Guía del profesor

2 bachillerato

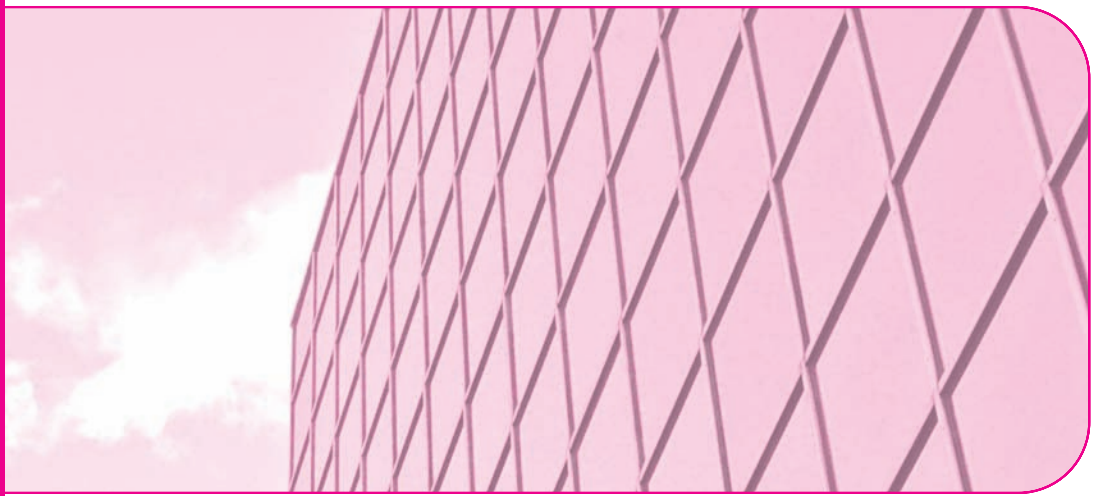
Matemáticas

Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Guía Didáctica II

bachillerato 2



Matemáticas

Autores
Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres

ECIR EDITORIAL

Matemáticas

2 bachillerato

Guía Didáctica II

Rodolfo Esteve
Maribel Deusa
Pascual Montesinos
Antonio J. Ramírez
Ernesto Veres
Editorial ECIR, S.A.

ISBN: 978-84-9826-533-0

Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR
Edición: Editorial ECIR
Impresión: Industrias gráficas Ecir (IGE)

Ilustraciones: Diseño Gráfico ECIR
Diseño e ilustración cubierta: Valverde e Iborra / Diseño gráfico ECIR

ECIR EDITORIAL
Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55
Móvil: 677 431 115
Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

Índice interactivo. Situar el cursor sobre el tema al que se desee ir y hacer clic.

Índice

Tema 1 SISTEMAS DE ECUACIONES: PROBLEMAS LINEALES

1. a) $x = 2;\ y = \frac{1}{5}$

b) $x = -\frac{2}{3};\ y = \frac{3}{4};\ z = 0$

c) No tiene solución

2. a) Son equivalentes porque la primera ecuación es igual y la segunda está multiplicada por –1.

b) Son equivalentes porque las dos primeras ecuaciones y la tercera es la suma de las tres ecuaciones del primer sistema.

3. a) $x = 1;\ y = 0;\ z = 0$

b) No tiene solución

c) $x = 1;\ y = 0;\ z = -2$

4. a) $x = 1;\ y = 2;\ z = 4$

b) $x = 3;\ y = 5;\ z = -8$

c) No tiene solución

5. a) $x = \frac{3}{2};\ y = \frac{1}{2} + \lambda;\ z = \lambda$

b) $x = 1 - \lambda;\ y = -1 + \lambda;\ z = \lambda$

c) No tiene solución

6. a) $x = y = z = 0$

b) $x = -\lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda$

c) $x = y = z = 0$

7. a) $x = -\frac{2}{3}\lambda;\ y = -\frac{2}{3}\lambda;\ z = \lambda$

b) $x = \frac{7}{2}\lambda;\ y = 4\lambda;\ z = \lambda$

c) $x = -\frac{5}{26}\lambda;\ y = -\frac{20}{13}\lambda;\ z = \lambda$

8. a) Si $k = 5$, compatible determinado con solución $x = 2$, $y = 1$

Si $k \neq 5$, incompatibles

b) Compatible determinado para cualquier valor de m, con solución $x = -2$, $y = 4 - m$, $z = m - 2$

c) Si $a = 0$, compatible indeterminado con solución $x = y = z = \lambda$

Si $a = -1$, compatible indeterminado con solución $x = \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, compatible determinado con solución $x = y = z = 0$

9. a) $x - 8y - 3z = 0$

b) $x - 2y + 3z = 0$

c) $2x - y = 0;\ 7x - z = 0$

d) $4x + 5y + 2z = 0$

10. No son equivalentes, pues el de la izquierda es incompatible y el de la derecha es compatible determinado con solución $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

11. Si

12. a) Sistema compatible determinado de solución $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

b) Sistema compatible determinado de solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

13. a) Sistema incompatible

b) Sistema homogéneo compatible indeterminado de solución $x = \frac{3}{2}\lambda,\ y = \frac{5}{2}\lambda,\ z = \lambda$

14. a) Sistema homogéneo compatible determinado, solución trivial (0, 0, 0)

b) Sistema compatible determinado de solución $x = 4$, $y = 2$

15. a) Sistema homogéneo compatible determinado de solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

b) Sistema compatible determinado de solución $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = \frac{2}{3},\ t = \frac{2}{3}$

16. a) Sistema compatible determinado de solución si $a \neq b \neq c$

$$x = \frac{(d-b)(c-d)}{(a-c)(b-a)} \qquad y = \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$z = \frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}$$

Si no es $a \neq b \neq c \Rightarrow$ incompatible

b) Sistema compatible determinado de solución $x = 7$, $y = -3$, $z = -9$, $t = 2$

17. a) Sistema compatible determinado de solución $x = 2$, $y = -1$, $z = -2$, $t = 3$

b) Sistema incompatible. No tiene solución.

18. a) Sistema compatible indeterminado

$x = 28\alpha - 2,\quad y = 29\alpha - 4,$

$z = 49\alpha - 7,\quad t = 12\alpha - 3$

b) Sistema compatible indeterminado

$x = 2 - \alpha + \beta,\quad y = -\alpha,\quad z = \alpha,\quad t = 0,\ s = \beta$

19. a) $x = \dfrac{-3-7\alpha}{11}$, $y = \dfrac{42+10\alpha}{11}$, $z = \alpha$

b) $x = \dfrac{6\alpha+1}{4}$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{3+2\alpha}{4}$, $t = \alpha$

20. a) $x = \alpha$, $y = 2\alpha - 1$; b) Incompatible

21. a) $x = 6$, $y = -1$, $z = 5$, $t = 7$

b) $x = z = t = \alpha$, $y = 2\alpha$

22. a) $t \neq 0$ y $t \neq 1$; b) $t = 0$; c) $t = 1$

23. a) Si $a \neq 2$ es compatible determinado de solución

$x = \dfrac{2-2b}{a-2}$, $y = \dfrac{a+4b-6}{a-2}$, $z = \dfrac{b-1}{a-2}$

Si $a = 2$ y $b = 1$ es compatible indeterminado de solución $x = -2\alpha$, $y = 1 + 4\alpha$, $z = \alpha$

Si $a = 2$ y $b \neq 1$ es incompatible

b) Si $a = 1$ es compatible indeterminado de solución $x = 1 - \alpha - \beta$, $y = \alpha$, $z = \beta$

Si $a = -2$ es incompatible

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ es compatible determinado

$x = y = z = \dfrac{1}{a+2}$

24. a) Si $a = 5$, incompatible

Si $a \neq 5$, compatible determinado con solución

$x = \dfrac{3a-25}{a-5}$, $y = \dfrac{a^2-7a}{2(a-5)}$, $z = \dfrac{3a^2-25a}{2(a-5)}$

b) Si $a = 0$, compatible indeterminado con solución $x = y = z = \lambda$

Si $a \neq 0$, compatible determinado con solución $x = y = z = 0$

25. a) Si $a \neq 1$ compatible determinado de solución $x = 2 + a$; $y = -1$; $z = -1$

Si $a = 1$ compatible indeterminado de solución $x = 1 - \lambda - \mu$; $y = \lambda$; $z = \mu$

b) Si $a \neq 6$ sistema homogéneo compatible determinado de solución $x = y = z = 0$

Si $a = 6$ sistema homogéneo compatible indeterminado de solución $x = -\dfrac{13}{25}\lambda$; $y = -\dfrac{2}{25}\lambda$; $z = \lambda$

26. a) $a \neq -3$. Compatible determinado

$a = -3$. Compatible indeterminado $x = \alpha$, $y = 2\alpha$, $z = -\alpha$

b) Para todo valor de a, es compatible determinado

$x = y = z = \dfrac{a}{4}$

27. a) $10z + 1 = 0$

b) $8z + 7t - 15 = 0$

28. a) $3x + y - 2z = 0$; b) $x + y - z = 0$

29. a) $\begin{cases} x + 3z - 7 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$

b) $2x - 5y - 4z = 0$

30. a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{-1}$

b) $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

31. a) $x = \dfrac{3}{5}$, $y = -\dfrac{4}{5}$, $z = 0$

b) Incompatible

32. a) Compatible determinado con solución

$x = \dfrac{31}{36}$, $y = \dfrac{37}{36}$, $z = \dfrac{11}{12}$

b) Compatible indeterminado con solución

$x = \dfrac{2\lambda+11}{3}$, $y = \dfrac{\lambda+1}{3}$, $z = \lambda$

33. Alberto: 4 000 €

Bernardo: 6 000 €

Carlos: 7 200 €

34. Oro = 5632 gr.

Plata = 1833 gr.

35. a) $x = y = 22$ €

b) $x = 30$ €, $y = 18$ €

c) No se puede saber el precio de cada localidad pues el sistema es compatible indeterminado.

36. 51 km/h y 45 km/h

37. a) para que las tres concurran en un punto $a = -4$ y $b = 8$

b) para que sean paralelas, no es posible

c) para que se corten en dos puntos $a = -1$ y b = cualquier valor

38. $f(d) = \dfrac{x}{6}(x^2 + 3x + 2)$

$A = \dfrac{n}{3}(2n^2 + 3n + 1)$; $B = \dfrac{(4n^2 - 1)\cdot n}{3}$

39. Para λ tal que $66{,}6 < \lambda < 85{,}71$

Se han vendido de trigo: $\dfrac{3\lambda - 200}{4}$;

cebada: $\dfrac{600 - 7\lambda}{4}$; mijo: λ

40. 162 000, 30 667 y 347 333 respectivamente

41. $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado
$a \neq -1$ el sistema es incompatible

42. La solución no es única. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$ b) Solución: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y \quad = 0 \end{cases}$ d) Solución: $\begin{cases} x = \dfrac{2\lambda}{3} \\ y = -\dfrac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$

43. Si x es el número de Tm de arroz, y el de lentejas y z el de garbanzos, se tiene:

$$0{,}15x + 0{,}3y + 0{,}4z = 160$$
$$0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}35z = 165$$
$$0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}4z = 170$$

de solución $x = 200$, $y = 300$, $z = 100$

44. 123

45. 16 y 12 respectivamente

46. a al 1%, b al 3% y c al 10%

47. 150 pasajeros el importe total, 300 el 20% y 50 el 50%

48. 2 cajas de tipo A, 2 cajas de tipo B y 1 de tipo C

49. $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
Es posible transformarlo en compatible indeterminado cambiando la primera ecuación por $x + y - z = 1$

50. 7 400 €

51. A a 16 €/barril
B a 20 €/barril

52. 432

53. 39, 21 y 12 respectivamente

54. Cuando nació el primero tenía 35 años y cuando nació el segundo 40 años

Tema 2 MATRICES

1. a) Por ejemplo $(1 \ \ 3 \ \ 5)$

b) Por ejemplo $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

c) Por ejemplo $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) Por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. a) $a_{22} = 2$ en A, $b_{22} = 4$ en B

b) diagonal secundaria -8 y -1

c) $A(3 \times 2)$ y $B(2 \times 2)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

3. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) La A no y la B si es simétrica

c) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (2j - i)$ siendo $(A^t) = (2j - i)$

$B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (|j - i|)$ siendo $(B^t) = |j - i|$

4. a) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $(-B)^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

5. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B - A =$ la opuesta de $A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

6. a) $\text{Ventas de Enero} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1\text{ cm} & 3\text{ cm} & 7\text{ cm} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Andrés} \\ \text{Juan} \\ \text{Lucas} \\ \text{Pedro} \end{array} & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$\text{Ventas de Febrero} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1\text{ cm} & 3\text{ cm} & 7\text{ cm} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Andrés} \\ \text{Juan} \\ \text{Lucas} \\ \text{Pedro} \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $E + F = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

c) $F - E = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

7. a) $a = -1,\ b = 9,\ c = 11,\ d = -1,\ e = 1,\ f = 13$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 11 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -14 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & -7 \\ -10 & -17 & -1 \end{pmatrix}$

9. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 11 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

10. a) 8; b) 8; c) Sí, si son A y B matrices filas y columnas.

11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; B no tiene inversa

$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

12. $rg(A) = 2$ $rg(B) = 1$ $rg(C) = 2$
$rg(D) = 3$ $rg(E) = 3$ $rg(F) = 3$

13. $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} 0 & -13 & 20 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$

15. $AB = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = 12$

16. $x = 2,\ y = 3,\ z = 0,\ t = 1$

17. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

18. Las que lo tienen fuera de la diagonal principal

19. $x = 1,\ y = 3,\ z = -1$

20. $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego son inversas

22. Solución general: $X = \begin{pmatrix} a & -\frac{5}{2}a & -2a \end{pmatrix}$

Solución particular: $X = (2 \quad -5 \quad -4)$

23. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

C no tiene inversa

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -9 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. $X = \begin{pmatrix} 0 & 4\lambda - 2 & 2\lambda - 1 \\ 2 - 4\lambda & 0 & \lambda \\ 1 - 2\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ con $\lambda \in R$

25. Como $A^2 = I$ se tiene que:

si n es par $A^n = (A^2)^{\frac{4}{2}} = I^{\frac{4}{2}} = I$

si n es impar $A^n = (A^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot A = I^{\frac{n-1}{2}} \cdot A = I^{\frac{n-1}{2}} \cdot A = IA = A$

26. $x = 2,\ y = -3,\ z = 2$

27. $|A| = 4$ luego A tiene inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

La ecuación $A^2 + xA + I = 0$ no tiene solución.

28. a) $X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; b) No

29. a) Que el número de filas de A sea igual al número de columnas de B y que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) No

30. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en general $X = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

31. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) Si

32. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

33. $A^{35} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

34. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

35. $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

36. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

37. $B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 + I^2 - 4AI = 4A + I - 4A = I$, pues $A^2 = A$ e $I^2 = I$

38. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$

39. Por inducción $A^n = 2^{n-1} \cdot A$ es cierta para $n = 1$, $A = A$

para $n = 2$, $A^2 = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

la suponemos cierta para n y comprobamos que es cierta para $n + 1$

$A^{n+1} = A^n \cdot A = 2^{n-1} A \cdot A = 2^{n-1} A^2 = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot A = 2^n \cdot A$

40. $rg(A) = 2;\ rg(B) = 3$

41. $r(A) = 2;\ r(B) = 3$

42. $rg(A) = 2;\ rg(B) = 2$

43. $r(A) = 2;\ r(B) = 3$

44. $rg(A) = 2;\ rg(B) = 3$

45. a) $A^3 = 2A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -8 \\ 8 & 8 & -8 \\ 8 & 8 & -8 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

46. $X = \begin{pmatrix} \frac{2 - 4\lambda}{5} \\ \frac{1 - 7\lambda}{10} \\ \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

47. a) $(A \cdot B + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$

b) $x = \alpha$, $y = -2\alpha$ siendo α cualquier número real

48. $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{14} & \frac{19}{14} \end{pmatrix}$

49. $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

51. $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$

53. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C no tiene inversa

$D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

55. $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

57. a) $A^2 = 2A - I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

59. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$;

$A^{428} = (A^3)^{142} \cdot A^2 = A^2$

Tema 3 DETERMINANTES

1. a) –28 b) 0 c) 5

2. a) $x = 0$; $x = -1$

b) $x = -5$

c) $x = \frac{14}{3}$; $x = -3$

3. a) 3 b) –1 c) 1

4. Propiedad 5; propiedad 6; propiedad 4

5. Menor de $a_{14} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; $A_{14} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -59$

Menor de $a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = A_{33} = -48$

Menor de $a_{41} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; $A_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -90$

6. 6

7. $a \cdot (a - 2)^3$

8. –22104

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $|A| = 3$, $|B| = 1$, $|C| = 0$, $|D| = 4$

11. a) $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$ b) $x = -\frac{1}{7}$

12. a) $x_1 = -2$ y $x_2 = -18$ b) $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

13. $x_1 = 1$ y $x_2 = -21$

14. $|A| = 0$, $|B| = ab$, $|C| = 4xyz$, $|D| = 0$

15. *A* lo es al serlo la segunda columna; *B* lo es al ser la primera fila múltiplo de 5 y la tercera múltiplo de 2

16. A por tener una columna de ceros. *B* por tener dos columnas iguales.

17. $x = 1$

18. $x = 0$; $x = -3$

19. Si $x = 1$ no tiene inversa, pues su determinante es nulo;

si $x = 3$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{-5}{4} \end{pmatrix}$

21. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

24. $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, $z = 0$

25. $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\left|(A^t \cdot A^{-1})\right|^{276} = 1$

26. $m = 2$ y $m = -1$

27. $k = 1 - \sqrt{5}$ y $k = 1 + \sqrt{5}$

28. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow |A| \neq 0$ luego es regular

29. $X = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$

30. a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 + 12 \cdot 2 & 4 + 12 \cdot 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1+1 & -3+6 & 0+4 \end{vmatrix} =$

$= 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$

31. a) $|A| = 10x - 8y + 2z$; $|B| = -x - 4y + 3z$

b) $|A \cdot B| = -8$

c) $x = \lambda$; $y = 2\lambda$; $z = 3\lambda$ $\forall \lambda \in R$

32. a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ b) $x = -\frac{3}{2}$

c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = 41{,}5$

33. a) -2 b) -18 c) -45 d) -6

34. a) $(a + 3)\,(a - 1)^3$

b) $3x^2 + 8y^2 + 3z^2 - 11xy - 4zx - 7yz$

c) $a^4 - b^4$

d) $a^2 d^2 + b^2 e^2 - 2abed + cf(ad - be)$

35. A no tiene inversa por no ser matriz cuadrada

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

C no tiene inversa porque $|C| = 0$

36. $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

37. $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$, $z = 0$

38. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

39. $a\,(b - a)\,(d - c)\,(c - b)$

40. 2^{n-1}

41. 0

42. $|A| = -3$; $|B| = |C| = 3$

43. $\left|A^{-1}\right| = -\frac{1}{2} = \frac{1}{|A|}$

44. a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = (-1) \times 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \times (-6) = 18$

b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \times (-6) = -12$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} =$

$= 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \times 0 - (-6) = 6$

45. a) 15; b) $\frac{25}{3}$

46. $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = 4 \times \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

47. a) -12; 24

b) 1

c) No, pues $|C^t| = |C| = \frac{1}{|C^{-1}|} \Rightarrow 3 \neq \frac{1}{3}$

48. (0, 0, 0)

49. $\frac{1}{6}$

50. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) 0 c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

51. a) $|A^3| = -1$; $(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = (5 \quad 6 \quad 2)$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

52. a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ No tiene inversa

b) 1 c) $\begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

53. a) $\det(A) = -1$; $\det(A^2) = 1$; $\det(A + I) = 0$; $\det(I) = 1$

b) Sí, propiedad 10 de los determinantes

c) $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$

54. Basta desarrollar por los elementos de la primera fila del determinante equivalente.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

55. No existe tal matriz.

56. $\Delta = a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 8a = a \cdot (a-2)^3$

Tema 4 EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS Y LA REGLA DE CRAMER

1. $rg(A) = 3$; $rg(B) = 3$; $rg(C) = 3$

2. a) Compatible indeterminado

b) Compatible determinado

c) Incompatible

d) Compatible indeterminado

3. a) $x = -\frac{18}{5}$, $y = \frac{5\lambda - 6}{5}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in R$

b) $x = \frac{-5\lambda - 9}{2}$, $y = \frac{23 + 7\lambda}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in R$

4. a) No es posible

b) $x = 5$; $y = -1$; $z = 6$

5. $rg(A) = 2$; $rg(B) = 1$; $rg(C) = 2$; $rg(D) = 2$

6. $rg(A) = 3$; $rg(B) = 4$; $rg(C) = 4$

7. Si $k = -6$ $rg(A) = 1$ y si $k \neq -6$ $rg(A) = 2$

Si $k = \pm 4$ $rg(B) = 1$ y si $k \neq \pm 6$ $rg(B) = 2$

$rg(C) = 2$ $\forall k$

Si $k = 8$ $rg(D) = 2$ y si $k \neq 8$ $rg(D) = 3$

8. Si $a = 0$ ó 1 $rg(A) = 2$.

Si $a = -1$ $rg(B) = 2$; si $a = 0$ $rg(B) = 3$.

Si $A = 1$ $rg(C) = 1$; si $a = -2$ $rg(C) = 2$.

Si $a = \frac{5}{2}$ ó 2 $rg(D) = 3$

9. a) Si $a = 1$ ó 1/2 $rg(A) = 2$ y si $a \neq 1$ ó 1/2 $rg(A) = 3$

b) Si $a = 1$ compatible indeterminado; si $a = 1/2$ incompatible; si $a \neq 1$ ó 1/2 compatible determinado.

c) $x = 1 - \lambda$; $y = -2\lambda$; $z = \lambda$

10. $a = 1$; $b = \frac{23}{29}$; $c = \frac{33}{29}$.

11. a) Si $m = 18$ incompatible; si $m \neq 18$ compatible determinado.

b) $x = \frac{-67}{22}$; $y = \frac{-5}{11}$; $z = \frac{-15}{22}$; $t = \frac{-27}{11}$

12. a) Si $k = 0$ es incompatible; si $k = -1$ es compatible indeterminado; si $k \neq 0$ ó -1 es compatible determinado.

b) $x = \lambda$; $y = -1$; $z = -\lambda$

13. Si $k = 2$, $x = \lambda$; $y = -3\lambda$; $z = -5\lambda$;

si $k = -1$, $x = \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$

14. $a = 1$ y $b = 3$ compatible indeterminado; $a = 1$ y $b \neq 3$ incompatible; $a \neq 1$ compatible determinado.

15. a) $x = 3$; $y = -2$; $z = -1$

b) $x = b + a$; $y = b - a$; $z = ab$

16. a) $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$; $z = -\frac{1}{2}$

b) $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{5}{3}$; $z = 0$

17. a) $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$

b) $x = \frac{1}{8}$; $y = \frac{-27}{8}$; $z = \frac{-15}{8}$

18. a) $x = \frac{3}{2}$; $y = 0$; $z = \frac{9}{4}$

b) $x = 2\lambda - 3$; $y = 4\lambda - 9$; $z = \lambda$

19. a) $x = \lambda$; $y = 4 - \lambda$; $z = -1 + \lambda$

b) $x = \lambda$; $y = -1 + \frac{1}{5}\lambda$; $z = -\frac{2}{5}\lambda$

20. a) $x = \lambda$; $y = 17\lambda - 7$; $z = 5\lambda - 2$

b) $x = \lambda$; $y = 2\lambda - \frac{3}{2}$; $z = -1$

21. a) Si $a = \pm 4$ incompatible; si $a \neq \pm 4$ compatible determinado.

b) $x = 0,\widehat{6}$; $y = -0,4$; $z = 1,\widehat{26}$

22. a) $m = -2$ incompatible, $m \neq -2$ compatible determinado.

b) $x = \frac{5}{8}$; $y = \frac{6}{8}$; $z = \frac{3}{8}$

23. $x = y = z = 0 \forall a$

24. a) $m = 1$ y $n = 2$ compatible indeterminado;

$m = 1$ y $n \neq 2$ incompatible;

$m \neq 1$ compatible determinado.

b) $x = 1$; $y = 2$; $z = 1$

25. Si $m = 2$ compatible determinado; si $m \neq 2$ incompatible.

Tema 5 VECTORES EN EL ESPACIO

1. a) $\overrightarrow{AB} = (4, 2, -3)$; $\overrightarrow{CD} = (4, 2, -3)$. Son equipolentes porque tienen las mismas coordenadas.

b) $F(0, -1, -3)$

2. $A(-1, -3, -1)$

3. Es libre

4. Ligado

5. $x = -1$

6. $(-2, 9, 6)$

7. $\vec{x} = (3, 2, 0)$

8. $MA = MO + OA$

$MB = MO + OB$

$MC = MO + OC$

$MD = MO + OD$

y como $OA = -OC$ y $OB = -OD$, sustituyendo se demuestra la igualdad

9. a) $B\left(\frac{7}{2}, 1, -2\right)$; b) $B\left(-\frac{5}{2}, 4, -5\right)$; c) $B\left(\frac{1}{2}, 2, -3\right)$

10. a) $S\left(-1, \frac{41}{3}, \frac{-19}{3}\right)$; b) $T(6, -12, 3)$

11. Es isósceles y no es rectángulo

12. $P\left(\frac{7}{3}, 1, \frac{4}{13}\right)$

13. a) No

b) Sí; $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) Sí; $\vec{a} = -\frac{5}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

d) No

14. a) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1, 1, 3)$, por ejemplo

b) $\vec{w} = (1, 0, 0)$, por ejemplo

15. $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta(\vec{u} + \vec{v}) + \gamma(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$
$= (\alpha + \beta + \gamma)\vec{u} + (\beta + \gamma)\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$

Como $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$$ son lineal-

mente independientes.

16. A es ligado

$(1, 3, 1) = -\frac{1}{14}(2, 0, -3) + \frac{37}{14}(0, 2, -1) - \frac{8}{7}(-1, 2, -3)$

B es libre

C es ligado $(-1, 3, 4) = 2(2, 1, 3) - (5, -1, 2)$

17. $\alpha(1, -1, 4, 3) + \beta(2, 1, 3, 2) + \gamma(1, 0, 0, 0) +$
$+ \delta(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ son linealmente independientes

18. $x = 3$

19. $k = 8$ y la relación es $\vec{r} = \frac{3}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$

20. $x = -\frac{1}{2}$

21. $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$$

22. $\alpha(1, -2, 1) + \beta(1, 0, -2) + \gamma(4, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ -2\alpha \quad\quad - \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ son linealmente independientes

Las coordenadas del (2, –1, 0) en la base B son
$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

23. $\alpha(-2, 2, 1) + \beta(1, 3, -2) + \gamma(1, -4, 6) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 6\gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$$

son linealmente independientes.

Las coordenadas del (–5, –5, 17) en la base B son (3, –1, 2).

24. $x = -\frac{1}{4}$

25. $x = 1$

26. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

27. a) 32 b) –8 c) 50 d) –80

28. a) 35 b) –189 c) –129 d) 130

29. a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) no es posible d) 5 y –1

30. a) 2 b) $\pm\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) –1

31. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2,16 d) $\frac{3}{2}$

32. a) 107° 14' b) 61° 12' 19''

33. $P = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$

$\widehat{A} = 125°\ 15'$; $\widehat{B} = 35°\ 15'\ 51''$; $\widehat{C} = 19°\ 28'\ 16''$

34. $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right)=-44$ ⇒ los cuatro puntos no son coplanarios.

$V=\dfrac{22}{3}$

35. a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-2, 0, 0)$ ⇒ A, B y C no pueden estar alineados.

b) 1

4. r: $\left\{P(0, -5, -1), \vec{u}(1, -2, 3)\right\}$

s: $\left\{P\left(6, \dfrac{2}{3}, 0\right), \vec{u}\left(-2, \dfrac{1}{3}, 1\right)\right\}$

t: $\left\{P\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{25}{4}, 0\right), \vec{u}(0, 1, 1)\right\}$

5. r: $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. La determinación puntual es $\{(0, -5, -1), (1, -7, 2)\}$

s: $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$

La determinación puntual es $\left\{\left(6, \dfrac{2}{3}, 0\right), (3, 1, 1)\right\}$

t: $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. La determinación puntual es

$\left\{\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{25}{4}, 0\right), \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{29}{4}, 1\right)\right\}$

Tema 6 RECTAS Y PLANOS

1.

Ecuación vectorial	$(x, y, z) = (1, 3, -5) + \lambda(5, -1, 6)$	$(x, y, z) = (0, -1, -1) + \lambda(3, 1, 2)$	$(x, y, z) = (1, 0, -5) + \lambda(0, 3, -4)$	$(x, y, z) = (1, 3, 5) + \lambda(0, 1, 0)$
Ecuaciones paramétricas	$\left.\begin{array}{l} x = 1+5\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -5+6\lambda \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3\lambda \\ z = -5-4\lambda \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{array}\right\}$
Ecuaciones continuas	$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+5}{6}$	$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$	$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+5}{-4}$	$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{0}$
Ecuaciones implícitas	$x + 5y - 16 = 0$ $6x - 5z - 31 = 0$	$x - 3y - 3 = 0$ $2x - 3z - 3 = 0$	$x - 1 = 0$ $4y + 3z + 15 = 0$	$x - 1 = 0$ $z - 5 = 0$

2. r: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 2z + 3y - 8 = 0 \end{array}\right\}$; s: $\left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{array}\right\}$

r: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ x - z + 5 = 0 \end{array}\right\}$

3. r: Ecuación vectorial

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, -1)$

Ecuaciones paramétricas $\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$

s: Ecuación vectorial

$(x, y, z) = (-2, -1, -1) + \lambda(0, 2, -6)$

Ecuaciones paramétricas $\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1+2\lambda \\ z = -1-6\lambda \end{array}\right\}$

t: Ecuación vectorial

$(x, y, z) = (-1, 3, 0) + \lambda(1, 1, 1)$

Ecuaciones paramétricas $\left.\begin{array}{l} x = -1+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$

6. $8y - 4z + 16 = 0$

7. P no pertenece al plano $8y - 4z + 16 = 0$

8. $3x + z - 11 = 0$

9. Ecuación vectorial:
$(x, y, z) = (1, 5, -2) + \alpha(2, -1, -1) + \beta(2, 5, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\alpha + 2\beta \\ y = 5 - \alpha + 5\beta \\ z = -2 - \alpha + \beta \end{array}\right\}$

Ecuación general: $x - y + 3z + 10 = 0$

10. Coincidentes.

11. Son paralelos distintos.

12. a) Se cortan en el punto $(1, -1, -1)$

b) Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.

13. Se cortan en el punto $(2, 3, 0)$

14. $m=\dfrac{3}{4}$

15. a) P y Q no pertenecen, R sí pertenece

b) P y R no pertenecen, Q sí pertenece

c) P y Q no pertenecen, R sí pertenece

16.

	Ecuación vectorial	Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones continuas	Ecuaciones implíticas
a)	$(x, y, z) = (2, -3, 0) + \lambda(1, -4, -5)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = -5\lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-5}$	$4x + y - 5 = 0$ $5x + z - 10 = 0$
b)	$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(2, 6, -1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{-1}$	$3x - y = 0$ $x + 2z = 0$
c)	$(x, y, z) = (8, 9, 3) + \lambda(4, -5, -1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 8 + 4\lambda \\ y = 9 - 5\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x-8}{4} = \frac{y-9}{-5} = \frac{z-3}{-1}$	$4y + 5x - 76 = 0$ $x + 4z - 20 = 0$
d)	$(x, y, z) = (2, -2, 1), + \lambda(0, 1, 0)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{0}$	$x - 2 = 0$ $z - 1 = 0$
e)	$(x, y, z) = (1, 1, -3) + \lambda(0, 0, 1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -3 + \lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{1}$	$x - 1 = 0$ $y - 1 = 0$

17. a) No porque C no pertenece a la recta

$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ que pasa por A y B

b) $x + 5y - z - 2 = 0$

18. a) $6x + y + 3z - 17 = 0$

b) $13x + 5y + 32z - 33 = 0$

c) $8x + 13y + 11z - 41 = 0$

19. a) Q sí pertenece b) R sí pertenece

21. a) $b = 3$, la ecuación del plano es: $x + y - z - 1 = 0$

b) $a = 1$, $b = 2$

22. $a - b = 1$

23. La ecuación del plano que pasa por A, B y C es

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$$

Si $a \neq 0$; $b \neq 0$ y $c \neq 0$, dividiendo por abc se obtiene la ecuación canónica.

20.

	Ecuación vectorial	Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones continuas	Ecuaciones implíticas
a)	$(x, y, z) = (2, -3, 0) + \lambda(1, -4, -5)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = -5\lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-5}$	$4x + y - 5 = 0$ $5x + z - 10 = 0$
b)	$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(2, 6, -1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{-1}$	$3x - y = 0$ $x + 2z = 0$
c)	$(x, y, z) = (8, 9, 3) + \lambda(4, -5, -1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 8 + 4\lambda \\ y = 9 - 5\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x-8}{4} = \frac{y-9}{-5} = \frac{z-3}{-1}$	$4y + 5x - 76 = 0$ $x + 4z - 20 = 0$
d)	$(x, y, z) = (2, -2, 1), + \lambda(0, 1, 0)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{0}$	$x - 2 = 0$ $z - 1 = 0$
e)	$(x, y, z) = (1, 1, -3) + \lambda(0, 0, 1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -3 + \lambda \end{array}\right\}$	$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{1}$	$x - 1 = 0$ $y - 1 = 0$

24. Un haz de planos paralelos a $x - y + z = 0$

25. $bcx + acy + abz - abc = 0$

26. a) El punto es el (2,2, –2)
b) $x - y + z + 2 = 0$

27. $a = -4, \ \ x - 5y + 3z + 9 = 0$

28. a) $x - y + 2z = 0$
b) $12x + y + 9z = 0$
c) $x - y - z + 2 = 0$
d) $x + 28y - 25z + 20 = 0$

29. a) se cortan en (–3, 2, –1)
b) se cortan en (1, 1, 1)
c) se cruzan
d) se cruzan

30. $x + 5y + 2z - 2 = 0$

31. $a = \frac{5}{4} \qquad P\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

32. $\left.\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= -5 \\ z &= 2 - \lambda \end{aligned}\right\}$

33. a) Si $a = 2$ y $b = -2$ son coincidentes
Si $a \neq 2$ y $b = -2$ se cortan en (–1, 0, 2)
Si $a = 2$ y $b \neq -2$ son paralelas
Si $a \neq 2$ y $b \neq -2$ se cruzan
b) Siempre son paralelas
Si $a = -1$ serán coincidentes y si
$a \neq -1$ son paralelas distintas
c) Si $a = -2$ y $b = 0$ son coincidentes, en el resto de las posibilidades se cortan en el punto (1, 1, 1)

34. Se cruzan sin juntarse.

35. $a = 2$ y $b \neq 8$ son paralelos
$a = 2$ y $b = 8$ son coincidentes
$a \neq 2$ se cortan en una recta

36. a) paralelas distintas
b) se cortan en una recta de ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (4, -17, 0) + \lambda\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

La determinación vectorial es:

$$\left(P(4, -17, 0), \vec{u}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)\right)$$

c) son coincidentes
d) se cortan en una recta de determinación vectorial

$$\left(P\left(-\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}, 0\right) \vec{u}\left(-\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, 1\right)\right)$$

37. Se cortan en el punto (5, –2, 3)

38. $5x - y + 4z + 7 = 0$

39. $\left.\begin{aligned} x &= 1 - \alpha - 3\beta \\ y &= 1 - 2\alpha \\ z &= 1 + 2\beta \end{aligned}\right\}$

40. La recta es $x = 0$, $y = z = \lambda$, que pasa por el origen.

41. Si $m = \frac{17}{3}$ se cortan en una recta

Si $m \neq \frac{17}{3}$ se cortan en el origen

42. Si $k = 4$ se cortan en una recta
Si $k \neq 4$ se cortan dos a dos en sendas rectas paralelas

43. a) Si $k = -2$ se cortan en una recta
Si $k = \frac{1}{3}$ no tienen ningún punto en común
Si $k \neq -2$ y $k \neq \frac{1}{3}$ se cortan en un punto
b) $\vec{v} = (1, 0, 1)$

44. Se corta con r en $\left(-\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, -\frac{8}{9}\right)$

Se corta con s en $\left(\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$

Contiene a t

45. r está contenida en a

b y r se cortan en $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

c es paralelo a r

46. a) Se cortan en una recta pues $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{1}$

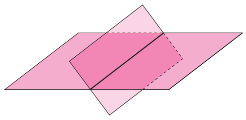
b) $mx + ny + kz = m$ para cualquier valor de m, n y k

47. a) $\begin{cases} x + y + 3z + 1 = 0 \\ -2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

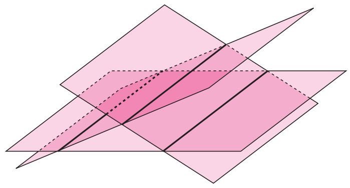
b) $x - 5y + 12z + 4 = 0$

c) $x + 13y - 15z - 5 = 0$

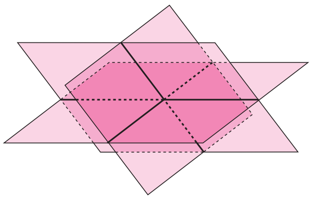
48. 1) Los planos 1° y 3° coinciden y se cortan con el 2°



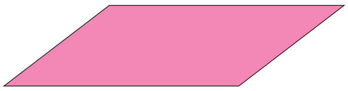
2) Los tres planos son distintos y se cortan dos a dos.



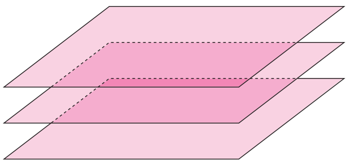
3) Los tres planos se cortan en un punto.



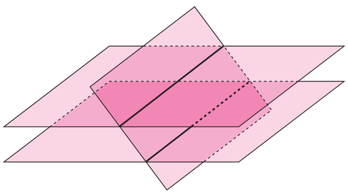
4) Los tres planos coinciden.



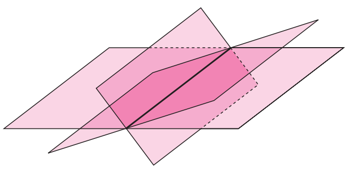
5) Los tres planos son distintos y paralelos dos a dos.



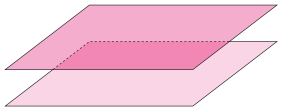
6) Los planos 1° y 3° son paralelos y se cortan con el 2°.



7) Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.



8) Los planos 1° y 3° coinciden y son paralelos al segundo.



49. $x - 5y + 2z - 3 = 0$

50. $5x - y - 7z - 3 = 0$

51. $a = -1; \quad x - y - z + 1 = 0$

52. Si lo corta

53. a) $k = 4$

b) $x + 2y - z + 5 = 0$

54. $13x - 7y + 9z - 38 = 0$

Tema 7 PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL ESPACIO

1. Vector director de la recta (3, 4, 2), vector director del plano (2, –1, –1).

Como $(3, 4, 2) \cdot (2, -1, -1) = 0 \Rightarrow$ son perpendiculares

Todos los puntos de la recta son de la forma $(-2 + 3\lambda, 4\lambda, 3 + 2\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como $2(-2 + 3\lambda) - 4\lambda - (3 + 2\lambda) + 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow$ Ningún punto de r pertenece a π.

2. a) $\alpha = \text{arcsen}\ \dfrac{5}{6} \simeq 56°\ 26'\ 33''$

3. a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 44°\ 37'\ 58''$

4. a) $\alpha = 90°$ son perpendiculares

b) $\alpha = 78°\ 25'\ 28''$

c) $\alpha = 72°\ 27'\ 6''$

5. 0

6. $d = \dfrac{\sqrt{74}}{74}$

7. $d = \dfrac{1}{2\sqrt{21}}$

8. $d = \dfrac{7\sqrt{59}}{59}$

9. $d = \dfrac{2}{15}\sqrt{555}$

10. $d = \sqrt{3}$

11. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$

La mínima distancia entre ambas, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, es la distancia entre los puntos (1, 0, 0) de r y $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ de s.

12. a) arccos $\dfrac{2}{\sqrt{145}} \simeq 80° \, 26' \, 22''$

b) arccos $\dfrac{17}{9\sqrt{7}} \simeq 44° \, 26' \, 39''$

c) 90°

d) arccos $\sqrt{\dfrac{2}{55}} \simeq 79° \, 0' \, 24''$

13. a) $\alpha = 33° \, 12' \, 34''$

b) $\alpha = 35° \, 15' \, 51''$

c) $\alpha = 90°$

d) $\alpha = 0°$

e) $\alpha = 90°$

14. a) arcsen $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \simeq 35° \, 15' \, 52''$

b) 0°

c) arcsen $\dfrac{17}{\sqrt{290}} \simeq 86° \, 38' \, 1''$

d) arcsen $\sqrt{\dfrac{8}{597}} \simeq 6° \, 38' \, 51''$

15. $d((4, -1, 1), (3x - y + 3z - 2 = 0)) = \dfrac{14\sqrt{19}}{19}$

16. a) $3x + 4z - 3 = 0$ b) $d = \dfrac{1}{5}$

17. (1, 4, –7); $d = 2\sqrt{14}$

18. $d = \sqrt{26}$

19. Están a la misma distancia del origen porque son paralelos y el valor absoluto de sus términos independientes son iguales

$d = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

20. $4x + 4y + 4z - 3 = 0$

21. El vector director del plano (3, –2, 1) y el vector director de la recta (1, 2, 1)son perpendiculares.

$d = \sqrt{14}$

22. $d = \sqrt{651} \simeq 25{,}51$

23. (3, –2, 4); $d = \sqrt{3}$

24. $d = \dfrac{3\sqrt{798}}{38} \simeq 2{,}23$

25. a) $d = \sqrt{\dfrac{79}{45}}$ b) $d = \dfrac{11\sqrt{30}}{30}$

26. dos planos; $2x - 2y + z = 0$; $z = 0$

27. a) (1, 1, –1)

b) $2x + y + 3z - 4 = 0$

c) $d = \dfrac{\sqrt{14}}{42}$

28. $d = c\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

29. $d = \sqrt{6}$

30. a) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ b) $R(2, 2, 2)$

31. a) 13; b) 3; c) 7

32. a) $x + y - 2z = 0$ b) $r = \dfrac{1}{2}$

33. $2x + y \pm z - 2 = 0$

34. $a = 1$ y el punto $A(-1, 1, 0)$

35. a) Si $A = (1, 1, \lambda)$, $B = (0, 1, 1 - \lambda)$ y $C = (1, -2, \lambda)$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ nunca pueden ser linealmente dependientes (proporcionales).

b) $A = \frac{3}{2}\sqrt{2 + 4\lambda^2 - 4\lambda}$

36. $V = 3$

37. a) $x - z + 2 = 0$

b) Se cortan en el punto $(4, -1, 5)$ y por tanto no tiene sentido hablar de la distancia entre ambos.

38. a) $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$

b) $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$

c) $d = \sqrt{2}$

39. $D = (0, 8, 0)$ ó $D = (0, -7, 0)$

40. a) $A(4a, -2a, a)$; $B(a, -2a, 4a)$; $C(4a, a, 4a)$; $D(a, a, a)$

b) $V = 9a^3$

41. a) $x - y + 2z - 2 = 0$ b) $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

42. a) $d(A, \pi) = 2$ b) $A'\left(-\frac{26}{5}, 1, -\frac{8}{5}\right)$

43. $\pi: x - 3y + 7z + 5 = 0$ $d(0, \pi) = \frac{5}{\sqrt{59}}$

44. a) $a = 3$ y $a = -3$ b) $r: \begin{cases} -x + y + 3z - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

45. $r: x = y = z$

plano paralelo a π que pasa por B: $x - y - 1 = 0$

$d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

46. a) Son perpendiculares b) $2x - z - 5 = 0$

47. a) Se cortan en un punto

b) Punto de corte $(2, 4, -1)$, $\alpha = 60°$

48. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

49. a) $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $x - y + 2z + 3 = 0$

50. a) 1 b) $\frac{27}{8}$. No es rectángulo

51. a) Plano equidistante a A y B: $x + y + 2z = 0$

$C\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

b) $\frac{\sqrt{66}}{2}$

52. a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{6}$

53. a) Se cruzan sin cortarse b) 2

54. 192 u.v.

55. a) El plano perpendicular a r que pasa por P es:

$x + y - 2z - 1 = 0$

$s: \begin{cases} y = -1 \\ x - 2z = 2 \end{cases}$

b) $Q(0, -1, -1)$

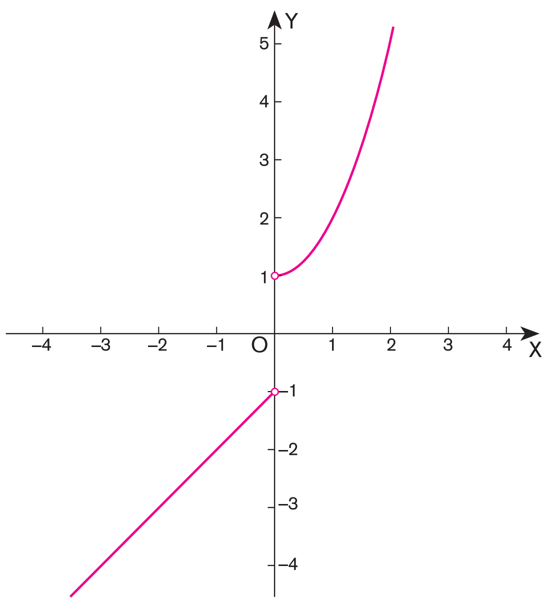
c) $(-2, -1, -2)$

56. a) $a = 1$ b) $\frac{x-1}{30} = \frac{y}{-13} = \frac{z+1}{-5}$

Tema 8 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

1. a) 2; b) 3; c) 0; d) No

2. a)

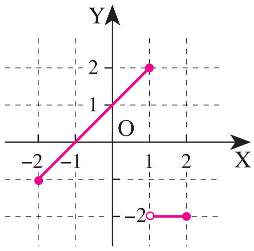


b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$

c) No

d) No

3. Por ejemplo



4. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -2} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1} g(x) = -1$

$\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$

5.

x	1	1,9	1,99	1,999... → 2
$f(x)$	1	6,22	6,9202	6,992 ... → 7

x	3	2,1	2,01	2,001... → 2
$f(x)$	17	7,82	7,0802	7,008 ... → 7

$\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

6. a) $\frac{1}{3}$; b) 10; c) –3

7. $2{,}998 < x < 3{,}002$

8. 11

9. a) F; b) V; c) V; d) F

10.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999 ... → 1^-
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999 ... → 4

x	1,1	1,01	1,001	1,0001 ... → 1^+
$f(x)$	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001 ... → 0

a) Si; b) No

11. $\forall\varepsilon > 0$ hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que si

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{3x+2}{5} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3x+2}{5} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3x-3}{5}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{3x-3}{5} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5\varepsilon}{3} < x - 1 < \frac{5\varepsilon}{3} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{5\varepsilon}{3} = \delta$$

12. $\left]-1 - \frac{1}{300}, -1 + \frac{1}{300}\right[\simeq \left]-1{,}003,\ -0{,}997\right[$

13. $\delta = \frac{3\varepsilon}{2}$

14.

x	10	100	1003	10003 ... → $+\infty$
$f(x)$	3	2,072	1,004	2,0007 ... → 2

x	–10	–100	–997	–9997 ... → $-\infty$
$f(x)$	1,462	1,932	1,993	1,9993 ... → 2

a) 2

b) 2

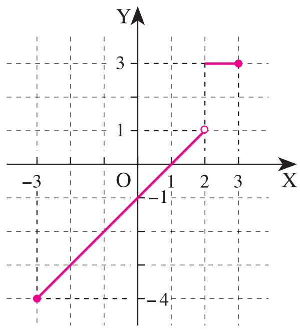
15.

$$\lim_{x\to -2^-} |x^2 - 4| = \lim_{x\to -2^+} |x^2 - 4| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to -2} |x^2 - 4| = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} |x^2 - 4| = \lim_{x\to 2^+} |x^2 - 4| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2} |x^2 - 4| = 0$$

16. a) 2; b) 2; c) 2; d) 0; e) –1; f) no existe; g) 1; h) 2

17. Por ejemplo



18. a) $\frac{1}{3}$; b) 0; c) 0; d) 3

19. Si

20. $y = 1$

21. No

22. $k = 700$

23. $\forall \varepsilon > 0$ hemos de encontrar un k tal que si

$$x < k \Rightarrow \left|\frac{4x-1}{2x+1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{4x-1}{2x+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-3}{2x+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{-3}{2x+1} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{(puesto que } 2x+1<0) \Rightarrow -\frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon} > x \Rightarrow k = -\frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

24.

x	1	1,9	1,99	1,999 … → 2^-
$f(x)$	–0,333	–4,872	–49,875	–499,875 … → $-\infty$

x	3	2,1	2,01	2,001 … → 2^+
$f(x)$	0,6	5,122	50,125	500,125 … → $+\infty$

a) Si $(-\infty)$
b) Si $(+\infty)$

25. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$

26. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty/+\infty$

27. Si

28. $x = -2$ y $x = 1$

29. $\forall k < 0$ hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que si

$$|x-1| < \delta \Rightarrow \frac{3}{(x-1)^2} > k$$

$$\frac{3}{(x-1)^2} > k \Leftrightarrow \frac{3}{k} > (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-1| < \sqrt{\frac{3}{k}} = \delta$$

30. a) $\forall k > 0$ hemos de encontrar $\delta > 0$ tal que si

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow \frac{3}{x^2-1} < k$$

$$\frac{3}{x^2-1} < k \Leftrightarrow \frac{3}{k} < x^2 - 1$$

pues $k < 0$ y $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x > \sqrt{\frac{3}{k} + 1} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{k}\right)} > 1 - \sqrt{\frac{3}{k}}$$

pues $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b} \Rightarrow \delta = \sqrt{-\frac{3}{k}}$

b) $\forall k > 0$ hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que si

$$1 < x < 1 + \delta \Rightarrow \frac{3}{x^2-1} > k$$

$$\frac{3}{x^2-1} > k \Leftrightarrow \frac{3}{k} > x^2 - 1 \text{ pues } k > 0 \text{ y } x^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{k} > x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1+\frac{3}{k}} < x < \sqrt{1+\frac{3}{k}} < 1 + \sqrt{\frac{3}{k}}$$

pues $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{3}{k}}$

31. a) V; b) F; c) F; d) V

32. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty/+\infty$

Tema 9 CÁLCULO DE LÍMITES. CONTINUIDAD

1. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$
e) 1 f) $+\infty$ g) $-\infty$ h) 0
i) –2 j) $+\infty$ k) 0 l) 0

2. a) $-\frac{7}{4}$; b) $-\infty$; c) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha; d) $e^{8/5}$

3. a) V b) V c) F d) V

4. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0
d) 3 e) $-\infty$ f) $+\infty$
g) 0 h) 3

5. a) $\frac{1}{3}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 0
d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

6. a) 1 b) 0 c) 0
d) 0 e) $+\infty$
f) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha.

7. a) 0 b) 2 c) $\frac{2}{3}$
d) $+\infty$ e) 0 f) 0

8. a) $+\infty$; b) 0; c) 1; d) $+\infty$; e) 1; f) 0

9. a) 1 b) 0 c) $\frac{2}{3}$

d) 2 e) $+\infty$ f) 10

10. a) 0 b) 1

c) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha;

d) 2 e) -2 f) $-\infty$

11. a) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha

b) 0 c) $+\infty$ d) 0

e) $+\infty$ f) e^3

12. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$

d) e^{-1} e) $e^{-\frac{4}{7}}$ f) $+\infty$

13. a) $+\infty$ b) $\frac{3}{2}$ c) 4

d) -2 e) 3 f) $+\infty$

14. a) $-\infty$ b) 0 c) 0

d) e^9 e) 0 f) 0

15. a) e^{4a} b) 1 c) -2

d) $\frac{1}{8}$ e) $+\infty$ f) $\frac{1}{2}$

16. a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$; c) $e^{-\frac{1}{7}}$;

d) $-\frac{1}{2}$; e) e^{-3}; f) 0

17. a) 1 b) $-\infty$

c) $-\frac{5}{2}$ d) 5

e) $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha

18. a) 0 b) 0 c) $-\infty$ d) $+\infty$

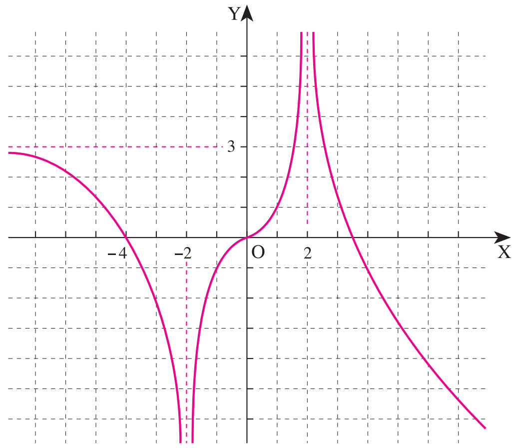
19. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\infty$ d) $+\infty$

20. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) 0; d) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha.

21. a) $+\infty$ b) 0

22. $f(3) = \frac{5}{2}$; $\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{5}{2}$. Sí es continua en $x = 3$

23. Por ejemplo

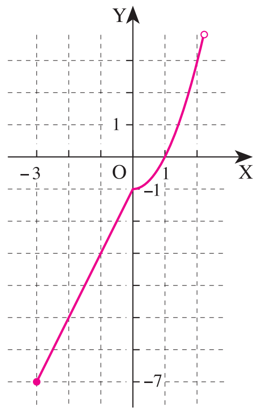


24. No es continua en $x = 1$ ni en $x = \frac{1}{2}$

25. Es continua en $x = 2$ y en R

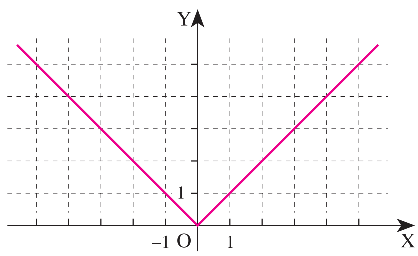
26. $f(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 2} = 0$

27.

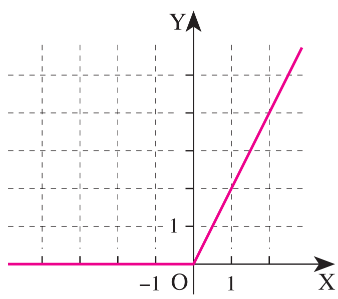


Es continua en $x = 0$ y en $[-3,2[$. En R no es continua

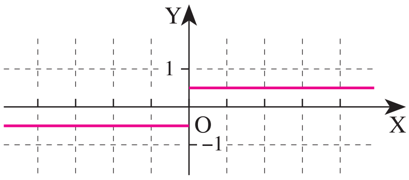
28. a) Continua



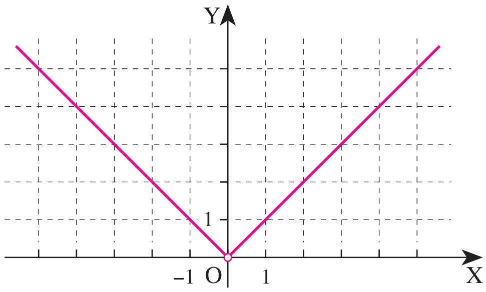
b) Continua



c) Discontinua de salto finito. Salto 1



d) Discontinuidad evitable. Verdadero valor 0



29. a) $x = -3$ discontinuidad de salto infinito

b) $x = \frac{4}{3}$ discontinuidad de salto infinito

c) $x = -3$ y $x = 3$ discontinuidades de salto infinito

d) $x = \frac{2}{3}$ discontinuidad evitable. Verdadero valor 4

e) $x = -3$ discontinuidad evitable. Verdadero valor 0
$x = 3$ discontinuidad de salto infinito

f) $x = 1$ discontinuidad evitable. Verdadero valor $\frac{1}{3}$

g) $x = -3$; $x = -1$ y $x = 0$ discontinuidades de salto infinito

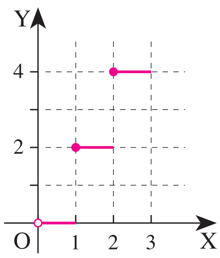
h) continua en $[-3, +\infty[$

i) continua en $]-\infty, -3[\cup [3, +\infty[$

30. a) Si; b) Si; c) No

31. En $x = -1$ tiene una discontinuidad evitable con verdadero valor –1

32.

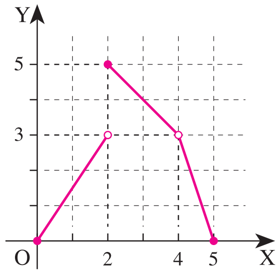


Es discontinua en $x = 1$ y $x = 2$. Ambas discontinuidades son de salto finito de 2 unidades

33. a) $x = 1$ y $x = -1$

b) Es evitable la discontinuidad en $x = 1$. Verdadero valor $\frac{1}{2}$

34. Por ejemplo



35. a) Es discontinua en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = \frac{5}{2}$

b) $x = \frac{5}{2}$

c) En $x = 0$, salto 2; en $x = 2$, salto 1

d) En $x = 0$ es continua a la izquierda; en $x = 2$ es continua a la derecha y los otros puntos no tienen continuidad lateral

36. Si; No; Si; Si; No; Si; Si; No; No; Si

37. a) $[-5, -4] \cup]-4, -2[\cup]-2, -1[\cup]-1, 1[\cup [1, 3[\cup]3, 4[\cup [4, 5]$

b) $x = -4$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$

c) En $x = -4$ salto –2; en $x = -2$ verdadero valor –1; en $x = 3$ verdadero valor 2 y en $x = 4$ salto –2

38. $a = 3$. Verdadero valor $\frac{1}{6}$

39. a) R b) R c) R

d) $]-\infty, -5[\cup]-5, 5[\cup]5, +\infty[$

e) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

f) $[-2, 2]$

g) $]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]3, +\infty[$

h) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

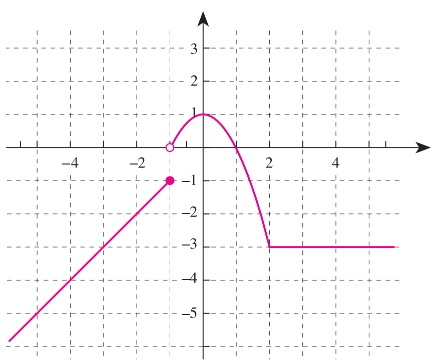
40. $a = 1$; $b = -2$

41. El máximo absoluto en $x = a$ y el mínimo absoluto en $x = b$.

42. $a = \lambda$ y $b = -\lambda$ para todo λ real.

43. a) En $x = -1$ no es continua, en $x = 2$ sí es continua

b)



44. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ es continua en $[0, 1]$, signo $(f(0)) \neq$ signo $(f(1))$. Entonces, por el teorema de Bolzano existe al menos un c tal que $f(c) = 0$. c es la raíz de la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

Tema 10 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1. a) $f'(2) = 3$ b) $g'(1) = -4$

c) $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ d) $j'(-1) = 1$

2. a) $f'(x) = 6x + 8$ b) $g'(x) = 8 + 2x$

c) $h'(x) = 1 + x$ d) $j'(x) = -\frac{2}{x^2}$

3. a) $f'(x) = 2x$; R

b) $g'(x) = 10x^4 + 12x^3 - 6x^2$; R

c) $h'(x) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $]0, +\infty[$

4. a) $f'(x) = 2x\left(\sqrt{x} + 3x^3\right) + (2 + x^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 9x^2\right)$

b) $g'(x) = \frac{15x\sqrt{x}}{2}$

c) $h'(x) = 2\left(\sqrt{x} - 5\right) + \frac{2x - 3}{2\sqrt{x}}$

5. a) $f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 3)^2}$; R

b) $g'(x) = 5x\sqrt{x}$; $[0, +\infty[$

c) $h'(x) = \frac{-5}{2x\sqrt{x}}$; $]0, +\infty[$

6. a) $f'(x) = \frac{-\sqrt{x}}{x^2} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $]0, +\infty[$

b) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$; $]0, +\infty[$

c) $h'(x) = -12x^3 + 3x^2 + 40x - 7$; R

7. a) $f'(x) = \frac{-3}{x^4} + \frac{2}{x^2}$; $R - \{0\}$

b) $g'(x) = \frac{x - 6}{2x\sqrt{x}}$; $]0, +\infty[$

c) $h'(x) = \frac{-x + 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$; $]0, +\infty[$

8. a) $y' = 2x^{\ln(x)-1} \ln x$

b) $y' = 5(3x)^{5x}(1 + \ln(3x))$

c) $y' = (2 + x^3)^{x+1}\left(\frac{3x^2(1 + x)}{x^3 + 2} + \ln(x^3 + 2)\right)$

d) $y' = (x^2 + 3x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x + 3}{x(x^2 + 3x)} - \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x^2}\right)$

9. Es derivable en R

10. Es derivable en R

11. No es derivable en $x = 4$. La derivada por la izquierda es -4 y por la derecha 4.

12. a) $a = 2$, $b = -7$

b) tangente: $y = 13x - 13$

normal: $x + 13y - 341 = 0$

13. Recta tangente: $5x + y - 22 = 0$

Punto de corte $(4, 2)$

14. a) $f'(2) = -2$; b) $g'(-2) = -6$; c) $h'(0) = 0$

15. a) t: $y - 3x$; n: $y = \frac{1}{3}x$

b) t: $y = 5x + 5$; n: $y = \frac{-1}{5}x - \frac{27}{5}$

c) t: $y = \frac{-1}{4}x + \frac{3}{4}$; n: $y = 4x - \frac{7}{2}$

16. a) tangente: $y = -2x + 5$

normal: $x - 2y + 20 = 0$

b) tangente: $y = 2x + 1$

normal: $x + 2y - 2 = 0$

c) tangente: $y = -x$

normal: $x - y - 2\pi = 0$

d) tangente: $y = \frac{1}{3}x - 1 + \ln 9$

normal: $3x + y - 9 - \ln 9 = 0$

17. $(0, 0)$ y $(2, -2)$

18. a) $a = \frac{1}{2}$; b) No es derivable en $x = 2$

19. a) $M(t) = (1, 2t)$
b) $m(t) = 2t$
c) $m'(t) = 2$

20. a) $y' = 3x^2 + 4x - 4$
b) $y' = 10x^4 - 28x^3 + 6x - 1$
c) $y' = -15x^4 + 8x^3 + 42x^2 - 20x + 5$

21. a) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1$

b) $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2} - 2x$

c) $y' = 2(\sqrt{x} - 5) + \frac{2x - 3}{2\sqrt{x}}$

d) $y' = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 5)^2}}$

e) $y' = 5x\,(x^3 + x^2 + 1)^4\,(3x + 2)$

f) $y' = 8x\,(x^2 - 1)^3$

22. a) $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

b) $y' = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$

c) $y' = \frac{5}{2}\,x\sqrt{x}$

d) $y' = 2x \cos\,(x^2 + 5)$

e) $y' = -3 \cos^2\,(x + 3)\,\text{sen}\,(x + 3)$

f) $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

23. a) $y' = \frac{-2}{x^3}$ b) $y' = \frac{10}{3x^6}$

c) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ d) $y' = \frac{2x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^4}}$

e) $y' = \frac{5}{2(x + 5)\sqrt{x(x + 5)}}$ f) $y' = \frac{-2x - 3}{x^4}$

24. a) $y' = -\frac{1}{x}$

b) $y' = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $y' = \frac{-2}{x(x + 2)\ln 10}$

d) $y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$

e) $y' = \frac{1}{\text{sen}\,x\,\cos x} = \frac{2}{\text{sen}\,x}$

f) $y' = \frac{2}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}$

25. a) $y' = \frac{-5}{(x - 2)^2}$

b) $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$

c) $y' = \frac{x - 1}{2x\sqrt{x}}$

d) $y' = \frac{-2}{(\cos x - \text{sen}\,x)^2}$

e) $y' = \frac{\cos\,(x + 1)}{\cos\,(3x - 2)} + \frac{3\,\text{sen}\,(x + 1)\,\text{sen}\,(3x - 2)}{\cos^2\,(3x - 2)}$

f) $y' = \frac{-\text{sen}\,x}{2\sqrt{2(1 + \cos x)}}$

26. a) $y' = 2e^{2x} + 3$ b) $y' = \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{x - 2}}$

c) $y' = -3^{1-x} \cdot \ln 3$ d) $y' = 2x + 3x^2$

e) $y' = 2x \cos\,(x^2 + 1) - e^{5-x}$

f) $y' = (5^x - 5^{2-x}) \ln 5$

27. a) $y' = \frac{3(x + 7)}{2\sqrt{x + 7}}$

b) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 3)^2}}$

c) $y' = \frac{(2x + 3)\,(2x^2 - 3x + 4)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

d) $y' = 2 \cos x^3 \cos(2x) - 3x^2\,\text{sen}\,x^3\,\text{sen}\,(2x)$

e) $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

f) $y' = \frac{2x\,\text{sen}\,(x^2 + 3)}{\cos^2(x^2 + 3)}$

28. a) $y' = \frac{-5}{2x^3\sqrt{x}}$ d) $y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $y' = \frac{x(2x^2 - 5)}{3(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$ e) $y' = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$

c) $y' = \frac{3x\,\text{sen}\,3x^2}{\sqrt{1 - \cos 3x^2}}$ f) $y' = \frac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

29. a) $y' = \frac{3}{x}$

b) $y' = \frac{3}{x}$

c) $y' = \frac{1}{x}$

d) $y' = \frac{2x\cos(x^2+1)}{\operatorname{sen}(x^2+1)} = 2x \operatorname{ctg}(x^2+1)$

e) $y' = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}}$

f) $y' = 1 + \ln x$

30. a) $y' = \log_3 x + (x+2) \cdot \frac{1}{x \ln 3}$

b) $y' = 2x \log_5 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 5}$

c) $y' = 2 \log_2 x + 2x \cdot \frac{1}{x \ln 2}$

d) $y' = 5^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x$

e) $y' = (\ln 2)^x \ln(\ln 2)$

f) $y' = \ln 2$

31. a) $y' = 2x \cos x^2$

b) $y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

c) $y' = 0$

d) $y' = 6x \operatorname{sen}^2(x^2+5)\cos(x^2+5)$

e) $y' = -(3x^2+1)\operatorname{sen}(x^3+x)$

f) $y' = \frac{2}{\cos^2(2x+1)} = 2(1 + \operatorname{tg}^2(2x+1))$

32. a) $y' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot e^x + 2^x e^x$

b) $y' = (6x-4)(1+\operatorname{tg}^2(3x^2-4x))$

c) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

d) $y' = (1+x)^{\frac{1-x}{x}} \left[\frac{1}{x} - \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\right]$

e) $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left[\ln x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]$

f) $y' = (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$

33. a) $y' = 10^x \cdot \ln 10 + 10x^9$

b) $y' = 1$

c) $y' = 7e^x$

34. a) $y' = \frac{6x^2+1}{2x^3+x}$; b) $y' = \frac{1}{2x(x+1)}$; c) $y' = \frac{1}{2x}$

35. a) $y' = \frac{x}{(x^2+2)\ln 2}$

b) $y' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 10}$

c) $y' = \frac{1}{x \ln x}$

36. a) $y' = 7 \operatorname{sen}(1-7x)$

b) $y' = 3(8x-8)\cos(4x^2-8x+5)$

c) $y' = -\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) \cdot (1+\operatorname{tg}^2 x)$

37. a) $y' = \frac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$

b) $y' = \frac{2\ln 2x}{x} + 1$

c) $y' = \frac{1}{(x^2+x)\ln 2}$

38. a) $y' = (2x)^{1-3x}\left[-3\ln 2x + \frac{1-3x}{x}\right]$

b) $y' = (\operatorname{sen} x)^{x-1}[\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + x\cos x]$

c) $y' = 3^{\cos x} + x \cdot 3^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) \cdot \ln 3$

39. a) $y' = \frac{\ln 2}{2}$

b) $y' = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\sqrt{x}}$

c) $y' = 2$

40. a) $y' = x^x(\ln x + 1)$

b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$

41. $P(-1, -8)$

42. $P(e, 0)$

43. $(3+p)x - y - 2 = 0$

$p = -2$

44. $a = 1$

45. a) $f'''(x) = 120x - 24$

b) $f'''(x) = \frac{-12}{x^4} + \frac{96}{x^5} - \frac{360}{x^6}$

c) $f'''(x) = e^x - e^{-x}$

46. $f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x>0 \\ 1+2x & \text{si } x<0 \end{cases}$

47. a) $df(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}dx$

b) $dg(x) = (25x\cos(5x) + 5\,\text{sen}(5x))\,dx$

c) $dh(x) = \dfrac{-6}{\cos^2(2x)}dx = -6\left(1+\text{tg}^2(2x)\right)dx$

48. $\Delta V \simeq 0{,}003\ m^3$

49. a) $y + 2ax - a^2 - 1 = 0$

b) $A(0, a^2+1);\ B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$

c) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

50. $y = \left(1+\sqrt{5}\right)x - \dfrac{4+\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}$

Tema 11 TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

1. a) Porque no es derivable en $]a,b[$

b) Porque no es continua en $[a,b]$

c) Porque no es derivable en $]a,b[$

d) Porque $f(a) \neq f(b)$

2. $x_0 = -1$

3. No, porque no existe $f'(3)$ y $3 \in]1,5[$

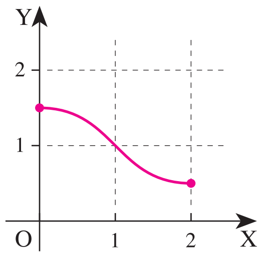
4. $f(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en ese intervalo, por tanto, existe al menos un punto $x_0 \in]\pi/3, 2\pi/3[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

5. $k = 7;\quad x_0 = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

6. No porque no es continua en $\dfrac{\pi}{2}$

7. Se cumple el teorema del valor medio o de Lagrange. El punto es el $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$

8. a)



b) $x_0 = \dfrac{1}{2}$ y $x_0 = \sqrt{2}$

9. $x_0 = \dfrac{14}{9}$. No se verifica en el intervalo $[-1, 2]$ porque $f'(x)$ y $g'(x)$ se anulan simultáneamente en $x = 0$ y $x = \dfrac{2}{3}$

10. 2

11. $\ln a - \ln b$

12. $\dfrac{14}{3}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(7x)\,\text{sen}(12x)}{x\,\text{sen}(8x)} = \frac{21}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(7x)\,\text{sen}(12x)}{x\,\text{sen}(8x)} = -\frac{3}{\pi}$

14. $a = -3,\ b = \dfrac{9}{2}$

15. Por el teorema de Rolle ya que $f(x)$ es continua en $[0, 1]$, derivable en $]0, 1[$ y $f(0) = f(1) = k$

16. No porque no existe $f'(1)$

17. $x_0 = 2$

18. Como es $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$, luego lo propuesto equivale a demostrar que

$$\ln(1+t) > \frac{t}{1+t} \quad \text{con } t > 0 \text{ siendo } t = x^2$$

Aplicando el T.V.M. a la función $f(x) = \ln(1+t)$ en $[0, t]$, que es derivable en $]0, t[$ tenemos:

$$\ln(1+t) - \ln(1+0) = \frac{1}{1+t_0}(t-0), \text{ es decir:}$$

$$\ln(1+t) = \frac{t}{1+t_0} \quad \text{con } 0 < t_0 < t$$

Cuando $t_0 < t$ es $1 + t_0 < 1 + t$, luego $\frac{1}{1+t_0} > \frac{1}{1+t}$

y así: $\frac{t}{1+t_0} > \frac{1}{1+t}$

Por tanto: $\ln(1 + t) > \frac{t}{1+t}$ con $t > 0$

Otra forma de hacerlo, aunque no es lo que se pide, es demostrando que la función $f(x) = \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$ pues su derivada es $f'(x) = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2}$.

Así es $f(x) > f(0) = 0$ en $[0, +\infty[$ y se verifica la tesis en $[0, +\infty[$.
Análogamente se probaría en $]-\infty, 0]$.

19. Sea $f(x) = e^x$. Por el teorema del valor medio en el intervalo $[1, x]$ se tiene $e^x - 1 = e^{x_0} \cdot x \Rightarrow e^x - 1 > x$ pues al ser $x_0 > 1$ es $e^{x_0} > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x$

20. Sea $f(x) =$ sen x. Por el teorema del valor medio en el intervalo $[x, x + h]$ se tiene

$$\text{sen}\,(x + h) - \text{sen}\,x = \cos x_0\,(x + h - x)$$

con $x < x_0 < x + h$.

21. Sea $f(x) = \ln x$. Por el teorema del valor medio en el intervalo $[1, 1 + x]$ se tiene $\ln(1 + x) = \frac{1}{x_0} x$ con $x_0 > 1 \Rightarrow \ln(1 + x) < x$

22. $f(x)$ es continua en $[-1, 2]$, derivable en $]-1, 2[$ y $f(-1) = f(2)$ entonces existe, al menos, un $x_0 \in]-1, 2[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Este x_0 es $\frac{\sqrt{37} - 4}{3} \simeq 0{,}69$

23. Consideremos la función $f(x) = e^x - x - 1$. Se verifica que $f(0) = 0$.

Si la función tuviera dos ceros distintos, estos serían 0 y x_1, es decir, $f(0) = f(x_1) = 0$ y, por el teorema de Rolle, existiría un valor $x_0 \in]0, x_1[$ en el que $f'(x_0) = 0$. Pero $f'(x) = e^x - 1 \neq 0$ en $]0, x_1[$ y contradice el teorema de Rolle, luego la hipótesis de que tuviera dos ceros distintos es falsa.

24. La función es continua en $[0, 2]$ pero no es derivable en $x = 1$ pues $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ luego no verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

25. Ambas son continuas en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivables en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sus derivadas se anulan en $x = \frac{\pi}{2}$, que no pertenecen al intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Luego sí es aplicable el teorema de Cauchy.

26. La función $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ es estrictamente creciente en $[1, +\infty[$ pues su derivada $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$ es positiva si $x > 1$.
Así, si $x > 1$ es $f(x) > f(1) = 0$, luego $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, si $x > 1$.

27. Aplicamos el T.V.M. a la función $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $[1, x]$

$$2\sqrt{x} - 2 = \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-1) \quad \text{con } x_0 \in [1, x]$$

Pero $\frac{x-1}{\sqrt{x_0}} > \frac{x-1}{x}$, con $x > 1$,

por tanto $2\sqrt{x} - 2 > \frac{x-1}{x}$ luego $2\sqrt{x-2} > 1 - \frac{1}{x}$ y

de aquí se deduce: $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, con $x > 1$

28. Si $f(x) = \sqrt{x}$ aplicando el T.V.M. en $[15, 16]$, tenemos:

$4 - \sqrt{15} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(16 - 15)$, luego $\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ y como $15 < x_0 < 16$ podemos tomar como valor extremo $x_0 = 16$ y así $\sqrt{15} \approx 4 - \frac{1}{2\sqrt{16}} \approx 3{,}875$

29. No, pues la función no es continua en $x = 2$

30. a) Aplicando el teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = \text{tg}\,x$ y $g(x) = x$ en $[0, x]$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se tiene: $\frac{\text{tg}\,x - 0}{x - 0} = \frac{1 + \text{tg}^2 x_0}{1} > 1$. Luego tg $x > x$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) Aplicando el T.V.M. a la función $f(x) = \text{arctg}\,x$ en $[0, x]$

$$\text{arctg}\,x = \frac{1}{1+x_0^2}(x - 0) = \frac{x}{1+x_0^2} \quad \text{con } x_0 \in [0, x]$$

Si damos a x_0 los valores extremos del intervalo $[0, x]$ se obtiene:

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{arctg } x < x \text{ con } x > 0$$

31. $x_0 = \frac{5}{2}$

32. $x_0 = \frac{1}{2}$

33. $x_0 = \frac{\pi}{4}$

34. El límite propuesto no tiene valor 4 para ningún valor de *a*.

35. a) $\frac{1}{6}$ b) 1

36. a) $\frac{1}{405}$ b) $\frac{k}{h}$

37. a) 0 b) 5

38. a) $\frac{a^2}{b^2}$ b) $+\infty$

39. a) 1 b) $\frac{1}{2}$

40. a) e^{-1} b) $\ln a - \ln b$

41. a) 3 b) 0

42. a) 1; b) e

43. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{ab}$

44. Aplicamos el T.V.M. a la función $f(x) = \cos x$ en $[a, b]$

$\cos b - \cos a = -\text{sen } x_0 \, (b - a)$ de donde

$-\text{sen } x_0 = \frac{\cos b - \cos a}{b - a}$ como $-1 \leq -\text{sen } x_0 \leq 1$ se

tiene $-1 \leq \frac{\cos b - \cos a}{b - a} \leq 1$ de donde:

$\cos b - \cos a \leq b - a.$

45. La función es continua y derivable al ser polinómica y además es $f(0) = f(1) = a$. Como $f'(x) = 3x^2 - 1$, la tesis se cumple para $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

46. $a = b = 1$

47. $a = \frac{1}{3}$

48. $\lim_{x \to 0} (\cos x + \text{sen } x)^{\frac{1}{x}} = e$

49. 2

50. Es continua y derivable en $x = 2$ cuando $a = -2$, $b = 4$

51. a) 2 b) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

52. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$

53. a) 1 b) -1

54. a) $\frac{1}{2}$

b) por la izquierda $-\infty$, por la derecha $+\infty$

55. a) 0 b) 0

56. a) 1; b) -1

Tema 12 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1. a) Creciente b) Creciente
c) Creciente d) No es creciente ni decreciente

2. Su derivada es siempre negativa.

3. a) mínimo en $(-3, -4)$

b) máximo en $(1 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$;

mínimo en $(1 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$

c) mínimo en $\left(\sqrt[3]{2}, \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d) mínimo en $(0, 0)$

e) mínimo en $\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{27}{256}\right)$

f) no tiene máximos ni mínimos

4. a) cóncava en R. Mínimo en (0, 0). Sin inflexiones

b) mínimo (5, –60), máximo (–1, 48). Inflexión (2, –6)

c) convexa en $]-\infty, 3[$, cóncava $]3, +\infty[$. Sin inflexiones

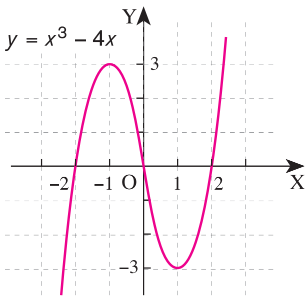
d) mínimo (–1, –3), máximo (1, 3). Inflexiones en (0, 0),

$\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

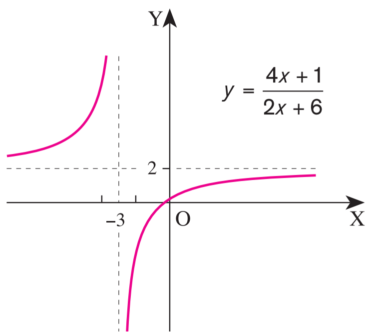
convexa $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[$;

cóncava $]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

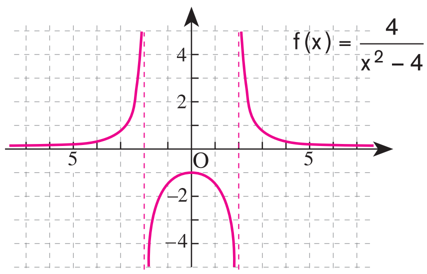
5. a)



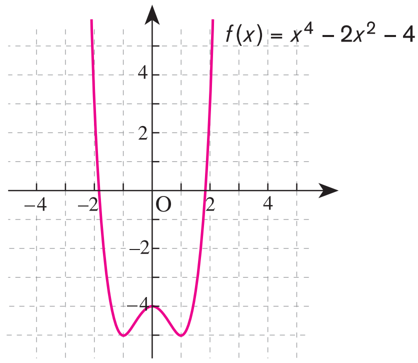
b)



c)



d)



6. Creciente en $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

Decreciente en $]-3, 2[$

Máximo en $\left(-3, \dfrac{43}{2}\right)$; Mínimo en $\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$

7. $f'(x) = 15x^2 \Rightarrow$ es creciente en R

8. a) Mínimos en (0, 0) (12, 0), máximo (6, 1296)

b) Mínimo (1, –6), máximo (–2, 21)

9. a) Mínimo (0, 0) b) Mínimo $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$

10. a) Cóncava en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Convexa en $]-1, 1[$

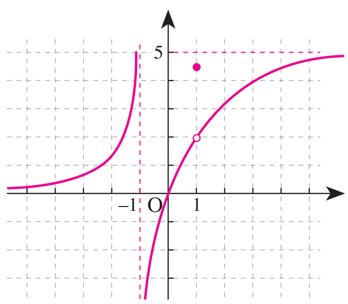
Inflexiones en (–1, –4) y (1, 4)

b) Convexa en $]-\infty, -2[$

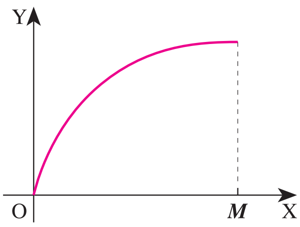
Cóncava en $]-2, +\infty[$

Inflexión en (–2, –6)

11. Por ejemplo:

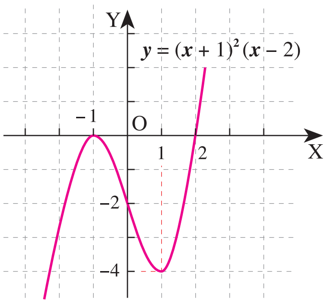


12. $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 13$

13. 

Debe ser creciente y convexa en [O, M] y con tangente horizontal en x = M

14. $x = 50$; $y = 400$

15. 

Creciente en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Drececiente en $]-1, 1[$

Convexa en $]-\infty, 0[$

Cóncava en $]0, +\infty[$

Máximo (–1, 0), mínimo (1, –4)

16. En bajada [0, 20[; en alza]20, 30]

Máximo absoluto en (0, 100)

Mínimo en (20, 20)

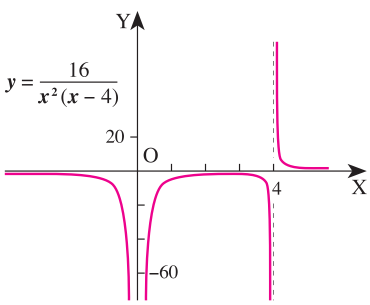
17. a) D = R – {0, 4). Crece en $\left]0, \frac{8}{3}\right[$.

Decrece en $]-\infty, 0[\cup \left]\frac{8}{3}, 4\right[\cup]4, +\infty[$

b) Horizontal: $y = 0$

Verticales: $x = 0$; $x = 4$

Máximo $\left(\frac{8}{3}, -1{,}6875\right)$

c) 

18. $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$; $d = 2$

19. $v = \frac{1000}{11}$ km/h $\simeq$ 90,9 km/h

Se consumirán 8,97 l/100 km, ¡siempre que $v \neq 0$!

20. a) $f(0) = 10$

b) En $t = 1$ es $f(1) = 10{,}5$

c) No desaparece, se estabiliza en torno a 10

21. a) a y b deben tener signos iguales y c puede tomar cualquier valor

b) a y b deben tener signos opuestos y c puede tomar cualquier valor

22. máx $\left(\frac{1}{3}, \frac{-14}{27}\right)$, mín (3, –10)

Crece en $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup]3, +\infty[$; decrece en $\left]\frac{1}{3}, 3\right[$

Convexa en $\left]-\infty, \frac{5}{3}\right[$; cóncava $\left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$

23. Máximo en (0, 1)

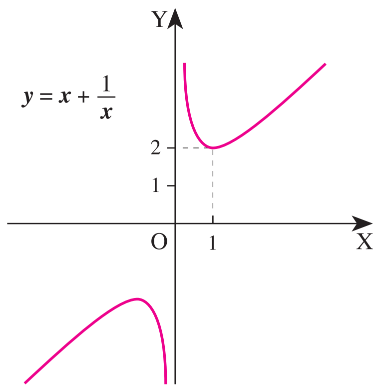
Crece en $]-\infty, 0[$; decrece en $]0, +\infty[$

No tiene mínimo

24. En (0, 0). Sí es máximo relativo, pues, pese a que no tiene tangente horizontal en $x = 0$, en las proximidades de $x = 0$ la función toma valores menores que en $x = 0$

25. a) $a = -9$, $b = 24$ b) $c = -18$

26. a) $x = -1$

b) 

27. a) creciente en $]-\infty, 1[$

decreciente en $]1, +\infty[$

máximo en (1, e)

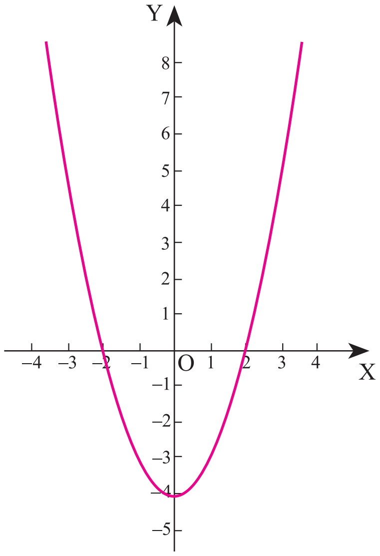
mínimo no tiene

asíntota horizontal por la izquierda y por la derecha $y = 0$

asíntota vertical no tiene

b) 2

28. a)



b) $D(g(x)) =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

c) $g(x)$ es creciente en $]2, +\infty[$

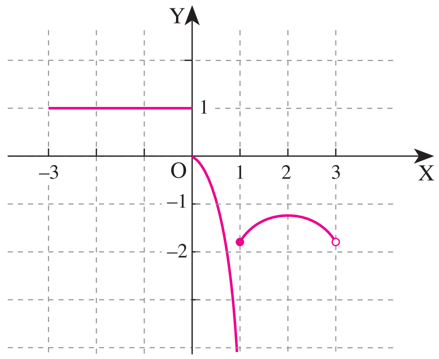
$g(x)$ es decreciente en $]-\infty, -2[$

$g(x)$ no tiene máximo absoluto ni relativo

29. a) continua en $]-3, 1[\cup]1, 3[$. En $x = 1$ hay una discontinuidad de salto finito

b) derivable en $]-3, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 3[$

c)



30. $a = -1$; $b = 3$; $c = -2$

31. Como $D =]1, +\infty[$ y $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ entonces

$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in D$

32. a) $f(x)$ es creciente en $]-\infty, 1[\cup]7, +\infty[$

$f(x)$ es decreciente en $]1, 4[\cup]4, 7[$

b) máximo en $x = 1$ y mínimo en $x = 7$

c) En $x = 4$ si hay un punto de inflexión porque $f'''(4) \neq 0$

33. No tiene asíntotas

34. Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

35. Asíntota vertical: $x = -5$

Asíntota horizontal: no tiene

36. a) Máximo en $(0, 1)$

Mínimos en $\left(-1, \dfrac{e-1}{e}\right)$ y $\left(1, \dfrac{e-1}{e}\right)$

b) $y = 1$ por la izquierda y por la derecha.

37. a) creciente en $]0, +\infty[$

decreciente en $]-\infty, 0[$

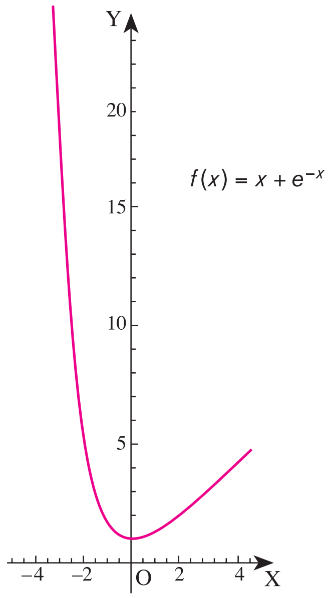
máximo no tiene

mínimo en $(0, 1)$

cóncava en R

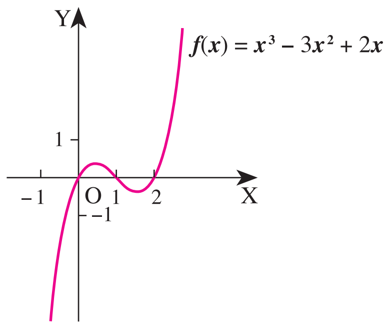
asíntotas horizontales y verticales no tiene

asíntota oblícua en $y = x$

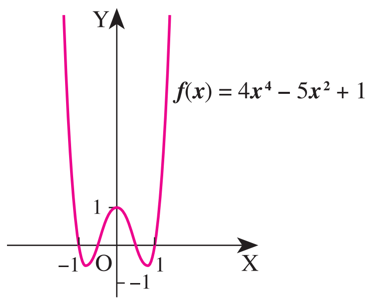


b) Consideramos la función $f(x) = x + e^{-x}$, por ejemplo en el intervalo $[0, 5]$, que es continua en dicho intervalo y como $f(0) = 1 < 4 < f(5) = 5 + e^{-5} \simeq 5{,}007$, por el teorema de Darboux (tema 9) existe $x \in [0, 5]$ tal que $f(c) = 4$.

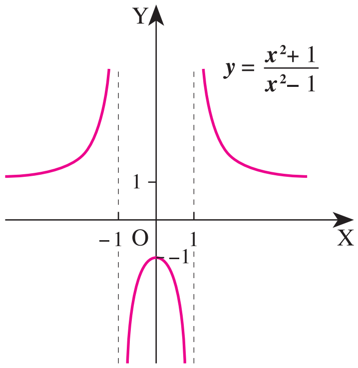
38. a)



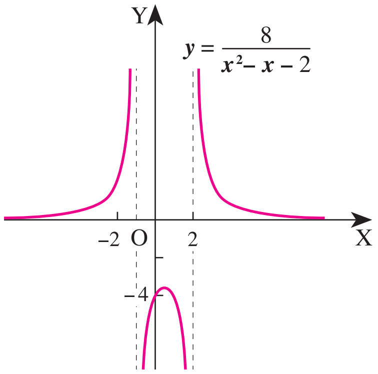
b)



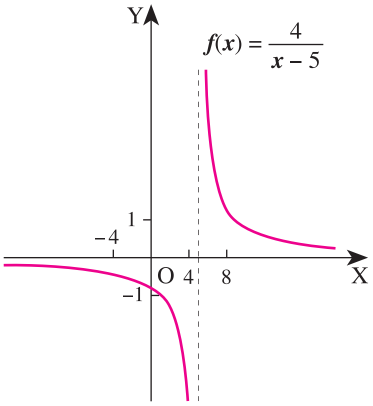
39. a)



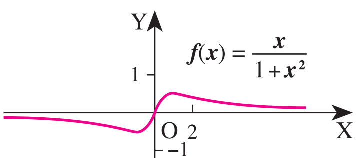
b)



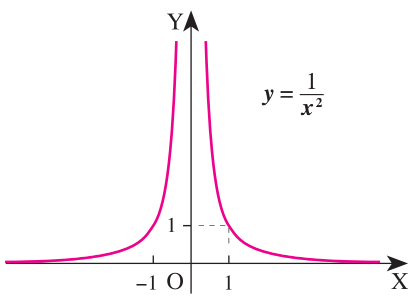
40. a)



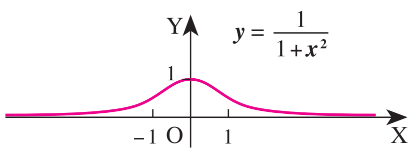
b)



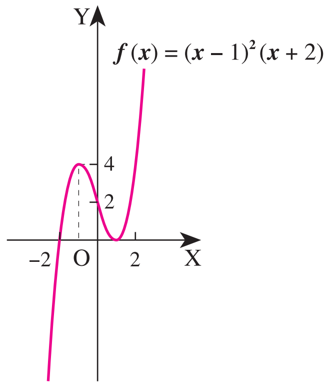
41. a)



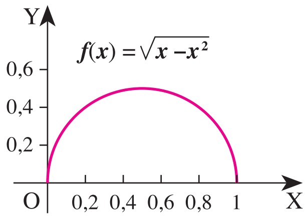
b)



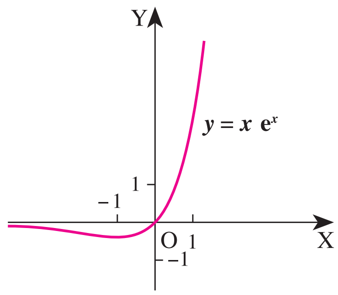
42. a)



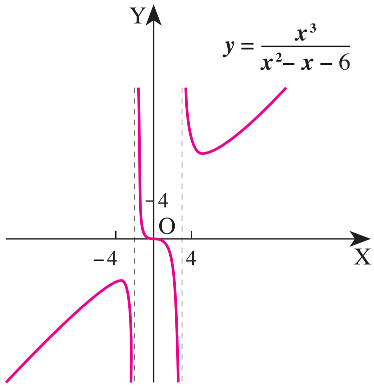
b)



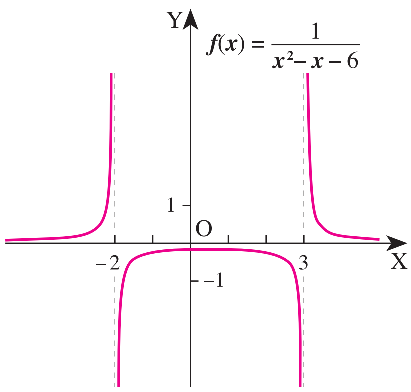
43. a)



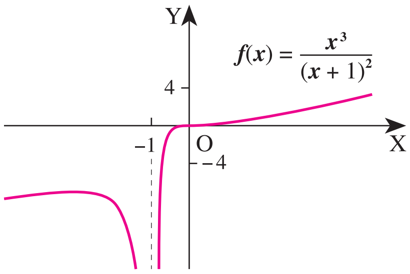
b)



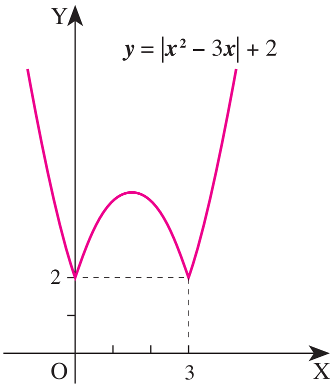
44. a)



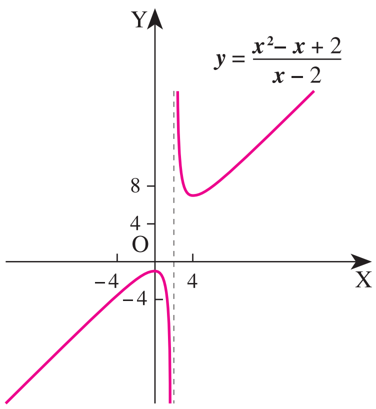
b)



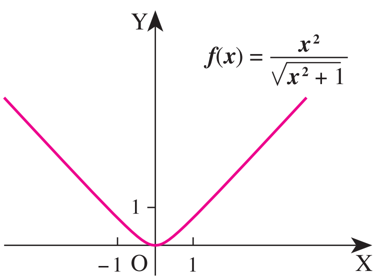
45. a)



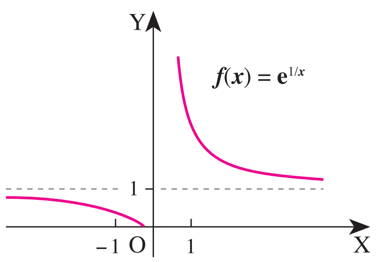
b)



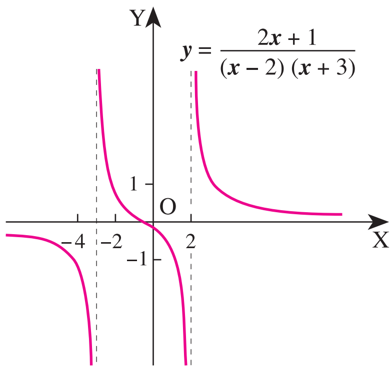
46. a)



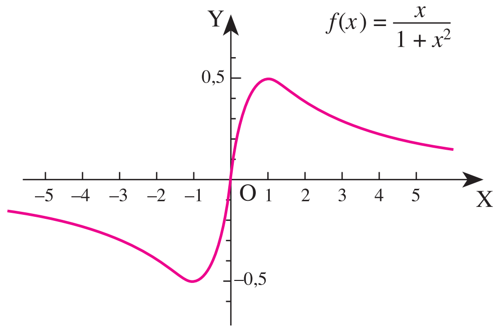
b)



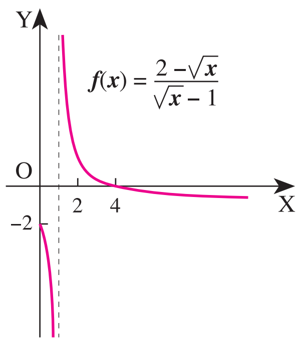
47. a)



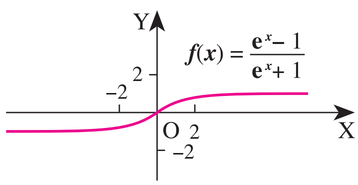
b)



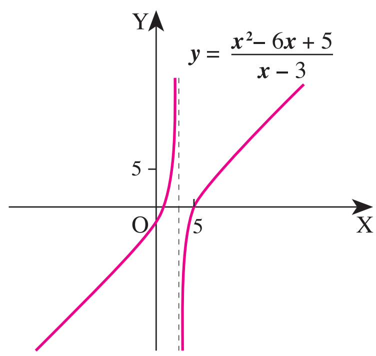
48. a)



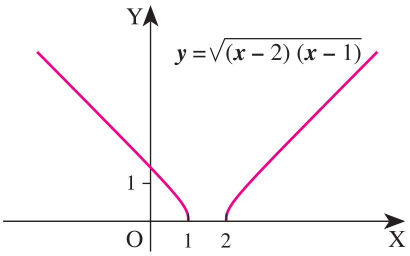
b)



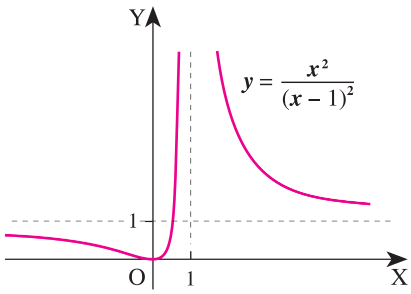
49.



50.



51.



52. $A = 25$ m^2

53. El triángulo equilátero de lado $5\sqrt{3}$ m

54. El cuadrado de 16 cm de lado

55. El cuadrado de lado 4 cm

56. El cuadrado de lado 4 cm

57. $\alpha = 60°$

Area $= 600\sqrt{3} \simeq 1039{,}2$ cm^2

58. $b = 10$ cm

59. $b = \dfrac{40}{3}$ m y el triángulo es equilátero

60. El rectángulo tendrá 6 cm de base y 5 cm de altura y el área será 30 cm^2

61. Base 4 y altura 8

62. Base cuadrada de 8 m de lado y altura 4 m

63. a) $V = \dfrac{\pi}{3} x^2 (12 - x)$

b) 8 cm y 4 cm

64. Base 4 cm y los lados iguales 3 cm

65. Base 5 cm y altura 10 cm

66. a) $A = \dfrac{200x - (\pi + 4)x^2}{8}$ m^2

b) $x = \dfrac{100}{\pi + 4}$ m

67. 4 cm y $\sqrt{3}$ cm

68. 0,8 m de altura y 1,25 m de anchura

69. El lado del cuadrado del material de 2 € es de 15 cm y el otro es de 10 cm.

70. (15, 15)

71. 14 cm y 28 cm

72. 5

73. $x = 2$ km

74. $2 - \ln 4$

75. Los dos trozos iguales y su valor es de 360 € cada uno

76. a) $A(x) = 300x - 2x^2$

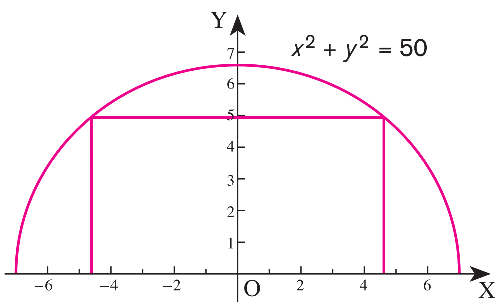
b) Lado perpendicular 75 m y lado paralelo 150 m.

77. $x = y = 10$ cm

78. a) $S = \dfrac{17x^2 - 1200x + 40000}{16}$ siendo x la base del rectángulo

b) lado del cuadrado 50 m y base del rectángulo 0 m

79. a)



$A(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{200 - x^2}$

b) $x = 10$ m

80. $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

81. $x = 12$ m

82. Es un cubo de 20 cm de arista

83. $5\sqrt{2}$ cm

84. $h = 2r$

85. $r \simeq 14{,}7$ cm, $h \simeq 29{,}4$ cm

86. 2000 y 1000 m

87. a) $d = 10\sqrt{5} \cdot \sqrt{36t^2 + 24t + 5}$

b) $d = 10\sqrt{5}$ km para $t = \frac{1}{3}$ h

88. Tangente: $x - y - 3 = 0$
Normal: $x + y + 1 = 0$

89. Tangente: $3x - 4y - 16 = 0$
Normal: $4x + 3y - 13 = 0$

90. Tangente: $y + 1 = 0$
Normal: $x = 0$

91. $P(0, 0) \rightarrow$ normal $3x - y = 0$
$Q(4, 2) \rightarrow$ normal $x + 3y - 10 = 0$
Se cortan en $C(1, 3)$

92. Tangente en P: $5x - 8y - 9 = 0$
Tangente en Q: $5x + 8y - 9 = 0$
$\alpha \simeq 64°$

93. Tangente: $10x + y + 2 = 0$
Normal: $x - 10y + 81 = 0$

94. Tangente en P: $4x + 13y - 12 = 0$
Tangente en Q: $4x + 3y + 4 = 0$

95. $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$

Tema 13 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

1. $G(x) = \sqrt{x} + 3$

2. $F(x) = x^3 + 3$

3. a) $\ln |x^2 + 3| + C$ b) $e^{3x+1} + C$
c) $-\cos 2x + C$ d) $\text{sen } (x^2 + 1) + C$
e) $-\ln |\cos x| + C$

4. a) $\frac{9x\sqrt[3]{x}}{4} + c$ b) $\frac{1}{3}(1 + x)^3 + c$

c) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$ d) $-\ln |1 - \text{sen } x| + c$

e) $2 \ln |x| + c$ f) $\frac{1}{2}\text{sen } x^2 + c$

g) $2\sqrt{5 + 4x^2} + c$ h) $\frac{1}{6}(1 + 4x^2)\sqrt{1 + 4x^2} + c$

i) $\frac{1}{2}\text{tg}(x^2 + 5) + c$

5. a) $\frac{\ln |2x^3 + 9|}{2} + C$ b) $\frac{\text{tg } (3x^2 + 2x)}{2} + C$

c) $\frac{\ln |2x^3 + 9|}{2} + C$ d) $\ln |\text{sen } x| + C$

e) $\frac{5^{2x^3+1}}{6 \ln 5} + C$ f) $-\cos e^x + C$

6. a) $\frac{x\,3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln x)^2} + c$ b) $\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$

7. a) $x \ln (x) - x + C$; b) $(2 - x^2) \cos x + 2x \text{ sen } x + C$

8. a) $2 \ln |x - 3| + \ln |x^2 - 3x + 2| + c$

b) $\frac{1}{2} \ln \left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + \frac{x^3}{3} + x + c$

c) $\ln |x - 3| - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + c$

d) $\frac{2}{9} \ln |x - 1| + \frac{5}{9} \ln |x + 2| - \frac{7}{9} \ln |x + 5| + c$

e) $\frac{6}{5} \ln |x - 3| + \frac{4}{5} \ln |x + 2| + c$

f) $\ln |x - 4| - \ln |x - 1| + c$ ó $\ln \left|\frac{x - 4}{x - 1}\right| + c$

g) $\frac{6}{x + 2} + 3 \ln |x + 2| + c$

h) $-2 \ln |x + 3| - \frac{24x + 55}{2(x + 3)^2} + c$

9. a) $F(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x - \frac{643}{4}$

b) $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{x} + \frac{13}{6}$

c) $F(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{4x^4} + \frac{97}{180}$

10. a) $]0, +\infty[$ b) $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x} - 220$

11. a) $f'(x) = (2ax + b)\sqrt{1+x^2} + \dfrac{(ax^2 + bx + c)\,x}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $I = (x^2 + 2x + 1)\sqrt{1+x^2} + C$

12. $\dfrac{12x^3 + 8x - 9}{12x^4} + c$

13. $F'(x) = 3x^2 + 10x = f(x);\ \ F(x) = x^2(x + 5) + 1$

14. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + c$

Pasa por el origen la $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

15. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln|x| - \dfrac{5}{6}$

16. a) $\ln x + \dfrac{x^2 + 4x}{2} + c$ b) $-\dfrac{1}{3x^3} + c$

17. a) $6\sqrt{x+2} + C$ b) $3\sqrt[3]{x} + C$

18. a) $-\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$ b) $-\dfrac{\cos(3x+4)}{3} + c$

19. a) $-3\sqrt{4 - 2x^2} + C$ b) $\ln|x^3 + 4x - 2| + C$

20. a) $-\dfrac{(6x^2 - 1)^4}{48} + c$ b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

21. a) $\dfrac{3}{7}\operatorname{tg}(7x) + C$ b) $e^{\operatorname{arc\,tg} x} + C$

22. a) $\dfrac{4^{6x^2}}{6\ln 4} + c$ b) $\dfrac{-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} + c$

23. a) $\dfrac{e^{3x}}{3} + x + C$ b) $\dfrac{(x^3+5)^4}{12} + x + C$

24. a) $\operatorname{tg} x - x + c$ b) $\dfrac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + c$

25. a) $\ln|1 + x| + \dfrac{x^2}{2} - x + C$

b) $\operatorname{arc\,tg} e^x + C$

26. a) $2\operatorname{sen} 2x + c$ b) $\dfrac{1}{3}e^{x^3} + c$

27. a) $10\sqrt{1+x} + C$ b) $\dfrac{3}{2(x+3)^2} + x + C$

28. a) $-\dfrac{1}{2}e^{1-x^2} + c$ b) $-\dfrac{1}{3}\cos x^3 + c$

29. a) $\dfrac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x}{3} + C$ b) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

30. a) $-3\sqrt{1-x^2} + c$ b) $5\operatorname{arc\,tg} x + c$

31. a) $\dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$ b) $-\ln(\cos x) + C$

32. a) $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x + c$ b) $\dfrac{(x+1)^4}{4} + c$

33. a) $2\ln|x + 1| + 3x + C$ b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(2x) + C$

34. a) $-\dfrac{7\cos 6x^2}{12} + c$ b) $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + c$

35. a) $-\dfrac{1}{4}\cdot\operatorname{ctg} 2x^2 + C$ b) $-\ln(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$

36. a) $2x + \operatorname{tg} x + c$ b) $x^3 - 5\ln(\cos x) + c$

37. a) $-x - \operatorname{ctg} x + C$ b) $-\dfrac{1}{24}\cos^4(6x) + C$

38. a) $\dfrac{1}{6}\operatorname{tg} 6x + c$ b) $\dfrac{2}{3}\ln(x^3 - 2) + c$

39. a) $\dfrac{2}{15}(3x+2)\sqrt{(x-1)^3} + C$ b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2 - 5) + C$

40. a) $\dfrac{1}{\cos x} + c$ b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2 + c$

41. a) $\ln(\ln|x|) + C$ b) $\dfrac{1}{4}(\ln x)^4 + C$

42. a) $\dfrac{1}{\cos x} - \ln|\cos x| + c$ b) $-\dfrac{2^{\cos x}}{\ln 2}$

43. a) $\dfrac{3(4x-3)(1+2x)^{\frac{2}{3}}}{40} + C$

b) $\dfrac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}\cdot(3x^2 + 2a^2)}{15} + C$

44. $\dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^3 x}{3} + c$

45. a) $\dfrac{\text{sen } x \cos x}{2} + \dfrac{x}{2} + C$ b) $e^x(x-1) + C$

46. a) $\dfrac{(\ln x + 1)^2}{2} + c$

b) $\dfrac{1}{\text{sen } x \cos x} - 2 \text{ ctg } x + c$

47. a) $e^x\left(\dfrac{x \cos x}{2} + \dfrac{x-1}{2} \text{ sen } x\right) + C$

b) $\dfrac{1}{2}(\text{sen } x \cos x + x) + C = \dfrac{1}{4} \text{ sen } (2x) + \dfrac{x}{2} + C$

48. a) $\dfrac{x \text{ sen } (\ln x)}{2} - \dfrac{x \cos (\ln x)}{2} + c$

b) $\dfrac{\text{sen } (2x)}{4} - \dfrac{x \cos(2x)}{2} + c$

49. a) $-\text{sen}^2 x \cdot \cos x - \dfrac{2}{3} \cos^3 x + C$

b) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

50. a) $\dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + c$ b) $e^x (x-2) + c$

51. a) $\dfrac{x^2}{2} \ln \sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4} \ln(1+x^2) + C$

b) $e^{\frac{x}{2}} (2x - 4) + C$

52. $\dfrac{8}{5} \ln |x-7| - \dfrac{3}{5} \ln |x-2| + c$

53. $\dfrac{1}{2} \ln |x| + \dfrac{1}{3} \ln |x-1| - \dfrac{5}{6} \ln |x+2| + C$

54. $\ln [(x-2)^2 \cdot |x+4|^3] + c = 3 \ln |x+4| + 2 \ln |x-2| + c$

55. $\dfrac{13}{9} \ln |3x-1| - \dfrac{2x}{3} + C$

56. $\dfrac{5}{2} \ln |2x+1| + \dfrac{2}{3} x^3 - \dfrac{1}{2} x^2 - 3x + c$

57. $-\ln \left|\dfrac{x+2}{(x-1)^2}\right| + x^2 + x + C =$

$= x^2 + x - \ln |x+2| + 2 \ln |x-1| + C$

58. $3 \ln |x-1| - \dfrac{\ln |2x+3|}{2} + c$

59. a) $5 \ln |x-2| - 4 \ln |x-1| + \dfrac{2}{x-1} + C$

b) $3 \text{ arctg } x + \ln |1 + x^2| + C$

60. a) $x - \text{arctg } x + c$

b) $\text{arc tg } x + \dfrac{x^3}{3} - x + c$

61. a) $\dfrac{2 \text{ arc tg } x}{3} + c$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \text{arc tg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} x\right) + c$

62. a) $\dfrac{3}{2} \text{ arcsen } (2x) + c$

b) $\dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + x + c$

63. a) $\ln |x+1| - \dfrac{x}{x+1} + c$

b) $\dfrac{1}{3} \text{ arc sen}\left(\dfrac{3x}{2}\right) + c$

64. $x \ln (1 + x^2) - 2x + 2 \text{ arctg } x$

65. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x + \dfrac{71}{4}$

67. $\dfrac{1}{3} \text{arctg} \dfrac{x+2}{3} + C$

Tema 14 LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

1. a) $\frac{8}{3}$ b) 1 c) $2e^2 - 2$ d) $\frac{9}{2}$

2. $\frac{17}{4}$

3. Puntos de corte $x = -2$ y $x = 4$

Area = 36 u.s.

4. $\frac{14\pi}{3}$ u.v.

5. Puntos de corte $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$

Area = $\frac{1}{2}$

6. $F'(x) = x\,e^x$ $F'(1) = e$

7. Puntos de corte $x = 0$, $x = 2$

Area = $\frac{8}{3}$ u.s.

8. $\frac{\sqrt{e} - 1}{2\sqrt{e}}$

9. Puntos de corte $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

Area = $\frac{1}{2}$ u.s.

10. ln 2

11. Puntos de corte $x = 0$, $x = 3$

Area = $\frac{9}{2}$ u.s.

12. $\frac{4 + 4\sqrt{2}}{15}$

13. a) Si $a \neq 2$ es compatible determinado

Si $a = 2$ y $b = 1$ es compatible indeterminado

Si $a = 2$ y $b \neq 1$ es incompatible

b) Area = $\frac{e^4 - e^3 - e + 1}{e^2}$ u.s.

14. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$ b) $\frac{27}{8}$

15. a) (–3, 0); (3, 6)

b) $S_1 = \frac{9}{2}$; $S_2 = \frac{45}{2}$

16. $A = \sqrt{a^2 - a - 2} + 1 - a$ $\lim\limits_{x \to +\infty} A = \frac{1}{2}$

17. a) Asíntota oblicua $y = x - 2$; $S = 1$

b) $S(\alpha) = 2 - \frac{4}{\alpha - 2}$

c) Sí. $\lim\limits_{x \to +\infty} S(\alpha) = 2$

18. $\frac{\pi - 3}{2}$

19. $\frac{1}{2}$

20. $f'(x) = (x - 2)\,(3x + 4)$

Creciente en $\left]-\infty, \frac{-4}{3}\right[\cup\ ]2, +\infty[$

Decreciente en $\left]\frac{-4}{3}, 2\right[$. Área = $\frac{625}{12}$

21. 2

22. $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx = \int_0^2 2x\,dx = 4\text{ m}^2$

23. $A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)\,dx - \int_0^2 (x^3 - 9x)\,dx = \frac{137}{4}$

24. 32

25. $\frac{32}{3}$

26. Área = 36; V = 259,2 π

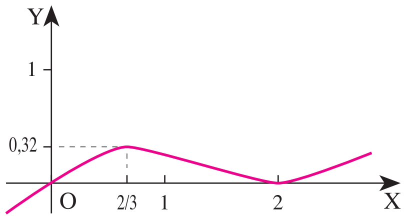
27. a) $y = x^2 - 2x - 3$ b) $\frac{11}{3}$

28. a) $F(x) = \frac{x}{2}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x + c$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 2\pi - \frac{1}{2}$

29. $p(x) = -6x^2 + 6x$

30. Valor $= \dfrac{100}{3} \times 3\,000 = 10^5$ €



31. a) $e = 170,\widehat{6}$ m b) $v_m =$ 42,6 m

32. $\dfrac{e^2 - 2e + 1}{e}$

33. a) Negativa en]1, 2[b) área $= 3e - 7$

34. $\dfrac{\pi^2 - 2\pi}{8}$

35. $2 - \sqrt{2}$

36. a) $\dfrac{32}{3}$; c) $160,8\,\pi$

37. $1000(e - 1)$ g

38. $A = \dfrac{1}{3}$

39. 4

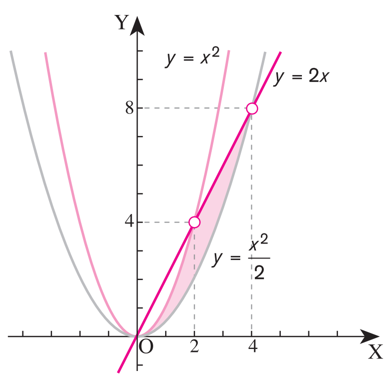
40. $\dfrac{4}{3}$

41. La primitiva es $-\dfrac{\cos^3 x}{3} + c$

$$\int_0^{\partial/4} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$$

42. a) $F(x) = x^4 + 5x^2 + 8x + 6$ b) $I = 38$

43.



Puntos de corte $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$

Área = 4

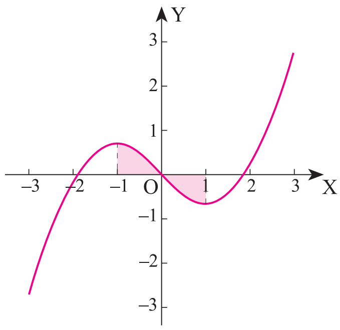
44. $a\sqrt[3]{4}$

45. a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

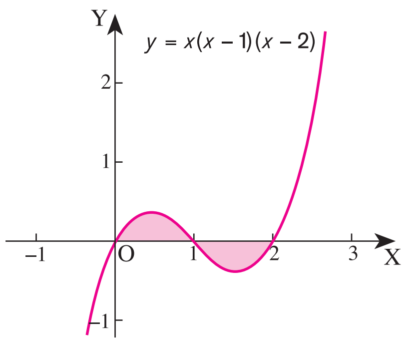
b) Puntos de corte $x = -1$, $x = 3$

Área $= \dfrac{32}{3}$

46. $\dfrac{18 - \pi^2}{9} \simeq 0,9034$



47.



Puntos de corte $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

Área $= \dfrac{1}{2}$

48. a) $\dfrac{\pi}{8}$; b) $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$