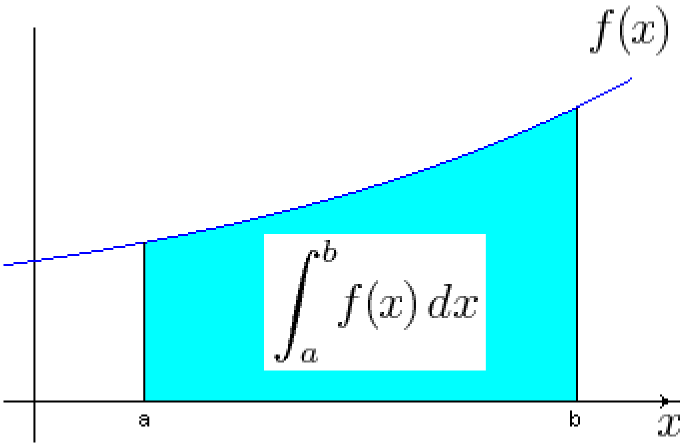
Tema 5

Integración de Funciones



Raúl González Medina

I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 5

5.0.- Introducción

El ***Cálculo Integral***, que es una de las más importantes y complejas partes del Análisis Matemático tiene su origen en ***el estudio del área de figuras planas***. Las fórmulas para el cálculo de las áreas de triángulos y rectángulos eran ya conocidas en la Grecia Clásica, así como la de los polígonos regulares previa descomposición en triángulos.

El problema se plantea a la hora de calcular áreas de figuras limitadas por líneas curvas. ***Euclides*** (300 a.C.) sigue los trabajos de Eudoxio (400-355 a.C.) para calcular el área del círculo por el método de exhaución, es decir, inscribiendo en él sucesivamente polígonos con más lados. La suma de estas áreas se aproximaba cada vez más al área del círculo, estando en el "límite" el valor exacto.

Arquímedes (287-212 a.C.) halló también el área encerrada por un arco de parábola y la cuerda correspondiente, cosa realmente difícil en aquel tiempo, ya que no se disponía del álgebra formalizada ni de la geometría analítica. El método utilizado era el de agotamiento, esto es, se encaja el área entre dos polígonos, uno inscrito en la región y otro circunscrito a la región.

Desde los griegos hasta el siglo XVII poco se hizo con relación al cálculo de áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies cerradas. ***Pascal, Fermat y Leibniz*** comienzan un estudio engarzado con el cálculo diferencial; así pues, aunque históricamente se estudian los primeros elementos del cálculo integral antes que el diferencial, en el siglo XVII se estudian y configuran a la par, relacionándose por medio de muchos e importantes resultados.

En esta primera de las dos unidades que dedicaremos al cálculo integral, nos centraremos en el ***Cálculo de Primitivas***, herramienta necesaria para la segunda unidad, en la que aplicaremos lo visto en esta para el cálculo de áreas.

5.1.- Concepto de Primitiva de una función

Como hemos visto hasta ahora, la derivación es una técnica a partir de la cual dada una función cualquiera f(x) podemos calcular su derivada f'(x). Pues bien, ahora vamos a trabajar el proceso contrario, en el que conocida la derivada de una función f'(x), tratamos de encontrar la función de la que proviene, *primitiva,* f(x).

Función		***Derivada***
$f(x)=x^2+2$	Derivación $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ Integración	$f'(x)=2x$

Sean f y F dos funciones definidas en un mismo intervalo de definición I, decimos que F(x) es la primitiva de f(x) en el intervalo I si ocurre que: $F'(x)=f(x)$

F(x) es la función primitiva de f(x) $\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas, que se diferencian entre sí en una constante.

Ejemplo 1: La función f(x) = 2x tiene por primitivas $F(x)=\begin{cases} x^2+7 \\ x^2 \\ x^2-4 \end{cases}$ en general x^2+K

Se llama ***integral indefinida*** de una función f(x) al conjunto formado por todas sus primitivas, y se representa por:

$$\boxed{\int f(x)\cdot dx = F(x) + C}$$

Se lee ***integral de f(x) diferencial de x***, y donde C es un número real cualquiera llamado *constante de integración.*

5.2.- Propiedades de las integrales indefinidas

Como la integral es la función inversa de la derivada, cumple las mismas propiedades que ella:

- La integral de la suma (diferencia) de dos funciones es igual a la suma (diferencia) de las integrales de dichas funciones.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- La integral del producto de una función por una constante k, es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot \int f(x)dx$$

(un factor constante puede sacarse fuera de la integral)

5.3.- Tabla de Primitivas

Como ya hemos podido comprobar en lo visto hasta ahora en la unidad, el problema de determinar la integral indefinida de una función se reduce al de hallar una primitiva, es decir, al de calcular una función cuya derivada sea la función a integrar. Antes de empezar con los métodos y, a modo de curiosidad, debemos saber que *no todas las integrales se pueden expresar como una función elemental*, sino como producto o cociente de otras.

Realmente son pocas las integrales que se pueden abordar con un único método. Por el contrario, *es muy normal que debamos combinar varios de los métodos* que veremos en lo que resta de unidad para integrar una función. Todos los métodos que abordaremos tienen como objetivo final transformar la integral inicial en otras hasta llegar finalmente a integrales inmediatas. Por ello, el primer método de integración y base de todos los demás de los que veremos a continuación, es el de integración inmediata, esto es utilizar "al revés" la tabla de derivadas de las funciones elementales vista en la unidad anterior y que resumimos a continuación:

Tipos	**Formas**	
	Simple	**Compuesta**
Potencial $(a \neq -1)$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f'\cdot f^a dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)}$ $\int a^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = senx$	$\int \cos f\cdot f' dx = senf$
Coseno	$\int senxdx = -\cos x$	$\int senf\cdot f' dx = -\cos f$

Tangente	$\int \sec^2 x dx = tgx$ $\int (1+tg^2 x)dx = tgx$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx$	$\int \sec^2(f)\cdot f'dx = tg(f)$ $\int [1+tg^2(f)]\cdot f'dx = tg(f)$ $\int \frac{f'}{\cos^2(f)}dx = tg(f)$
Cotangente	$\int cosec^2 x dx = -cotgx$ $\int (1+cotg^2 x)dx = -cotgx$ $\int \frac{1}{sen^2 x}dx = -cotgx$	$\int cosec^2(f)\cdot f'dx = -cotg(f)$ $\int [1+cotg^2(f)]\cdot f'dx = -cotg(f)$ $\int \frac{f'}{Sen^2(f)}dx = -cotg(f)$
Arco Seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arcsen(x) = -Arc\cos(x)$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = Arcsen\left(\frac{x}{a}\right) = -Arc\cos\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = Arcsen(f) = -Arc\cos(f)$ $\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}dx = Arcsen\left(\frac{f}{a}\right) = -Arc\cos\left(\frac{f}{a}\right)$
Arco Tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x)$ $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arctg(f)$ $\int \frac{f'}{a^2+f^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{f}{a}\right)$
Neperiano – Arco tangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx =$ neperiano + arco tangente $M\neq 0$, ax^2+bx+c irreducible	

5.4.- Técnicas de integración

Antes de comenzar con todos los métodos de integración, conviene recordar (porque las necesitaremos en muchas integrales), además de las propiedades de los logaritmos vistas en el curso anterior, las principales relaciones trigonométricas que resumimos en la tabla de la derecha:

***Nota:** En muchos casos de integrales trigonométricas, resulta muy útil reducir los exponentes pares. Esto se consigue despejando en la fórmula del coseno del ángulo doble, obteniéndose las relaciones:*

a) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$	$1+\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$	
$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cdot\cos y + \cos x\cdot\operatorname{sen} y$		$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x\cdot\cos y - \cos x\cdot\operatorname{sen} y$	
$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y$		$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b$	
$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b}$		$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$	
$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cdot\cos x$		$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$		$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$	
$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$		$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$	
$\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$		$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$	
$\operatorname{sen} x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y))$		$\cos x\cdot\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y))$	

5.4.1.- Integración por Descomposición

Consiste en descomponer una función f(x) de la forma: $f_1(x)+f_2(x)+\dots\dots\dots+f_n(x)$, de forma que descomponemos una integral en muchas que se resuelven más fácilmente.

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots\dots\dots\dots + \int f_n(x)dx$$

Aunque la aplicación de las propiedades de linealidad de la integral vistas en el apartado 5.2 no es realmente un método de integración considerado como tal, es uno de los métodos más utilizados o combinados con otros, proporcionándonos, en muchos casos, soluciones sencillas a determinadas integrales.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2: Calcular $\int (senx + \cos x)^2 dx$

Utilizando este método:
$$\int (senx + \cos x)^2 dx = \int (sen^2 x + \cos^2 x + 2senx\cos x)dx = \int (sen^2 x + \cos^2 x)dx + \int 2senx\cos x dx = \int 1dx + \int sen2x\cdot dx = \int 1dx + \frac{1}{2}\int 2\cdot sen2x\cdot dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Otros ejemplos de este método son:

$$a)\int tg^2 x dx = \underbrace{\int \left(1 + tg^2 x - 1\right) dx}_{\text{sumamos y restamos 1}} = \int \left(1 + tg^2 x\right) dx - \int 1dx = tgx - x + C$$

$$b)\int \frac{dx}{sen^2 x\cdot\cos^2 x} = \overbrace{\int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x\cdot\cos^2 x}dx}^{\text{utilizamos } 1 = sen^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{sen^2 x} = tgx - cotgx + C$$

$$c)\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1 + x^2 - 1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - arctgx + C$$

$$d)\int \frac{1}{7\sqrt{x}}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \underbrace{\frac{1}{7}\int \frac{2}{2\sqrt{x}}dx}_{\text{multiplicamos y dividimos por 2}} = \frac{2}{7}\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{7}\sqrt{x} + c$$

$$e)\int \cos^2 x dx = \underbrace{\int \frac{1 + \cos 2x}{2}dx}_{\text{cambio trigonométrico}} = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \underbrace{\frac{1}{2}\int 2\cos 2x dx}_{\text{multiplico y divido por 2}}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen2x + C$$

Como se puede ver en el ejemplo, la estrategia de sumar y restar una misma cantidad, al igual que la de multiplicar y dividir por una misma cantidad, resulta bastante útil en determinados casos y ayuda a simplificar el cálculo de determinadas integrales.

5.4.2.- Integración por simple inspección

Dos sencillas fórmulas nos capacitan para hallar primitivas de forma casi inmediata. La primera es, ayudándonos de la regla de la cadena, y de la tabla de derivadas compuestas:

$$\int g'(x)\cdot[g(x)]^r dx = \frac{1}{r+1}[g(x)]^{r+1} + K \quad \text{con } r \neq -1$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

Utilizando la fórmula anterior: $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + K$

La segunda fórmula de integración rápida es consecuencia de la derivada de una función logarítmica y de la regla de la cadena:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + K$$

Ejemplo 4: Calcular $\int \frac{x^2}{x^3 - 5}dx$

Utilizando la fórmula anterior:

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3 - 5}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 5| + K$$

5.4.3.- El método de sustitución (ó cambio de variable)

Como su nombre indica, este método (también consecuencia de la regla de la cadena) consiste en introducir una variable t, que sustituye a una expresión apropiada en función de x, de forma que la integral se transforme en otra de variable t, más fácil de integrar.

se trata de sustituir la variable ***x*** por otra variable ***t*** mediante una nueva función $x = g(t)$ para transformar el integrando $f(x)\cdot dx$ en otro más sencillo.

$$\int f(x)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int g(t)\cdot dt \quad (\text{Más fácil})$$

Este proceso se hace en tres pasos.

a) Hacemos el cambio de variable: *Sustitución de la variable x por la variable t.*

- Forma directa

Se hace $x = g(t)$, de donde $dx = g'(t)\cdot dt$. Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right]\cdot g'(t)\cdot dt$$

- Forma recíproca

Se hace $t = u(x)$, de donde $dt = u'(x)\cdot dx$, se despejan a continuación *x* y *dx*, y se sustituyen en el integrando.

b) Integramos de la nueva función en t

Si la función en t es más sencilla que la dada, se procede a su integral. En caso contrario debemos buscar otra sustitución más adecuada.

c) Deshacemos el cambio: *Sustitución de la variable t por* ***x.***

Una vez calculada la integral en función de t, deshacemos el cambio de variable para dar el resultado en función de la variable original x.

Ejemplo 5: Calcular $\int (x+3)^{11}dx$.

Hacemos: $(x+3)=u$, de aquí, $x = u-3 \rightarrow dx = du$, sustituyendo:

$$\int (x+3)^{11}dx = \int u^{11}du = \frac{1}{12}u^{12}+K = \frac{1}{12}(x+3)^{11}+K$$

Este método se suele utilizar en funciones que tienen raíces (Radicalarias).

Ejemplo 6: a) Calcular $\int x\sqrt{1-x}dx$.

Hacemos: $(1-x)=u$, de aquí, $x = 1-u \rightarrow dx = -du$, sustituyendo:

$$\int x\sqrt{1-x}dx = \int (1-u)\cdot u^{\frac{1}{2}}(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}du = -\int u^{\frac{1}{2}}du + \int u^{\frac{5}{2}}du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + K = (1-x)\sqrt{1-x}\cdot\left(\frac{2}{5}(1-x)-\frac{2}{3}\right) =$$

$$= (1-x)\sqrt{1-x}\left(\frac{-6x-4}{15}\right)+K$$

b) Calcular $\int e^{3x+1}dx = \left\| \begin{matrix} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \rightarrow dx = \dfrac{dt}{3} \end{matrix} \right\| = \int e^t\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x+1}+C$

5.4.3.1.- Algunos cambios de variable frecuentes

- Para calcular una integral de tipo $\int sen^n x \cdot \cos^m x \, dx$
  - Si n es impar, aplicamos el cambio de variable t=cosx.
  - Si n es par y m es impar, aplicamos el cambio de variable t=senx.
  - Si n y m son pares, aplicamos las fórmulas trigonométricas vistas al principio del tema:

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- Para calcular una integral de tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, aplicamos el cambio de variable $\frac{x}{a} = sen\, t$

+ Ejemplos:

$$a) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx = \left[\begin{matrix} 1+2x = t^3 & x = \frac{t^3-1}{2} \\ 2dx = 3t^2 dt & dx = \frac{3t^2 dt}{2}\end{matrix}\right] = \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2}dt = \frac{3}{2}\int\left(\frac{t^6 - 2t^3 + 1}{4}\right) \cdot t \cdot dt = \frac{3}{8}\int\left(t^7 - 2t^4 + t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right) + C = \left[\begin{matrix}\text{Desacemos} \\ \text{el cambio}\end{matrix}\right] = \frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 - \frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 + C$$

$$b) \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left[\begin{matrix} t = tgx & dt = (1+tg^2 x)dx = (1+t^2)dx & \rightarrow & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & & & \end{matrix}\right] = * \left(\begin{matrix}\text{Veamos a parte} \\ \text{el desarrollo de} \\ \cos x\end{matrix}\right)$$

$$\boxed{t = \frac{senx}{\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \leftrightarrow t^2 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \leftrightarrow t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1} \leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{t^2+1}}}$$

$$* = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left[\begin{matrix}\text{Deshacemos} \\ \text{el cambio}\end{matrix}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} Arctg\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$c) \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \left[\begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt\end{matrix}\right] = \int \frac{1-t^3}{t^2} 6t^5 dt = 6\int\left(1-t^3\right)t^3 dt = 6\int\left(t^3 - t^6\right)dt = \frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{7}t^7 + c = \left[\begin{matrix}\text{Deshacemos} \\ \text{el cambio}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C$$

5.4.4.- Integración por partes

Este método se suele utilizar cuando tenemos producto de funciones, y lo que hacemos es separar la integral en dos partes, mediante la fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

La mecánica que se sigue para integrar con este método es la siguiente: Si tenemos que calcular $\int f(x) \cdot g(x) dx$, hacemos $u = f(x)$ y $dv = g(x)dx$; calculamos $du = f'(x)$ y $v = \int g(x) \cdot dx$, y después sustituimos cada una de ellas en la fórmula de integración por partes. $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Para recordar la fórmula de la integración por partes, existe una regla nemotécnica: ***"un dia ví una vaca vestida de uniforme"***

- A la hora de elegir u y dv, hemos de tener en cuenta dos cosas:
  - ✓ La parte escogida como dv ha de ser fácil de integrar.
  - ✓ $\int v\cdot du$ no debe ser más complicada de integrar que $\int u\cdot dv$

A = Funciones Arco (Arcsen, Arccos, Arctg…)
L= Funciones logarítmicas. ($\log_a$, log, ln)
P = Funciones polinómicas.
E = Funciones exponenciales (a^x, e^x)
S = Funciones trigonométricas (Sen, Cos, tg…)

Para facilitar las cosas a la hora de elegir u, utilizaremos la regla ALPES.

El orden de preferencia al elegir quien es la función $\boldsymbol{u}$ es de izquierda a derecha:

$$A > L > P > E > S$$

Ejemplo 6: Calcular $\int x^n \cdot \ln x dx$

Hacemos $\quad u=\ln x \quad dv = x^n$

$$du=\frac{1}{x} \qquad v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Aplicamos la regla de integración por partes:

$$\int x^n\cdot \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)+K$$

A veces será necesario repetir este método varias veces. ¿Cuándo?, Si tenemos:

- Producto de un polinomio por una exponencial. ($x^n e^x$)
- Producto de un polinomio por seno o coseno. ($x^n\cos x$, $x^n \operatorname{sen} x$)
- Producto de un polinomio por ln. ($x^n\cdot\ln x$)
- Producto de una exponencial por sen ó cos ($e^x \operatorname{sen} x$, $e^x\cos x$)
- Las funciones circulares inversas.

Además de esto pueden aparecer ***casos cíclicos***, es decir, casos en los que después de aplicar éste método varias veces, vuelve a obtenerse la integral original. En estos casos se puede despejar de forma sencilla la integral y obtenerla fácilmente.

Ejemplo 7: Calcular $\int e^x \cdot senx\ dx$

$$\int e^x senx\ dx = \begin{bmatrix} u = senx & du=\cos x \\ dv=e^x & v=e^x\end{bmatrix} = e^x senx - \int e^x \cos x\ dx = \begin{bmatrix} u=\cos x & du=-senx \\ dv=e^x & v=e^x\end{bmatrix} = e^x senx - \left[e^x\cos x - \int e^x(-senx)\right]=$$

$$= e^x senx - e^x\cos x - \int e^x senx\ dx$$

Llamando:

$$I=\int e^x\cdot senx\ dx$$

Tenemos:

$$I = e^x senx - e^x \cos x - I$$

Y agrupando tenemos:

$$2I = e^x senx - e^x\cos x \quad\rightarrow\quad I=\frac{e^x\left(senx-\cos x\right)}{2}+C$$

Y por tanto:

$$\int e^x\cdot senx\ dx = \frac{e^x\left(senx-\cos x\right)}{2}+C$$

5.4.5.- Integración de funciones Racionales

En los apartados anteriores ya se han integrado funciones racionales, por ejemplo:

$$\int \frac{g'(x)}{[g(x)]^r}dx = \int g'(x)\cdot[g(x)]^{-r}dx = \frac{1}{-r+1}[g(x)]^{-r+1} + C \qquad con \qquad r \neq 1$$

Y para r=1

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + K$$

También nos acordamos de:

$$\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arctg(f) \qquad y\ de \qquad \int \frac{f'}{a^2+f^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{f}{a}\right)$$

Pero existen casos en los que no podemos utilizar ninguna de las formas anteriores.

Para el cálculo de integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde P(x) y Q(x) son polinomios enteros en x con coeficientes reales, lo que haremos es descomponer el polinomio Q(x) en suma de fracciones simples de la forma (ax + b).

- ***Si grado P(x) ≥ grado Q(x),*** antes de descomponer, efectuamos la división euclidea:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- ***Si grado P(x) < grado Q(x),*** no es necesario hacer división euclidea y directamente pasamos a factorizar el polinomio Q(x).

Factorizamos el polinomio Q(x), y una vez descompuesto Q(x) en sus raíces, se pueden presentar varios casos:

5.4.5.1.- Caso I: Factores lineales distintos

A cada factor lineal $ax+b$ que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional propia le corresponde una sola fracción de la forma: $\frac{A}{ax+b}$, donde A es una constante que habrá que determinar.

Ejemplo 8: Calcular $\int \frac{dx}{x^2-4}$

Factorizamos el denominador $x^2-4=(x+2)(x-2)$

Lo descomponemos en fracciones algebraicas sencillas: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$

Calculamos las constantes A y B:

$$1 = A(x-2) + B(x+2) \qquad (1)$$
$$1 = (A+B)x + (2A-2B) \qquad (2)$$

a) Por comparación: A + B = 0 y 2A-2B=1

De donde:

$$A = \frac{1}{4} \qquad y \qquad B = \frac{-1}{4}$$

b) O directamente sustituyendo el valor de las raíces x=2 y x=-2 en la ecuación (1).

$$\begin{matrix} 1 = 4A \\ 1 = -4B \end{matrix} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad B = \frac{-1}{4}$$

Por cualquiera de los dos métodos, tenemos:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + K = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + K$$

5.4.5.2.- Caso II: Factores lineales repetidos

A cada factor $ax+b$ que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde A_i son constantes que habrá que determinar.

Ejemplo 9: Calcular $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$

Como el grado de arriba es mayor que el de abajo, primero hacemos la división euclídea:

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^3-x^2}$$

Factorizamos el denominador: $x^3-x^2 = x^2(x-1)$

Descomponemos en fracciones simples atendiendo a que unos son simples y otro doble: $\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

Calculamos las constantes A,B y C:

$$x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

Sustituyendo x=0 obtenemos:

1=-B → B=-1

Sustituyendo x=1, obtenemos:

2=C

Y sustituyendo x=2, (elegimos el 2 al azar), obtenemos: 3=2A+B+4C de donde calculamos A: → A=-2.

De forma que nos queda: $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx = \int x\cdot dx + 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x-1}$

E integrando :

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + K = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + K$$

5.4.5.3.- Caso III: Factores cuadráticos distintos

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional le corresponde una sola fracción simple de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Donde A y B son constantes a determinar.

Ejemplo 10: Calcular $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+3x^2+2}dx$

Factorizamos de denominador:

$$x^4+3x^2+2=(x^2+1)\cdot(x^2+2)$$

Descomponemos:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Calculamos las constantes A,B,C y D:

$$x^3+3x^2+2=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)$$

De donde A+C=1; B+D=1, 2A+C=1 y 2B+D=2, que resolviendo nos da: A=0, B=1, C=1 y D=0.

Por tanto:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+3x^2+2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{x^2+2}=arctgx+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+K$$

5.4.5.4.- Caso IV: Factores cuadráticos repetidos

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\dots\dots\dots\dots+\frac{A_3x+B_3}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}$$

Donde A_i y B_i son constantes a determinar:

Ejemplo 11: Calcular $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$

Descomponemos:

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$$

Calculamos las constantes A,B,C,D,E y F:

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)(x^2+2)^2+(Cx+D)(x^2+2)+Ex+F=$$
$$Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x-(4B+2D+F)$$

De donde A=1; B=-1, C=0 y D=0, E=4 y F=0.

Entonces:

$$\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx=\int\frac{x-1}{x^2+2}dx+4\int\frac{xdx}{(x^2+2)^3}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{(x^2+2)^2}+K$$

5.4.5.5.- Caso General

En el caso general, si en el denominador de una función racional aparecen raíces reales y complejas, lo descomponemos teniendo en cuenta que cada factor en el denominador de la forma $(x-a)^n$ da lugar a n fracciones simples del tipo $\frac{A}{(x-a)^l}$ l , con l = 1, 2, . . . , n y cada factor de la forma $(x^2+bx+c)^n$, con $b^2-4c<0$, da lugar a n fracciones simples del tipo $\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^l}$, con l = 1, 2, . . . , n.

5.5.- Ejercicios Resueltos

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1} + C$

b) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx = 2\int \frac{\ln x}{x} dx = 2\int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{\ln^2 x}{4} + C$

d) $\int sen^2 x \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{\cos 3x}{3} - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \cos 3x \right) dx =$

$= \int \frac{\cos 3x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(-x) + \cos(5x)}{2} \right) dx = \int \frac{\cos 3x}{2} dx - \int \frac{\cos(-x)}{4} dx + \int \frac{\cos 5x}{4} dx =$

$= \frac{sen(3x)}{6} + \frac{sen(5x)}{20} + \frac{sen(-x)}{4} = \frac{sen(3x)}{6} + \frac{sen(5x)}{20} - \frac{sen(x)}{4} + C$

e) $\int tgx dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx = -\int \frac{-senx}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

f) $\int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{3} arctg\left(\frac{x}{3} \right) + C$

g) $\int sen^3 x dx = \int senx(1-\cos^2 x) dx = \int senx dx - \int senx \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} arcsen(x^2) + C$

i) $\int \frac{x}{x^4+9} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x^2}{3} \right) + c$

j) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(e^{2x}+1\right) + C$

2.- Hallar la función F(x) tal que F(0)=2 y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e}{e^x+1}$

Calculamos la integral de $\int \frac{e}{e^x+1} dx = e \int \frac{1}{e^x+1} dx =$

Hacemos un cambio de variable $\left[e^x = t \quad \begin{matrix} e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{matrix} \right]$, por tanto la integral queda:

$$\int \frac{1}{t^2+t} dt = \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{B}{t+1} dt = \left[\begin{matrix} 1 = A(t+1) + Bt \\ si\ t = 0 \to 1 = A \\ si\ t = -1 \to 1 = -B \end{matrix} \right] = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left| \frac{t}{t+1} \right|$$

Deshacemos el cambio:

$\ln\left| \frac{e^x}{e^x+1} \right|$, y multiplicamos por e, de forma que:

$$\int \frac{e}{e^x+1} dx = e \int \frac{1}{e^x+1} dx = \ln\left| \frac{e^x}{e^x+1} \right|^e + C$$

Como F(0)=2;

$$e\ln\frac{1}{2}+C=2\Rightarrow C=2-e\ln\frac{1}{2}$$

De forma que:

$$\boxed{\int\frac{e}{e^x+1}dx=\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|^e+2-e\ln\frac{1}{2}}$$

3.- Determinar f(x) sabiendo que f'''(x)=24x; f''(0)=2, f'(0)=1 y f(0)=0.

$f''(x)=\int 24x\,dx=12x^2+C$ Como f''(0)=2, entonces C=2 ➔ $f''(x)=12x^2+2$

$f'(x)=\int(12x^2+2)dx=4x^3+2x+C'$, Como f'(0)=1, entonces C'=1 ➔ $f'(x)=4x^3+2x+1$

Y por último:

$f(x)=\int(4x^3+2x+1)dx=x^4+x^2+x+C''$, Como f(0)=0, ➔ C''=0 y $\boxed{f(x)=x^4+x^2+x}$

4.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int\frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario dividir.

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2+1}\to x^2-x+1=A(x^2+1)+B(x)$$

Si x=0 ➔ 1=A
Si x=1 ➔ 1=2A+B ➔ B=-1

Por tanto:

$$\int\frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=\ln|x|-arctg(x)+C$$

b) $\int\frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario hacer la división euclídea.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3\\ 1 & & 1 & 4 & 3\\ \hline & 1 & 4 & 3 & \lfloor 0\\ -3 & & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & \lfloor 0 & \end{array}$$

Sacamos las raíces de $x^3+3x^2-x-3=0$; Hacemos Ruffini:
Por tanto: $x^3+3x^2-x-3=(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-1)$

Descomponemos:

$$\frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+10x+5=A(x+1)\cdot(x+3)+B(x-1)\cdot(x+3)+C(x-1)\cdot(x+1)$$

Si x=1 ➔ 16=8A ➔ A=2
Si x=-1 ➔ -4=-4B ➔ B=1
Si x=-3 ➔ -16=8C ➔ C=-2

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-2}{x+3}dx = 2\ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x+3| + C$$

c) $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

En este caso, tenemos que el grado del numerador (arriba) es mayor que el grado del denominador (abajo), por tanto es necesario hacer la división euclídea.

$$\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} = (x-2) - \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Vamos a calcular primero:

$$\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Descomponemos el denominador en raíces:

$$x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}0\\2\\-1\end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{7x+2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 7x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Sustituyendo los valores de las raíces obtenemos:

Si x=0 ➔ 2 = -2A ➔ A=-1
Si x=2 ➔ 16 = 6B ➔ B=8/3
Si x=-1 ➔ -5 = 3C ➔ C=-5/3

Entonces:

$$\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{x+1}dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\ln|x| + \frac{8}{3}\ln|x-2| - \frac{5}{3}\ln|x+1|$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{5}{3}\ln|x+1| + C$$

5.- Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int x\cdot arctgx dx=\begin{bmatrix} u=arctgx & du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv=x & v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\frac{x^2Arctg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2Arctg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^2Arctg(x)}{2}-\frac{1}{2}x+Arctg(x)+C$$

$$b)\int e^{-x}\cos xdx=\begin{bmatrix} u=e^{-x} & du=-e^{-x}dx \\ dv=\cos x & v=senx\end{bmatrix}=e^{-x}senx+\int e^{-x}senxdx=e^{-x}senx+$$

$$+\begin{bmatrix} u=e^{-x} & du=-e^{-x}dx \\ dv=senx & v=-\cos x\end{bmatrix}-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos xdx$$

Tenemos una integral que en la que volvemos a la original (cíclica). Por tanto:

$$I=e^{-x}senx-e^{-x}\cos x-I\Rightarrow I=\frac{e^{-x}senx-e^{-x}\cos x}{2}+C$$

$$c)\ \int x^2\cos xdx=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos x & v=senx\end{bmatrix}=x^2senx-2\int xsenxdx=x^2senx-$$

$$-\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=senx & v=-\cos x\end{bmatrix}+x\cos x+\int\cos xdx=$$

$$=x^2senx+2x\cos x-2senx=2x\cos x+(x^2-2)senx+C$$

$$d)\int xe^{4x}dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{4x} & v=\dfrac{1}{4}e^{4x}\end{bmatrix}=\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx=\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{e^{4x}}{16}+C$$

$$e)\ \int x^3e^{-x^2}dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=xe^{-x^2} & v=\dfrac{-1}{2}e^{-x^2}\end{bmatrix}=-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}+\int xe^{-x^2}dx=-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2}=-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C$$

$$f)\ \int sen(\ln x)dx=\begin{bmatrix} u=sen(\ln x) & du=\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} \\ dv=dx & v=x\end{bmatrix}=xsen(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=xsen(\ln x)-$$

$$-\begin{bmatrix} u=\cos(\ln x) & du=-sen(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} \\ dv=dx & v=x\end{bmatrix}=-x\cos(\ln x)-\int sen(\ln x)dx$$

Volvemos a tener una integral cíclica:

$$I=xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)-I\Rightarrow I=\frac{xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)}{2}+C$$

6.- Calcula la primitiva de la función $f(x)=\left[\ln x\right]^2$ que se anule en $x=e$

Calculamos la integral indefinida de f(x)

$$\int [\ln x]^2 dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x} \\ dv=\ln x & v=x(\ln x-1) \end{bmatrix} = x\ln x(\ln x-1)-\int(\ln x-1)dx = x\ln x(\ln x-1)-$$
$$-x(\ln x-1)+x = x[\ln x]^2-2x\ln x+2x+K$$

Como tiene que ocurrir que $f(e)=0$, entonces: $e-2e+2e+k=0 \Leftrightarrow k=-e$

Por tanto la primitiva pedida es es: $\int [\ln x]^2 dx = x[\ln x]^2-2x\ln x+2x-e$

7.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (2x^2-4x+5)dx$ $\quad \frac{2}{3}x^3-2x^2+5x+C$

b) $\int \left[\frac{x^4-3x\sqrt{x}+2}{x}\right]dx$ $\quad \frac{x^4}{4}-2x\sqrt{x}+2\ln|x|+C$

c) $\int \frac{1-\cos 2x}{2x-sen2x}dx$ $\quad \frac{1}{2}\ln|sen(2x)-2x|+C$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+C$

e) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$ $\quad \frac{8}{7}x\sqrt[4]{x^3}-5\ln|x|+C$

f) $\int \frac{dx}{4+7x^2}dx$ $\quad \frac{\sqrt{7}}{14}Arctg\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)+C$

g) $\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ $\quad 3\cdot Arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

h) $\int \left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $\quad \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x}+C$

i) $\int \frac{(1+x)^2}{x}dx$ $\quad \frac{x^4}{4}+x^2+\ln|x|+C$

j) $\int \frac{4x+8}{x^2+4x}dx$ $\quad 2\ln|x^2+4x|+C$

k) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ $\quad \frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3}+C$

l) $\int (2x^2+3)^2\cdot 5x\cdot dx$ $\quad \frac{5}{12}(2x^2+3)^3+C$

m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$ $\quad \frac{1}{4}Arcsenx^4+C$

n) $\int sen^3 2x\cdot\cos 2x\cdot dx$ $\quad \frac{sen^4 2x}{8}+C$

ñ) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ $\quad 2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

o) $\int 3x\cdot 3^{x^2}dx$ $\quad \frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}+C$

p) $\int 4x^2\sqrt{1-x^3}dx$ $\quad -\frac{8}{9}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}$

q) $\int \frac{3x}{x^2+5}dx$ $\quad \frac{3}{2}\ln(x^2+5)+C$

r) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$ $\quad e^{\ln x}+c$

s) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ $\quad -\sqrt{4-x^2}+c$

t) $\int \frac{1-\ln x}{x\cdot\ln x}dx$ $\quad \ln(\ln x)-\ln x+c$