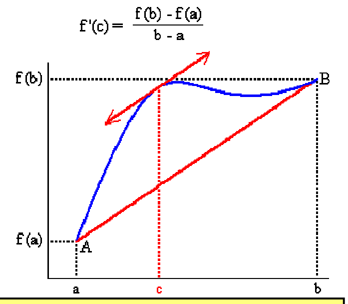
Sea f una función real que cumple las condiciones:

- Es continua en [a,b]

- Es derivable en (a,b)

Entonces:

existe al menos un punto $c \in \left]a,b\right[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Geométricamente, el teorema del valor medio nos dice que entre los puntos a y b existe un punto c en el que existe una recta tangente a la curva que es paralela a la recta que une los puntos a y b.

Ejemplo 4: ***Aplicar el teorema del valor medio a la función*** $[0,1]\to\mathbb{R}$ ***, dada por f(x)=x(x-2). Halla el valor de C.***

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por ser polinómica, por tanto también lo será en [0,1].

Calculamos los valores de los extremos del intervalo; f(0)=0 y f(1)=-1.

Según el Teorema del Valor Medio, tiene que existir un nº $c\in\left]a,b\right[$ tal que $f(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=-1$.

Para hallar dicho c, como f'(c)=-1; derivamos f(x), y su derivada la igualamos a dicho valor:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-1 \\ f'(c)=2c-2 \end{array}\right\} \to 2c-2=-1 \quad \to \quad c=\frac{1}{2}$$

3.4.3.- Teorema de Cauchy

Si f y g son funciones que cumplen las siguientes condiciones:

- Están definidas y son continuas en [a,b]
- Son derivables en (a,b)
- g(a) ≠ g(b)
- g'(x) no se anula en ningún punto de (a,b)

entonces, existe al menos un punto $c\in\left]a,b\right[$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Ejemplo 5: ***¿Se puede aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$ en el intervalo [-1,1]?.***

Ambas funciones son continuas en [-1,1] y derivables en (-1,1), y tenemos que g(-1)=-1 no es igual a g(1)=1.

Calculamos $g'(x)= 3x^2$, pero vemos que se anula en x=0, por tanto no podemos aplicar Cauchy.

3.5.- Cálculo de Límites: Regla de L'Hopital

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones f y g son derivables en un entorno del punto a.
- ✓ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a} g(x)$
- ✓ Existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Si f'(a)=g'(a)=0, siendo las funciones f'(x) y g'(x) derivables en a, se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, y así sucesivamente.

Ejemplo 6: Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{senx - x}{tgx - x}$

Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, como ambas funciones son derivables en R, y además son nulas en 0, podemos aplicar la Regla de L`Hopital, de forma que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx - x}{tgx - x} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 + tg^2 x - 1} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-senx}{2tgx\cdot(1+tg^2x)} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2(1+tg^2x) + 6tg^2x\cdot(1+tg^2x)} = \frac{-1}{2}$$

Para aplicar la regla de L'Hôpital hay que tener un límite de la forma $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde a puede ser un número o infinito, y aparecer las indeterminaciones: $\frac{0}{0}$ *ó* $\frac{\infty}{\infty}$

En las otras indeterminaciones podemos utilizar L'Hopital siempre y cuando seamos capaces de transformar una indeterminación 0·∞ y ∞-∞ en otra tipo 0/0 ó ∞/∞ .

3.5.1.- Indeterminación 0·∞

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ entonces: $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$, que se puede resolver con la regla de L'Hôpital.

3.5.2.- Indeterminación ∞-∞

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty\ ; \quad \text{entonces } \lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \infty - \infty$$

Si multiplicamos y dividimos por f(x).g(x) y operamos un poco, podemos llegar a una expresión que se puede resolver con la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to a}\left([f(x)-g(x)]\cdot\frac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)\cdot g(x)}\right) = \lim_{x\to a}\left([f(x)-g(x)]\cdot\frac{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f(x)}{f(x)\cdot g(x)} - \frac{f(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

Ejemplo 7: Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right)$

Este límite es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, operando un poco llegamos a una expresión en la que si podemos aplicar la Regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)-(e^x-e)}{(x-1)(e^x-e)}\right) = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-e^x}{e^x(x-1)+(e^x-e)}\right) = \frac{1-e}{0} = \infty$$

3.5.3.- Indeterminaciones 0^0, ∞^0 y 1^∞

Para estas, aplicaremos logaritmos: $A^B = e^{B\ln A}$, de modo que las tres indeterminaciones se reducen a formas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, que resolveremos mediante la regla de L'Hôpital.

3.6.- Optimización de Funciones

Los problemas de optimización son una de las aplicaciones más inmediatas e interesantes del cálculo de derivadas. El problema es determinar los extremos relativos (máximos ó mínimos) de una función.

Procedimiento a la hora de plantear un problema:

a) Expresión de la magnitud que se desea optimizar. (Por ejemplo el área)

b) Si la expresión a optimizar tiene más de una variable, relacionarlas mediante las condiciones del enunciado.

c) Sustituir en la primera expresión, de forma que esta solo dependa de una variable, y esta será la función a optimizar f(a).

d) Imponer la condición de extremo relativo, esto es, primera derivada igual a cero y despejar la variable a. {f'(a)=0 y calcular valores de a}.

e) Mediante la segunda derivada comprobar si el extremo es máximo o mínimo:

$$Si\ f''(a)\begin{cases} > 0 \rightarrow \text{ a es mínimo} \\ > 0 \rightarrow \text{a es máximo} \end{cases}$$

f) Calcular el resto de variables y el valor de la función optimizada.

Ejemplo 8: **Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.**

La superficie del triángulo se calcula: $S = x \cdot y$.

Al tener dos triángulos semejantes se cumple que: $\frac{x}{10} = \frac{15-y}{15}$, de donde: $x = \frac{2(15-y)}{3}$

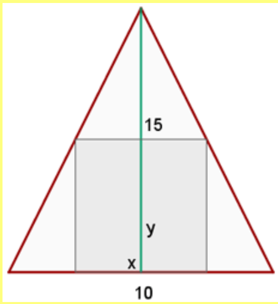
Sustituimos en la expresión de S, y tenemos: $S = \frac{2(15-y)}{3} \cdot y = \frac{2}{3}\left(15y - y^2\right)$

Derivamos: $S' = \frac{2}{3}\left(15-2y\right)$ e igualamos a cero: $S' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(15-2y\right) = 0$

De donde obtenemos: $y = \frac{15}{2}$ y de $x = \frac{2(15-y)}{3}$, obtenemos el valor de x: $x = 5$

Para ver si es máximo o mínimo, calculamos la segunda derivada: $y'' = \frac{2}{3}\left(-2\right) = \frac{-4}{3} < 0$.

Por tanto para que el área sea máxima, ha de ocurrir que $x = 5$ e $y = \frac{15}{2}$



3.7.- Ejercicios Resueltos

1.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (x-1)e^x$

El dominio de definición de esta función es todo R.
Calculamos la derivada de la función:
$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x(x+1-1) = xe^x$
Igualamos a cero, y calculamos los posibles puntos de cambio monotonía.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	Min	↗

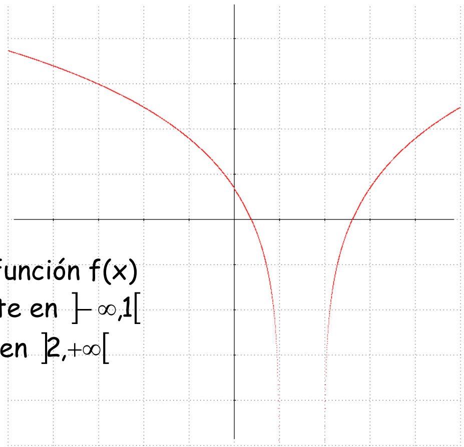
Por tanto la función f(x)
es decreciente en $]-\infty,0]$
es creciente en $[0,+\infty[$

2.- Hallar el conjunto de definición de la función $f(x)=\ln[(x-1)\cdot(x-2)]$

El conjunto definición son los valores de la variable independiente x, para los que la variable independiente f(x) está bien definida. En este caso los valores que hacen que (x-1)(x-2)>0.

Por tanto (x-1)>0 y (x-2)>0, de donde x > 2
Y (x-1)<0 y (x-2)<0 ➔ x < 1

Por lo tanto: Dom(f)= $]-\infty,1[\,U\,]2,+\infty[$



Para los intervalos de crecimiento, calculamos su derivada:

$f'(x)=\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ $\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'(x)	-	A.V.	0	A.V.	+
f(x)	↘	A.V.	No Definida	A.V.	↗

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $]-\infty,1[$
es creciente en $]2,+\infty[$

3.- Demostrar que la ecuación $x^3-36x+10=0$ ***no puede tener dos raíces reales en el intervalo (-1,2).***

Definimos la función $f(x)=x^3-36x+10$, como es polinómica su dominio de definición es todo R.
Calculamos su derivada: $f'(x)=3x^2-36$ y la igualamos a cero:

$$f'(x)=3x^2-36=0 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$$

Estos son los posibles puntos donde la derivada cambia de signo, (y donde la función f(x) cambiaría su monotonía) y ninguno de ellos se encuentra dentro del intervalo (-1,2). Por tanto la función f no cambia su monotonía en este intervalo.
Veamos cómo es la derivada en el 0 por ejemplo. Vemos que f'(0)=-36, por tanto la función es decreciente en este intervalo.

Entonces la ecuación $x^3-36x+10=0$ en el intervalo (-1,2) solo puede tener una solución, porque su monotonía no cambia, y solo podría cortar con el eje OX en un punto.

4.- Demostrar que la ecuación $x^5+x-1=0$ ***tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1.***

Como en el caso anterior, definimos una función $f(x)=x^5+x-1$ en el intervalo [0,1], que es continua por ser polinómica.
Calculamos su derivada e igualamos a cero: $f'(x)=5x^4+1$, como esta derivada es siempre positiva, la función es siempre creciente. Vamos a ver si corta al eje.

Aplicamos el Teorema de Bolzano en el intervalo [0,1], Como f es continua en [0,1] y como f(0)=-1 y f(1)=1, la función cambia de signo en este intervalo, entonces según Bolzano: $\exists c\in(0,1)/f(c)=0$

Por tanto esta función solo corta al eje X una vez por ser siempre creciente, y el punto de corte c está en el intervalo (0,1).

Así que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene solo una solución real entre 0 y 1.

5.- Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

El dominio de definición de esta función es $\mathbb{R} - \{1\}$, calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Esta derivada es cero:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	No definida	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘	A.V.	↘	Min	↗

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[0,1[\cup]1,2]$
es creciente en $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$
Máximo Relativo (0,0)
Mínimo Relativo (2,4)

6.- Encontrar las funciones polinómicas de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya segunda derivada sea x-1. ¿Cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, \frac{-1}{3}\right)$.

Calculamos la primera derivada de f(x): $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Y después calculamos la segunda derivada: $f'(x) = 6ax + 2b$
Igualamos ambas:

$$6ax + 2b = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 6a = 1 \rightarrow a = \dfrac{1}{6} \\ 2b = -1 \rightarrow b = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Así que las funciones cuya segunda derivada es x-1 son funciones de la forma: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$

Si además tienen un mínimo en el $\left(4, \frac{-1}{3}\right)$, ocurre que $f(4) = -\frac{1}{3}$ y que $f'(4) = 0$.

Por tanto:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ➔ $f'(4) = 48a + 8b + c = 0$ ➔ $f'(4) = \frac{48}{6} - \frac{8}{2} + c = 0$ ➔ C=-4

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ➔ $f(4) = \frac{64}{6} - \frac{16}{2} - 16 + d = \frac{-1}{3}$ ➔ $d = -11 + 8 + 16$ ➔ d=13

Por tanto la función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya derivada segunda sea x-1 y que además tienen un mínimo en $\left(4, \frac{-1}{3}\right)$ es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{6}x^3 + -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 13}$$

7.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, Hallar los coeficientes a,b,c,d sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es y=-3x+3 y que la función presenta un extremum en el punto de abscisa x=0.

Si (1,0) es punto de inflexión: $\begin{cases} f''(1)=0 \\ f(1)=0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} f''(x)=6ax\ +2b \Rightarrow f'(1)=6a+2b=0 \\ f(1)=a+b+c+d=0 \end{cases}$

Si presenta un extremun en x=0 ➔ f'(0)=0 ➔ $f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f(1)=c=0$

Si en x=1 tiene una tangente de pendiente m=-3 ➔ f'(1)=-3 ➔ $f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(1)=3a+2b+c=-3$

Con todas estas ecuaciones, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} 6a+2b=0 \\ a+b+c+d=0 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=-3 \end{cases}$$

De (1)-(3) obtenemos que: 3a=3 ➔ a=1

Sustituyendo en (1) obtenemos b=-3

Y de (2): d=3-1=2

Por tanto la función es $f(x)=x^3-3x^2+2$

8.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hallar los coeficientes a,b,c,d, sabiendo que la función tiene un máximo en (0,3) un mínimo en x=2 y un punto de inflexión en (1,1).

Del máximo en (0,3) $\begin{cases} f(0)=3 \\ f'(0)=0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} f(0)=d=3 \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(0)=c=0 \end{cases}$

Del mínimo en x=2 ➔ $f'(2)=0$ ➔ $f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(2)=6a+4b+c=2$

Del punto de inflexión en (1,1) ➔ $\begin{cases} f(1)=1 \\ f''(1)=0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} f(1)=a+b+c+d=1 \\ f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(1)=6a+2b=0 \end{cases}$

Con todas estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 6a+2b=0 \\ c=0 \\ d=3 \end{cases}$$

De donde:

(2)-2(1)➔ 4a-6=-2 ➔ a=1

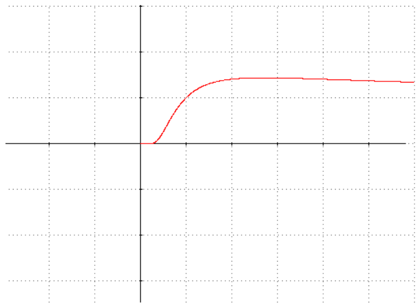
Y de (2) b=-3

Por tanto la función pedida es: $f(x)=x^3-3x^2+3$

9.- Dada la función definida en $]0,+\infty[$ $f(x)=\sqrt[x]{x}$, hallar sus máximos y mínimos.

Calculamos su derivada, como f(x) es una función elevada a otra, aplicamos la derivación logarítmica.

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$$



Aplicamos logaritmos

$$\ln f(x)=\ln x^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x$$

Derivamos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$$

Despejamos:

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

f'(x)=0 ↔ (1-lnx)=0 ➔ lnx=1 ➔ x=e

	0	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘

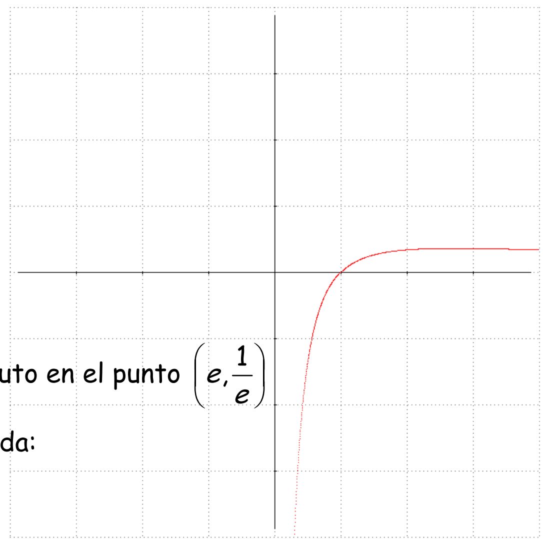
Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[e,+\infty[$
es creciente en $]0,e]$

f presenta un máximo Absoluto en el punto $\left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$

10.- Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

El dominio de esta función es $]0,+\infty[$
Calculamos su derivada:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2} \rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$$



	0	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[e,+\infty[$
es creciente en $]0,e]$

f presenta un máximo Absoluto en el punto $\left(e,\frac{1}{e}\right)$

Para estudiar la concavidad y convexidad utilizamos la 2ª derivada:

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{x(-1-2+2\ln x)}{x^3}=\frac{2\ln x-3}{x^3} \rightarrow f''(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$

	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
f(x)	$\cup$	P.Inflexión	$\cap$

Por tanto la función f(x)
es convexa en $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right[$

es cóncava en $\left]0,e^{\frac{3}{2}}\right]$

f presenta un punto de inflexión en el punto $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

11.- Estudiar la concavidad de la función: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

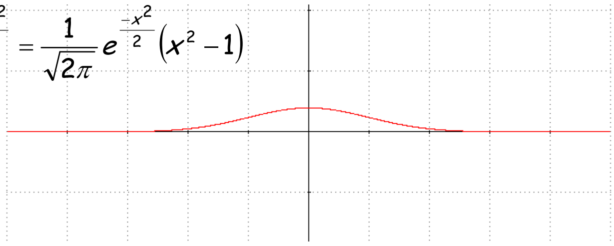
El dominio de esta función es toda la recta real. $Dom(f)=\mathbb{R}$

Calculamos su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Ahora calculamos su segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^2-1\right)$$



$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		$\cup$	P.Inflexión	$\cap$	P.Inflexión	$\cup$	

Por tanto la función es convexa en $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

Y es cóncava en [-1,1]

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$

12.- Consideremos la función la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$

a) Determina sus máximos, mínimos y puntos de inflexión

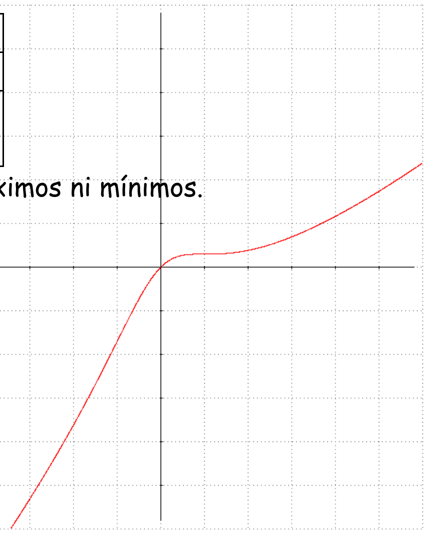
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

El dominio de definición de esta función es la recta real. $Dom(f)=\mathbb{R}$

Calculamos su derivada:

$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$ ➔ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

	$-\infty$		+1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)		↗		↗	



Como $f'(x)\geq 0$, la función es siempre creciente, por tanto no tiene máximos ni mínimos.

Para ver sus puntos de inflexión calculamos la 2ª derivada:

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

Por tanto la función presenta sendos puntos de inflexión en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.

13.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x+sen3x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+3\cos 3x}=\frac{0}{4}=0$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot senx}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos x+senx(senx)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x+sen^2x}{2x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1-2\cos^2 x}{2x}\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{senx+2sen2x}{2}=0$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-senx}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+tg^2x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2tgx(1+tg^2x)}{senx}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(1+tg^2x)^2+2tgx(2tgx(1+tg^2x))}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+2tg^4x+2tg^2x+4tg^2x+4tg^4x}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\cos x-senx+x-1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+xe^x}{-senx-\cos x+1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x}{-\cos x+senx}=\frac{2}{-1}=-2$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{senx}-x-1}{2x^2-x^3}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^{senx}-1}{4x-3x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-senx\cdot e^{senx}+\cos^2 x\cdot e^{senx}}{4-6x}=\frac{1}{4}$

g) $\lim_{x\to 0}tgx\cdot\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{tgx}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-(1+tg^2x)}{tg^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg^2x}{x(1+tg^2x)}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-2tgx(1+tg^2x)}{(1+tg^2x)+x(2tgx(1+tg^2x))}=\frac{0}{1}=0$

h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-senx}{xsenx}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{senx+x\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{\cos x+\cos x-xsenx}=\frac{0}{2}=0$

i) $\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{senx}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-senx}{xsenx}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+xsenx-\cos x}{senx+x\cos x}=$

$\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{\cos x+\cos x-xsenx}=\frac{0}{2}=0$

j) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{e(x-1)-e^x+e}{(e^x-1)\cdot(x-1)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{e-e^x}{e^x(x-1)+(e^x-1)}=$

$=\lim_{x\to 1}\frac{e-e^x}{xe^x-1}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-e^x}{e^x+xe^x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=\frac{-1}{2}$