Nombre:			Nota
Curso:	**2º Bachillerato**	**Examen II**	
Fecha:	***22 de Octubre de 2015***	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

1.- Se sabe que la función $f:[0,5]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5\end{cases}$

es derivable en el intervalo (0,5).

a) Calcula las constantes a y b. **(1,75 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=2. **(0,75 puntos)**

2.- Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} (ax^2+bx+c)\cdot e^{1-x} & si \quad x>1 \\ sen(x-1) & si \quad x\le 1\end{cases}$

Encontrar los valores de a, b y c, sabiendo que f es continua en todo su dominio, y además admite primera y segunda derivadas en el punto de abscisas x = 1. **(2,5 puntos)**

3.- Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x)=x^2+ax+b \qquad\qquad g(x)=c\cdot e^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (-1,2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a,b,c$\in\mathbb{R}$ **(1,75 puntos)**

b) Halla la ecuación de dicha tangente. **(0,75 puntos)**

4.- Considera la curva de ecuación $y=x^2-2x+3$

a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. ¿es única la solución? ¿por qué? **(1 punto)**

b) ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha recta; en caso negativo, explica por qué. **(1 punto)**

c) Halla mediante la definición de derivada, la derivada de $f(x)=x^2-2x+3$ **(0,5 puntos)**

1.- Se sabe que la función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$

es derivable en el intervalo (0,5).

a) Calcula las constantes a y b. **(1,75 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=2. **(0,75 puntos)**

a) Como la función es derivable en (0,5), también lo será en el punto x=2; así que calculamos las derivadas en x=2 por la izquierda y por la derecha:

- ✓ Por la izquierda: $f'(x)=a+2bx \quad \to \quad f'(2^-)=a+4b$
- ✓ Por la derecha: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad \to \quad f'(2^+)=\dfrac{1}{2}$

Y como ambas tienen que ser iguales, obtenemos una ecuación: $a+4b=\dfrac{1}{2} \quad \to \quad 2a+8b=1 \quad (1)$

Como la función es derivable en 2, también es continua. Así que tiene que ocurrir que los límites laterales en el punto de abscisa x=2 y el valor de la función en x=2 también han de coincidir: $f(2)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2}ax+bx^2=2a+4b \\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2}-4+\sqrt{x-1}=-4+1=3 \end{array}\right\} 2a+4b=3 \qquad (2)$$

De donde obtenemos otra ecuación.

Si resolvemos por reducción el sistema formado por ambas ecuaciones $\begin{cases} 2a+8b=1 \\ 2a+4b=3 \end{cases}$, obtenemos que:

$$4b=-2 \quad \to \quad b=-\frac{1}{2} \quad \to \quad a=\frac{5}{2}$$

Por tanto: a=5/2 y b=-1/2.

b) La ecuación de la recta tangente de una función f en un punto x_o viene dada por la expresión:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Así que necesitamos f(2) y f'(2): $\begin{cases} f(2)=-4+\sqrt{2-1}=-4+1=-3 \\ f'(2)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ con esto, ya podemos escribir la ecuación de la recta tangente:

$$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-2) \quad \to \quad y+3=\frac{x-2}{2} \quad \to \quad r:2y-x+8=0$$

2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} (ax^2+bx+c)\cdot e^{1-x} & si \quad x>1 \\ sen(x-1) & si \quad x\le 1 \end{cases}$

Encontrar los valores de a, b y c, sabiendo que f es continua en todo su dominio, y además admite primera y segunda derivadas en el punto de abscisas x = 1. **(2,5 puntos)**

✓ Si la función es continua en x=1, tiene que cumplir que $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Calculamos: $\begin{cases} f(1)=sen(1-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx+c)\cdot e^{1-x}=(a+b+c)\cdot e^0=a+b+c \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} sen(x-1)=0 \end{cases}$

Por tanto, la función es continua en x=1 si se verifica la ecuacion: $a+b+c=0$ (1)

✓ Si la función es derivable en x=1, cumplirá que $f'(1^-)=f'(1^+)$

Como la función es una función a trozos compuesta por dos ramas, una producto de polinómica por exponencial (siempre derivable) y la otra una trigonométrica (tambien siempre derivable), podemos escribir su derivada para x≠1 de la siguiente forma:

$$f'(x)=\begin{cases}(2ax+b)\cdot e^{1-x}-e^{1-x}(ax^2+bx+c) & si\ x>1 \\ \cos(x-1) & si\ x<1\end{cases}$$

Además, tenemos que: $\begin{cases} f'(1^+)=2a+b-a-b-c=a-c \\ f'(1^-)=\cos 0=1 \end{cases}$

Por tanto para que sea derivable en 1 tiene que verificarse la ecuación: $a-c=1$ (2)

✓ Si la función admite segunda derivada en x=1, cumplirá tambien que $f''(1^-)=f''(1^+)$

Como f'(x) es derivable, su derivada será:

$$f''(x)=\begin{cases}-e^{1-x}(2ax+b-ax^2-bx-c)+e^{1-x}(2a-2ax-b) & si\ x>1 \\ -sen(x-1) & si\ x<1\end{cases}$$

Además: $\begin{cases} f''(1^+)=-2a-b+a+b+c+2a-2a-b=-a-b+c \\ f''(1^-)=-sen0=0 \end{cases}$

Entonces, para que f sea derivable dos veces en x=1, tiene que verificarse la ecuación: $-a-b+c=0$ (3)

Así que tenemos un sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) :

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=1 \\ -a-b+c=0 \end{cases}$ cuya solución es: **a=1; b=-1 y c=0.** ➔ $\boxed{f(x)=\begin{cases} e^{1-x}(x^2-x) & si\ x>1 \\ sen(x-1) & si\ x\le 1\end{cases}}$

3.- Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad\qquad g(x) = c{\cdot}e^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (-1,2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a,b,c$\in \mathbb{R}$ **(1,75 puntos)**

b) Halla la ecuación de dicha tangente. **(0,75 puntos)**

a) Si las gráficas de f y g se cortan en el punto (-1,2) sabemos que: $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ g(-1) = 2 \end{cases}$

Si f(-1)=2, tenemos que $f(-1) = 1 - a + b = 2$ de donde obtenemos la condición: $1 - a + b = 2$ (1)

Si g(-1)=2, tenemos que $g(-1) = c{\cdot}e^0 = c = 2$, de donde tenemos la condición $c = 2$ (2)

Si además tienen la misma recta tangente en dicho punto, el x=-1, calcularemos la derivada de cada una de ellas en dicho punto, para obtener el valor de sus pendientes:

$$f'(x) = 2x + a \quad \rightarrow \quad f'(-1) = a - 2$$
$$g'(x) = -c{\cdot}e^{-(x+1)} \quad \rightarrow \quad g'(-1) = -c$$

Como nos dicen que las rectas tangentes son la misma, también tendrán que serlo sus pendientes; así que de aquí obtenemos la tercera condición: $a - 2 = -c$ (3)

Si con estas tres condiciones escribimos un sistema de ecuaciones, tenemos: $\begin{cases} 1 - a + b = 2 \\ c = 2 \\ a - 2 = -c \end{cases}$ y que resolviendo nos da los valores de **a=0, b=1 y c=2.**

b) La ecuación de la recta tangente de una función f en un punto x_o viene dada por la expresión:

$$y - f(x_0) = f'(x_0){\cdot}(x - x_0)$$

Así que para el caso de la función f, y con los datos obtenidos en el apartado a), tenemos que:

f(-1)=2 y f'(-1)=-2

por tanto, la ecuación de la recta tangente pedida será:

$$y - f(-1) = f'(-1){\cdot}(x+1) \quad \rightarrow \quad y - 2 = -2{\cdot}(x+1)$$

Y operando:

$$y = -2x$$

4.- Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$

a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. ¿es única la solución? ¿por qué? **(1 punto)**

b) ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha recta; en caso negativo, explica por qué. **(1 punto)**

c) Halla mediante la definición de derivada, la derivada de $f(x)=x^2-2x+3$ **(0,5 puntos)**

a) Si la recta es tangente a la curva y forma un ángulo de 45°, quiere decir que su pendiente es tan 45°=1.

Así que la pendiente de la recta tangente será igual a 1.

Si derivamos la función $f(x)=x^2-2x+3$, tenemos: $f'(x)=2x-2$.

En el punto de abscisas x=a, tendremos que $f'(a)=2a-2$, pero como además es 1, tenemos que:

$$f'(a)=2a-2=1 \quad \rightarrow \quad 2a=3 \quad \rightarrow \quad a=\frac{3}{2}$$

Así que el punto a=3/2 la curva una recta tangente de pendiente 1.

Si calculamos el valor de la función en 3/2, ya tendremos todo lo necesario para halla dicha recta tangente:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(\frac{3}{2}\right)+3=\frac{9}{4}$$

Como la ecuación de la recta tangente de una función f en un punto x_o viene dada por la expresión:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$y-\frac{9}{4}=x-\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y=x+\frac{3}{4}$$

Operando llegamos a:

$$r: 4x-4y+3=0$$

Que es la recta tangente de dicha curva que forma un ángulo de 45°.

A la pregunta de si es única, la respuesta es que sí. Porque solo hay un punto en el que la curva (una parábola) tenga una tangente paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) Como la curva es una parábola, el único punto donde su recta tangente es horizontal es en su vértice.

El vértice de la curva se encuentra en el punto $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ y en dicho punto la parábola pasa por el punto (1,2), por tanto la tangente es la recta horizontal y=2.

c) Si una función f(x) es derivable en su dominio, es posible definir una nueva función que asocie a cada número real del dominio la derivada de la función f en ese punto. Esta función se llama *función derivada* y se calcula mediante: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Por tanto:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-2(x+h)-3\right]-\left[x^2-2x+3\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h-2=2x-2$$

Así que la derivada es: $f'(x)=2x-2$