Actividades iniciales

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = x \cdot |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

• $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2) = 0$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$, luego es continua en toda la recta real.
Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$, luego es derivable en toda la recta real.

• $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Esta función es continua en toda la recta real.

Estudiemos su derivabilidad en $x = 0$.

$$g'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{h^2}{h^3}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

$$g'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(0-h)^2}}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

La función $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

2. Demuestra que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

Veamos que para todo $x_1 < x_2$ se cumple que $3^{x_1} < 3^{x_2}$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 3^{x_1 - x_2} > 1 \Rightarrow \frac{3^{x_2}}{3^{x_1}} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{x_2} > 3^{x_1} \Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2}$$

Luego queda probado que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

3. Expresa en función de la longitud de la base el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20 m. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?

Llamando «a» a la altura del rectángulo y «b» a la base del mismo, podemos escribir:

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$$

$$\text{Área} = b \cdot a = a\,(10 - a) = 10a - a^2$$

La función que nos da el área del rectángulo es una función cuadrática cuyo valor máximo lo alcanza en el vértice, es decir para $a = 5$ m.
Luego para este valor de la altura, la base mide $b = 10 - 5 = 5$ m.
Es decir, la base mide 5 m e igual que la altura.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

- **$f(x) = 4x - x^2$**
- **$g(x) = -5x + 3$**
- **$h(x) = \frac{2}{x}$**
- **$s(x) = e^{3x}$**
- **$l(x) = x^3 - 3x^2 + 5$**
- **$p(x) = \frac{x-3}{x+3}$**
- **$q(x) = 2^{-x}$**
- **$v(x) = \sqrt{x^2 - 9}$**

Para resolver este problema hallamos la derivada primera de cada una de estas funciones y estudiamos su signo:

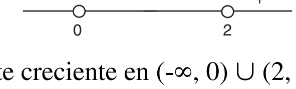
• $f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4 - 2x$
$4 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow x < 2$
$4 - 2x < 0 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow x > 2$
f es estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$
f es estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$

• $g(x) = -5x + 3 \Rightarrow g'(x) = -5 < 0$
g es estrictamente decreciente en todo R

• $h(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-2}{x^2}$
h es estrictamente decreciente en todo R

• $S(x) = e^{3x} \Rightarrow s'(x) = 3e^{3x} > 0$
S es estrictamente creciente en todo R

• $l(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \Rightarrow l'(x) = 3x^2 - 6x$
Para estudiar el signo de $e'(x)$ calculamos sus ceros, que son $x = 0$ y $x = 2$.
Representamos estos valores en la recta real con lo cual queda ésta dividida en tres intervalos, y estudiamos el signo de l' en cada uno de ellos.



l es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
l es estrictamente decreciente en $(0, 2)$

• $p(x) = \frac{x-3}{x+3} \Rightarrow p'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$
p es estrictamente creciente en todo R

• $q(x) = 2^{-x} \Rightarrow q'(x) = -ln\, 2 \cdot 2^{-x} < 0$
q es estrictamente decreciente en todo R

• $v(x) = \sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$
v es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$
v es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$

2 **Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:**

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ ***b)*** $y = x\,(x-1)^2$

c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$ ***d)*** $y = \dfrac{x}{\ln x}$

e) $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$ ***f)*** $y = \dfrac{8x}{x^2 + 2}$

g) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ ***h)*** $y = x \cdot \ln x$

i) $y = x^2 \cdot e^x$

a) $y = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y' = -2x + 6$

$-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$y'' = -2 \Rightarrow y''(3) < 0 \Rightarrow$ la función dada tiene un máximo relativo en (3, 4)

b) $y = x\,(x-1)^2 \Rightarrow y' = (x-1)(3x-1)$

$(x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \;;\; x_2 = \dfrac{1}{3}$

$$y'' = 6x - 4 \begin{cases} y''(1) > 0 \\ y''\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en (1, 0) y un máximo relativo en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$

c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12 \Rightarrow y' = 6x^2 - 30x + 36$

$6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \;;\; x_2 = 2$

$$y'' = 12x - 30 \begin{cases} y''(3) > 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en (3, 15) y un mínimo relativo en (2, 16).

d) $y = \dfrac{x}{\ln x} \Rightarrow y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$

$y'' = \dfrac{2 - \ln x}{x \cdot (\ln x)^3}\ \{y''(e) > 0$

La función tiene un mínimo relativo en (*e, e*).

e) $y = \dfrac{2}{1 + x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2}$

$\dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$y'' = \dfrac{12x^2 - 4}{(1 + x^2)^3}\ \{y''(0) > 0$

La función tiene un máximo relativo en (0, 2).

f) $y = \dfrac{8x}{x^2 + 2} \Rightarrow y' = \dfrac{16 - 8x^2}{(x^2 + 2)^2}$

$\dfrac{16 - 8x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2}$

$$y'' = \dfrac{16x^3 - 96x}{(x^2 + 2)^3} \begin{cases} y''\left(\sqrt{2}\right) < 0 \\ y''\left(-\sqrt{2}\right) > 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$.

g) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1$

$$y'' = \dfrac{2}{x^3} \begin{cases} y''(1) > 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en el punto (1, 2) y un máximo relativo en el punto (–1, –2).

h) $y = x \ln x \Rightarrow y' = \ln x + 1$

$\ln x + 1 = 0$

No tiene solución esta ecuación, por tanto esta función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

i) $y = x^2 \cdot e^x \Rightarrow y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x$

$2x\,e^x + x^2\,e^x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;;\; x_2 -2$

$$y'' = e^x\,(2 + 4x + x^2) \begin{cases} y''(0) > 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto (0, 0).

3 **Halla el valor de *a* para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor –1.**

$f(x) = x^2 - 6x + a \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(3) > 0$

La función tiene un mínimo relativo en el punto (3, –1), luego este punto debe verificar la función:

$$-1 = 9 - 18 + a \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

4 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en su punto de inflexión.**

Hallemos el punto de inflexión de la curva

$y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$

$y' = 3x^2 - 12x + 16$

$y'' = 6x - 12 \qquad y''' = 6$

$6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \;;\; y'''(2) \neq 0$

Luego el punto de inflexión es (2, 5)

La ecuación de la recta tangente en (2, 5) es:

$$y - 5 = y'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 5 = 4\,(x - 2) \Rightarrow 4x - y - 3 = 0$$

5 **Halla *b* y *c* para que la curva $y = x^3 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4).**

La función $f(x) = x^3 + bx + c$ tiene un máximo relativo en el punto (0, 4), por tanto:

a) $f(0) = 4 \Rightarrow 4 = c$

b) $f'(0) = 0 \;;\; f'(x) = 3x^2 + b \Rightarrow 0 = b$

Luego $c = 4 \;;\; b = 0$

6 **Halla *a, b*, y *c* de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto (6, –12) y se anule para $x = 8$.**

Que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo relativo en el punto (6, –12) significa que:

a) $f(6) = -12 \Rightarrow -12 = 36a + 6b + c$

b) $f'(6) = 0$; $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 12a + b$

Como se anula para $x = 8 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0$. Resolviendo el sistema, obtenemos *a, b, c*.

$$\left.\begin{aligned} 12a + b &= 0 \\ 36a + 6b + c &= -12 \\ 64a + 8b + c &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -36 \\ c &= 96 \end{aligned}$$

7 **Sea *f* una función estrictamente decreciente y derivable en todo *R*. ¿Puede ser $f'(x) = 0$ en algún punto *x*? ¿Puede ser $f'(x) > 0$ en algún punto *x*? Razona las respuestas.**

Si *f* es estrictamente decreciente en todo *R*, entonces $f'(x) < 0\ \forall\, x \in R$.

8 **Sea *f* una función derivable que presenta máximo en un punto de abscisa x_0. ¿Qué posición, respecto de los ejes coordenados, presenta la recta tangente en x_0?**

Si *f* tiene un máximo en $P(x_0, f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow$, la recta tangente en *P* es paralela al eje de abscisas y perpendicular al eje de ordenadas.

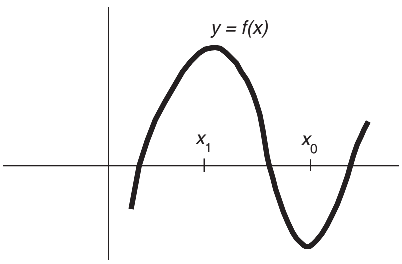
9 **Si una función *f* es tal que en un punto de abscisa $x = a$, verifica:**

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0 \text{ y } f''''(a) \neq 0$$

¿Qué particularidad presenta la función en ese punto?

La función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en $(a, f(a))$.

10 **Si una función continua tiene un máximo y un mínimo relativos, ¿puede ser el valor del mínimo mayor que el valor correspondiente al máximo?**



f presenta un mínimo en el punto de abscisa x_0 y un máximo en el punto de abscisa x_1.

Por definición de mínimo $\forall\, x \in E\,(x_0, E) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, luego como $x_1 + \delta \in E\,(x_0, E) \Rightarrow f(x_1 + \delta) > f(x_0)$ y como por definición de máximo $f(x_1) > f(x_1 + \delta)$, entonces se verifica que $f(x_1) > f(x_0) \Rightarrow$ el valor del máximo es mayor que el del mínimo.

11 **Demuestra que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene siempre extremo relativo en su vértice, siendo máximo si a es negativo y mínimo si a es positivo.**

El vértice de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b = 0 \Rightarrow$ f tiene extremo relativo en su vértice, pues su derivada primera se anula en él.

$$f''(x) = 2a \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 \text{ si } a > 0 \\ f''(x) < 0 \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Por tanto, si $a > 0$, entonces la función presenta un mínimo en el vértice y si $a < 0$ presenta un máximo en el vértice.

12 **Una función polinómica de tercer grado tiene siempre un punto de inflexión. Razónalo.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a}$

$f'''(x) = 6a \neq 0\ \forall x$, luego para

$x = \frac{-2b}{6a} \Rightarrow f''\left(\frac{-2b}{6a}\right) = 0$ y $f'''\left(\frac{-2b}{6a}\right) \neq 0$

Es decir, la función $f(x)$ tiene siempre un punto de inflexión en

$x = \frac{-2b}{6a}$

13 **Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ ***b)*** $f(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$ ***d)*** $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $f(x) = xe^{-2x}$ ***f)*** $f(x) = \ln(x + 4)$

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$

$f'(x) = 6x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 12x - 18$

$f''(x) = 12x - 18 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

$f''(x) = 12x - 18 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

f es cóncava hacia las *y* positivas en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

y cóncava hacia las *y* negativas en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

En $x = \frac{3}{2}$ presenta un punto de inflexión en

$$\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{2}\right)$$

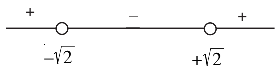
b) $f(x) = \frac{2}{x}$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{x^3}$

Si $x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las *y* positivas en $(0, +\infty)$

Si $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$
No existe punto de inflexión.

c) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$
$f'(x) = 4x^3 - 24x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24$
Estudiamos el signo de $f''(x) = 12x^2 - 24$.



f es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (+\sqrt{2}, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Esta función tiene dos puntos de inflexión en $(\sqrt{2}, -12)$ y $(-\sqrt{2}, -12)$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{4}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$
f es cóncava hacia las y positivas en toda la recta real, pues $f''(x) > 0\ \forall x$
No existen puntos de inflexión.

e) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$
$f'(x) = e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} \Rightarrow f''(x) = -4e^{-2x} + 4x\, e^{-2x} \Rightarrow f''(x) =$
$= e^{-2x}\,(4x - 4)$
f es cóncava hacia las y positivas en $(+1, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$, f tiene un punto de inflexión en $(1, e^{-2})$.

f) $f(x) = ln\,(x + 4)$
$f'(x) = \dfrac{1}{x + 4} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-1}{(x + 4)^2}$
f es cóncava hacia las y negativas en toda la recta real, pues $f''(x) < 0\ \forall x$. No existen puntos de inflexión.

14 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\, x}{x^3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, cos\, x - sen\, x}{x^3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{sen^2\, x}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right)}{sen\, x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \left[1 + sen\, x\right]^{\frac{cosec\, x}{x}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \left[x^2 - 2x\right]^{x^2}$ **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right]$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left[tg\, x\right]^{cos\, x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\, x}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\, x}{3x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{6x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x}{6} = \dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]}$

Calculamos el límite del exponente aparte:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right] \overset{\infty\,-\,0}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1}{\dfrac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0$

Por tanto, el límite pedido vale:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x = e^0 = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot cos\, x - sen\, x}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x - x\, sen\, x - cos\, x}{3x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-sen\, x}{3x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-cos\, x}{3} = \dfrac{-1}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{sen^2\, x}\right) \overset{\infty\,-\,\infty}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2\, x - x^2}{x^2\, sen^2\, x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\, sen\, x\, cos\, x - 2x}{2x\, sen^2\, x + 2x^2\, sen\, x \cdot cos\, x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos^2\, x - sen^2\, x - 1}{4x\, sen\, x\, cos\, x + x^2\, cos^2\, x - x^2\, sen^2\, x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, 2x - 1}{2x \cdot sen\, 2x + x^2 \cdot cos\, 2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\, sen\, 2x}{2\, sen\, 2x + 6x\, cos\, 2x - 2x^2\, sen\, 2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-4\, cos\, 2x}{10\, cos\, 2x - 16x\, sen\, 2x - 4x^2\, cos\, 2x} = \dfrac{-4}{10} = \dfrac{-2}{5}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right)}{sen\, x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \cdot sen\,\dfrac{1}{x} - cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{cos\, x} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + sen\, x)^{\frac{cosec\, x}{2}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{cosec\, x}{2}(1 + sen\, x - 1)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2\, sen\, x}} = e^{\frac{1}{2}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} \overset{0^0}{\Rightarrow}$ Haciendo $M = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2}$

y tomando logaritmos, obtenemos:

$ln\, M = ln\left[\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2}\right] = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot ln\,(x^2 - 2x) \overset{0\,-\,\infty}{=}$

$\overset{0\,-\,\infty}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln\,(x^2 - 2x)}{\dfrac{1}{x^2}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x}}{\dfrac{-2}{x^3}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\,(x - 1) \cdot x^3}{2x\,(x - 2)} = 0$

Por tanto, $\ln M = 0 \Rightarrow M = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} = 1$

$$h)\ \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[b^{\frac{1}{x}} - 1\right] \overset{\infty\cdot 0}{=}$$

$$\overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{b^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{b^{\frac{1}{x}} \cdot \ln b \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \ln b$$

$i)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (tg\ x)^{\cos x}\ \infty^0 \Rightarrow$ Llamando:

$M = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (tg\ x)^{\cos x}$ y tomando logaritmos:

$$\ln M = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x \cdot \ln(tg\ x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(tg\ x)}{\frac{1}{\cos x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x}}{\frac{sen\ x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{sen^2\ x} = 0$$

Por tanto, $\ln M = 0 \Rightarrow M = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (tg\ x)^{\cos x} = 1$

15 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.

Estudiamos el signo de la derivada primera para ver el crecimiento de la función:

$$f'(x) = \frac{(4x - 3)\, e^x - e^x\,(2x^2 - 3x)}{e^{2x}} = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}$$

Como el denominador es siempre positivo, estudiamos el signo del numerador:

$$-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = \frac{1}{2}$$

$$-\quad \tfrac{1}{2} \quad + \quad 3 \quad -$$

f(x) es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

f(x) es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

Los extremos relativos son $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 3$. Para ver si son máximos o mínimos relativos hallamos la derivada segunda

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 11x + 10}{e^x}$$

$f''(3) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene máximo relativo en el punto $\left(3, \frac{9}{e^3}\right)$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{e^{1/2}}\right)$$

16 Descompón el número 48 en dos sumando tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

Sean x y $48 - x$ los números que hemos de buscar.
La función a optimizar es $S(x) = 5x^2 + 6(48 - x)^2$
$\Rightarrow S(x) = 11x^2 - 576x + 13824$

$S'(x) = 22x - 576 \Rightarrow 22x - 576 = 0 \Rightarrow x = \frac{288}{11}$

$S''(x) = 22 \Rightarrow S''\left(\frac{288}{11}\right) > 0 \Rightarrow$ en $x = \frac{288}{11}$

la función $S(x)$ presenta un mínimo.

Los números buscados son: $\frac{288}{11}$ y $\frac{240}{11}$

17 Halla el número positivo cuya suma con 4 veces su recíproco sea mínima.

La función a optimizar es:

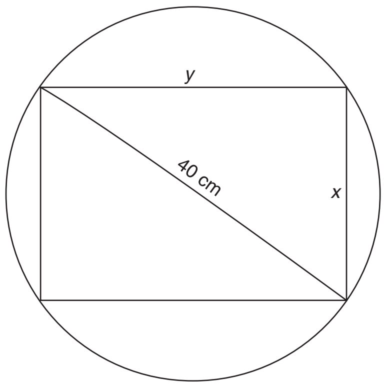
$$S(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2 + 4}{x}$$

$$S'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

$$S''(x) = \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(2) > 0 \text{ y } S''(-2) < 0$$

La función $S(x)$ presenta un mínimo en $x = 2$.
El número buscado es $x = 2$.

18 Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.



La función a optimizar es $A = x \cdot y$.

Como $x^2 + y^2 = 1600 \Rightarrow y = \sqrt{1600 - x^2}$

$\Rightarrow A(x) = x\sqrt{1600 - x^2} = \sqrt{1600\,x^2 - x^4}$

$$A'(x) = \frac{3200\,x - 4x^3}{2\sqrt{1600\,x^2 - x^4}} = \frac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}}$$

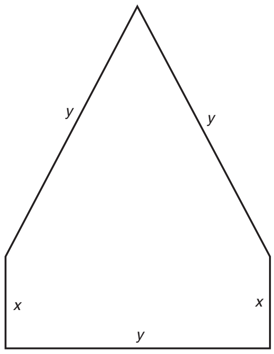
$1600 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 20\sqrt{2}$

$$A''(x) = \frac{2x^3 - 4800\,x}{(1600 - x^2)\sqrt{1600 - x^2}}$$

$A''(20\sqrt{2}) < 0$ y $A''(-20\sqrt{2}) > 0$

La función $A(x)$ es máxima para $x = 20\sqrt{2}$ e $y = 20\sqrt{2}$. Por lo cual el rectángulo de área máxima es un cuadrado.

19 **Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.**



La función a optimizar es:

$$A = x \cdot y + \frac{y \cdot y\sqrt{3}}{4}$$

Como $2x + 3y = 6{,}6 \Rightarrow x = \dfrac{6{,}6 - 3y}{2}$

La función a optimizar en una sola variable es:

$$A(y) = \frac{6{,}6y - 3y^2}{2} + \frac{\sqrt{3}\,y^2}{4} \Rightarrow A(y) = \frac{13{,}2y - 6y^2 + \sqrt{3}y^2}{4}$$

$$A'(y) = \frac{13{,}2 - 12y + 2\sqrt{3}y}{4} \Rightarrow 13{,}2 - 12y + 2\sqrt{3}y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{13{,}2}{12 - 2\sqrt{3}} = 1{,}5 \text{ m}$$

$$A''(y) = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A''(1{,}5) < 0$$

Luego la superficie es máxima para $y = 1{,}5$ m $\quad x = 1{,}05$ m

La ventana es un rectángulo de base 1,5 m y altura 1,05 m y un triángulo equilátero de lado 1,5 m.

20 **Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:**

$$f(x) = sen\ 2x$$

$f'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\Pi}{2} + K \cdot 2\Pi \Rightarrow x = \dfrac{\Pi}{4} + \Pi K \\ 2x = \dfrac{3\Pi}{2} + 2\Pi K \Rightarrow x = \dfrac{3\Pi}{4} + \Pi K \end{cases}$$

$f''(x) = -4\, sen\ 2x$

$f(x)$ tiene máximo relativo en todos los puntos de abscisa $x = \dfrac{\Pi}{4} + K\Pi$ y mínimo relativo en todos los puntos de abscisa $x = \dfrac{3\Pi}{4} + \Pi K$

$f''(x) = -4\, sen\ 2x = 0 \Rightarrow sen\ 2x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 + 2\Pi K \\ 2x = \Pi + 2\Pi K \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 + \Pi K \\ 2x = \dfrac{\Pi}{2} + \Pi K \end{matrix}$$

$f'''(x) = -8\cos 2x$

Como $f'''(0 + \Pi K) \neq \cdot$ y $f'''\left(\dfrac{\Pi}{2} + \Pi K\right) \neq 0$ entonces la función $f(x)$ tiene punto de inflexión en todos los puntos de abscisa $x = 0 + \Pi K$ y $x = \dfrac{\Pi}{2} + \Pi K$, es decir, en todos los puntos de abscisa $x = 0 + \dfrac{\Pi}{2} K$

21 **Halla el valor de K que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + K}$ tenga un extremo relativo único. ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?**

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + K}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\,(x^2 - 2x + K)}{(x^2 + K)^2}$$

$e^x(x^2 - 2x + K) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + K = 0 \Rightarrow$ para que existe una única solución se debe verificar que $K = 1 \Rightarrow$ la solución única es $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{e^x\,(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x\,(x-1)\,(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{e^x\,(x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 36x^3 + 15x^2 + 18x - 5)}{(x^2+1)^4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'''(1) > 0$

Por tanto, en $x = 1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

22 **Sea la función f tal que:**

- **$f(1) = 1$**
- **$f'(1) = 2$**
- **$f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = 0$**
- **$f^{(5)}(1) = 40$**
- **$f^{(6)} = -120$**

Entonces en $x = 1$ ¿hay máximo o mínimo?, ¿es creciente o decreciente?, ¿tiene algún punto de inflexión?

En $x = 1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

Esta función presenta un punto de inflexión en (1, 1).

La función es creciente en $x = 1$.

23 **Dada la función $f(x) = x\,(x - 1)^3$:**

***a)* Estudia su monotonía.**

***b)* Halla sus extremos relativos.**

***c)* Estudia el tipo de concavidad.**

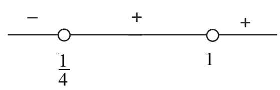
***d)* Halla si existen los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = x\,(x-1)^3$

$f'(x) = (x-1)^2\,(4x-1)$.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2\,(4x-1) = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = \dfrac{1}{4}$



$$f'(0) < 0 \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \qquad f'(2) > 0$$

f es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ y f es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

b) $f(x) = (x-1)^2 (4x-1)$; $(x-1)^2 (4x-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{4}$

$f''(x) = (x-1)(12x-6)$

$f''(1) = 0$

$f''\left(\frac{1}{4}\right) > 0$

f tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{4}, \frac{-27}{256}\right)$

c) $f''(x) = (x-1)(12x-6)$;

Estudiamos el signo de la derivada segunda: $x = 1$ $\quad x = \frac{1}{2}$

$+ \qquad - \qquad +$

$\frac{1}{2} \qquad 1$

$f''(0) > 0 \qquad f''\left(\frac{3}{4}\right) 0 \qquad f''(2) > 0$

f es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y f es cóncava hacia las y negativas en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

d) $f''(x) = (x-1)(12x-6)$; $(x-1)(12x-6) = 0$

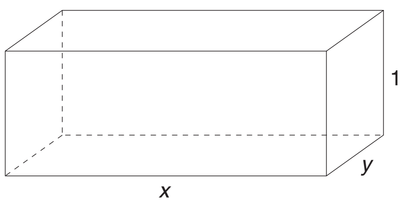
$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{2}$

$f'''(x) = 24x - 18$

$f'''\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{16}\right)$

$f'''(1) \neq 0$ pero como $f'(1) = f''(1) = 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ f no tiene punto de inflexión.

24 **Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m³, su altura 1 m y el coste de costrucción por m² es de 5.000 pesetas para la base, 6.000 pesetas para la tapa y 4.000 pesetas para cada lateral.**



Llamamos x e y a las dimensiones de la base del ortoedro. La función a optimizar es:

$C = 5\,000 \cdot x \cdot y + 6\,000\, x \cdot y + 4\,000 \cdot 2 \cdot y \cdot 1 + 4\,000 \cdot 2 \cdot x \cdot 1$

Como $x \cdot y \cdot 1 = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$

La función a optimizar en una sola variable es:

$C(x) = 45\,000 + 54\,000 + \frac{72\,000}{x} + 8\,000\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow C(x) \frac{8\,000\,x^2 + 99\,000\,x + 72\,000}{x}$

$C'(x) = \frac{8\,000\,x^2 - 72\,000}{x^2} \Rightarrow 8\,000\,x^2 - 72\,000 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$C''(x) = \frac{14\,4000}{x^3}$

$C''(3) > 0 \Rightarrow$ el coste del contenedor es mínimo para $x = 3$m, $y = 3$m; es decir, el contenedor es un prisma de base cuadrada de lado 3 m y altura 1 m.

25 **En la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ halla a, b y c para que la función tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en (0, 0).**

Si la función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 1$, entonces cumple que $f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'(1) = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0$.

Si la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0) entonces se cumple: $f''(0) = 0$ y $f(0) = 0$ $f''(x) = 6ax \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

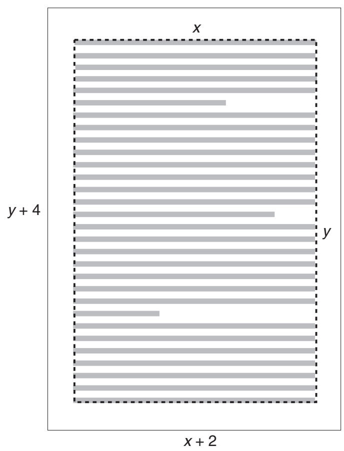
$f(0) = c \Rightarrow c = 0$.

Hay infinitas soluciones para a, b, c

Todas las que verifiquen que $\begin{cases} c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$

y además con $a < 0$ para que efectivamente en $x = 1$ exista un máximo relativo.

26 **Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.**



Llamando x, y a las dimensiones del texto impreso, obtenemos que la función de optimización buscada es:

$$S = (y+4)(x+2) = xy + 2y + 4x + 8$$

Expresando esta función en una sola variable mediante

$$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{\mathrm{x}}$$

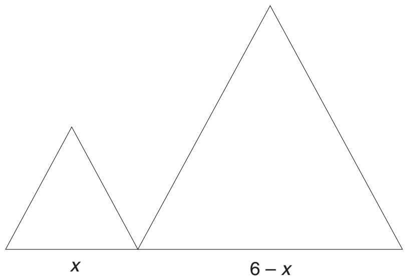
$S(x) = 18 + \frac{36}{x} + 4x + 8 \Rightarrow S(x) = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x}$

$S'(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2} \Rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$S''(x) = \frac{72}{x^3}$ y $S''(3) > 0$

Por tanto, la superficie de la hoja es mínima para $x = 3$ cm $y = 6$ cm, es decir, la hoja tendrá por dimensiones:
$x + 2 = 5$ cm de anchura
$y + 4 = 10$ cm de altura

27 **Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.**



Llamando x a una de las partes, la otra tendrá por longitud $6 – x$.

La altura de un triángulo equilátero de lado l unidades viene dada por: $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ unidades.

La función a optimizar es:

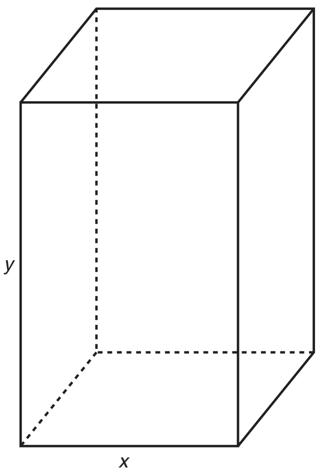
$$S(x) = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{(6-x)\cdot\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 12x + 36)$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4x - 12) \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4 = \sqrt{3} \Rightarrow S''(3) > 0$$

Por tanto, la función se hace mínima para $x = 3$ cm.
Luego el segmento dado se divide en dos partes iguales de longitud 3 cm cada una de ellas.

28 **Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente en forma de prisma recto de base cuadrada, de 500 m^3 de capacidad y que tenga un revestimiento de coste mínimo.**



Llamando x al lado de la base del prisma e y a su altura, obtenemos que la función a optimizar es:

$$C = x^2 + 4xy$$

Como el volumen es de 500 m^3, tenemos que

$$x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

La función a optimizar, en una sola variable, es:

$$C(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$C'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} \Rightarrow \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} \Rightarrow x = 10 \text{ m}$$

$$C''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3}\ ;\ C''(10) > 0$$

Por tanto, el coste es mínimo para un depósito de 10 m de lado de la base y de $y = 5$ m de altura.

29 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}[x - 1]\cdot tg\left[\dfrac{\Pi x}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a^x + b^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$; $a>1$ y $b>1$

d) $\lim\limits_{x\to \Pi}[1 - cos\ 2x]^{\frac{1}{tg\left[\frac{x}{2}\right]}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[2\cdot e^{\frac{1}{x}} - 1\right]^{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x + a^x\right]^{\frac{1}{x}}$; $a>1$

g) $\lim\limits_{x\to \Pi^+}\left[\dfrac{2}{sen\ x} - \dfrac{2}{\Pi - x}\right]$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{ln\,(2-e^x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{ln\ x} - \dfrac{1}{x - 1}\right]$

$$a)\ \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right] \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1 - x}{x\,e^x - x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1}{e^x + x\,e^x - 1} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2e^x + x\,e^x} = \frac{1}{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot tg\left(\frac{\Pi x}{2}\right) \overset{0-\infty}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot sen\left(\frac{\Pi x}{2}\right)}{cos\left(\frac{\Pi x}{2}\right)} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{sen\left(\frac{\Pi x}{2}\right) + (x-1)\cdot\frac{\Pi}{2}\cdot cos\left(\frac{\Pi x}{2}\right)}{-\frac{\Pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\Pi x}{2}\right)} = -\frac{2}{\Pi}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\cdot ln\,a + b^x\cdot ln\,b}{2}} = e^{\frac{ln\,a + ln\,b}{2}} = e^{ln\sqrt{ab}} = \sqrt{a\cdot b}$$

$$d)\ \lim_{x\to \Pi}(1 - cos\ 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Este límite presenta la indeterminación 0^0. Para resolverla tomamos logaritmos neperianos.

$$M = \lim_{x\to \Pi}(1 - cos\ 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}} \Rightarrow ln\ M = ln\left[\lim_{x\to \Pi}(1 - cos\ 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\Pi} \frac{\ln(1-\cos 2x)}{tg\,\frac{x}{2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\Pi} \frac{\frac{2\,sen\,2x}{1-\cos 2x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \lim_{x\to\Pi} \frac{4\,sen\,2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos 2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\Pi} \frac{8\cos 2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot sen\,2x}{+2\,sen\,2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\Pi} \frac{4\cos 2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\,sen\,x\cdot sen\,2x}{sen\,2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\Pi} \frac{-8\,sen\,2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cos 2x\cdot sen\,x - 2\cos x\,sen 2x - 4\cos 2x\cdot sen\,x}{2\cos 2x} =$$

$$= 0 \Rightarrow \ln M = 0 \Rightarrow M = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\Pi} (1-\cos 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}} = 1$$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(2\,e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{2x} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(2e^{\frac{1}{x}}-1-1\right)} =$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(2e^{\frac{1}{x}}-2\right)} \overset{\infty\cdot 0}{=} e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{1}{2x}}} = e^4$$

f) $\lim_{x\to+\infty} (x+a^x)^{\frac{1}{x}}$

Este límite presenta la indeterminación ∞^0. Para resolverlo, tomamos logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x\to+\infty} (x+a^x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln M = \ln\left[\lim_{x\to+\infty} (x+a^x)^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+a^x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+a^x\cdot\ln a}{x+a^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x\cdot(\ln a)^2}{1+a^x\cdot\ln a} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x\cdot(\ln a)^3}{a^x\,(\ln a)^2} = \ln a$$

Luego como $\ln M = \ln a \Rightarrow M = a$

Por tanto, el límite pedido es:

$$\lim_{x\to+\infty} (x+a^x)^{\frac{1}{x}} = a$$

g) $\lim_{x\to\Pi^+} \left(\frac{2}{sen\,x} - \frac{2}{\Pi - x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\Pi^+} \frac{2\Pi - 2x - 2\,sen\,x}{(\Pi - x)\cdot sen\,x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\Pi^+} \frac{-2-2\cos x}{-sen\,x + (\Pi - x)\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\Pi^+} \frac{2\,sen\,x}{-\cos x - \cos x - (\Pi - x)\,sen\,x} = 0$$

h) $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)}$

Este límite presenta la indeterminación 0^0. Resolvemos esta indeterminación tomando logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)} \Rightarrow \ln M = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln(2-e^x)\cdot\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(2-e^x)}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(2-e^x)\ln^2(2-e^x)}{x\cdot e^x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x\ln^2(2-e^x) - 2\,e^x\ln(2-e^x)}{e^x + x\,e^x} =$$

Por tanto: $\ln M = 0 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)} = 1$

i) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

30 Halla *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen^2\,x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1+x^2) - a & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen^2\,x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\,sen\,x\cos x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$$

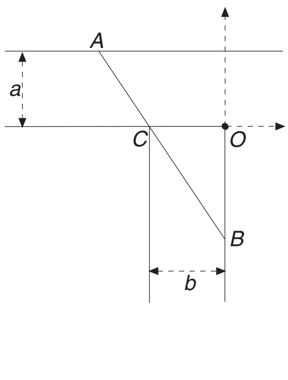
$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x - sen^2\,x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^2) - a = -a$$

Por tanto, esta función es continua en x = 0 siempre y cuando a = –1, ya que para

$$a = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

31 Calcula la longitud máxima que puede darse a una viga para pasarla horizontalmente de una calle de anchura a a otra perpendicular de anchura b.



Sea AB la viga.

Fijamos unos ejes de coordenadas cartesianas de centro en 0. Respecto a estos ejes coordenados, los puntos A, C, B tienen de coordenadas C (–b, 0) B (0, c). El punto A está en la intersección de la recta CB con $y = a$.

$$\left.\begin{array}{l} r_{CB} \equiv cx - by + cb = 0 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{ba - cb}{c}, a\right)$$

La longitud de la viga es:

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{ba - cb}{c}\right)^2 + (a - c)^2} = \frac{(a - c)}{c}\sqrt{b^2 + c^2}$$

$$d'(A, B) = \frac{-c^3 - ab^2}{c^2\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow +c^3 + ab^2 = 0 \Rightarrow c = -\sqrt[3]{ab^2}$$

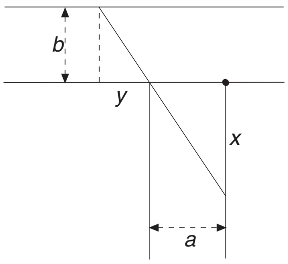
Para c = $-\sqrt[3]{ab^2}$ la función tiene un mínimo, por tanto, la longitud máxima es la distancia del punto A al B, siendo

$$A\left(-\sqrt[3]{a^2b} - b, a\right) \text{ y } B\left(0, -\sqrt[3]{ab^2}\right)$$

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2b} + b\right)^2 + \left(-\sqrt[3]{ab^2} - a\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}\ m$$

La longitud máxima es: $\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}\ m$.

Otra forma:



$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y} \Rightarrow y = \frac{ab}{x}$$

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + x^2}\left(1 + \frac{b}{x}\right)$$

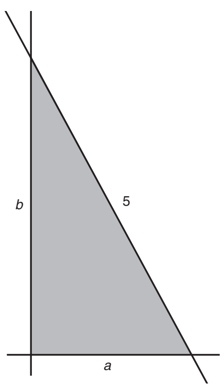
$$l' = \frac{x^3 - ba^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow x^3 - ba^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{ba^2}$$

Para este valor de x, esta función se hace mínima, por tanto, la longitud máxima de la viga viene dada por:

$$l = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{b^2a^4}}\left(1 + \frac{b}{\sqrt[3]{ba^2}}\right) = \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3\ m$$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

32 Un segmento de longitud 5 cm apoya sus extremos en los semiejes positivos *OX* y *OY*, de manera que forma con éstos un triángulo rectángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.



Llamamos a y b a los catetos del triángulo rectángulo. La función a optimizar es

$$A = \frac{1}{2}a \cdot b$$

Como $a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow b = \sqrt{25 - a^2}$. Por tanto,

$$A(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{25 - a^2}$$

$$A'(a) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{25 - a^2} + \frac{-2a^2}{2\sqrt{25 - a^2}}\right] = \frac{1}{2}\frac{25 - 2a^2}{\sqrt{25 - a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 2a^2}{2\sqrt{25 - a^2}} = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$A''(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^3 - 75a}{(25 - a^2)\sqrt{25 - a^2}}$$

$$A''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Por tanto, las dimensiones del triángulo de área máxima buscado son

$$a = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ cm} \qquad b = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ cm}$$

33 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \text{ si } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ es:

Monótona creciente en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

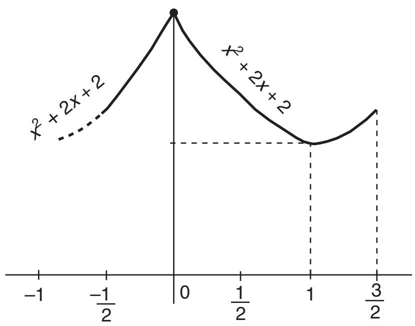
Monótona decreciente en $(0, 1)$

Tiene un mínimo relativo en $(1, 1)$, pues

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1\ (x \geq 0)$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow$ Mínimo $(1, 1)$.

En $x = 1$ tiene un mínimo absoluto que vale 1, como podemos ver a través de la gráfica.



34 Se considera la función *f*, definida en *R*, por:

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \text{ si } x \neq 0}$$

$$\mathbf{f(0) = 0}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

• Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$, pues es continua por la derecha y por la izquierda.

• Veamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{1 + e^{\frac{1}{h}}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h}{1 + e^{\frac{1}{h}}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 1$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues existen las derivadas laterales pero no coinciden.

35 A un vendedor de ordenadores le cuesta 140.000 pesetas cada modelo de la marca PCHE-COMP. Ha comprobado que, al precio de 240.000 pesetas unidad, vende 30 ordenadores mensualmente y que por cada 2.000 pesetas de descuento en el precio puede vender 3 unidades más al mes. Halla a qué precio debe venderlos para obtener el máximo beneficio posible.

Con un descuento de $(2\,000 \cdot n)$ ptas. venderá $3n + 30$ ordenadores cada mes. La función a optimizar que nos dará el beneficio es:

$B(n) = (240\,000 - 140\,000 - 2\,000 \cdot n) \cdot (3n + 30)$

$B(n) = -6\,000n^2 + 240\,000n + 3\,000\,000$

$B'(n) = -12\,000n + 240\,000 = 0 \Rightarrow n = 20$

$B''(n) = -12\,000 \Rightarrow B''(20) < 0 \Rightarrow$ que para $n = 20$ el beneficio es máximo.

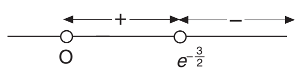
El precio a que debe venderlos es $P = 240\,000 - 2\,000 \cdot 20 = 200\,000$ ptas. cada ordenador.

36 Estudia el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$Dom\, f = \{x \in R \mid x > 0\} = (0, +\infty)$

Determinamos la monotonía estudiando el signo $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2 \ln x - 3}{x^3}$$

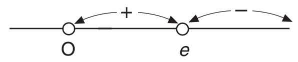


$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

y estrictamente decreciente en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

37 Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Como aplicación, prueba que si $x > 0$ entonces $x^e \leq e^x$.

• Determinamos la monotonía de $f(x)$ estudiando el signo de $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$



$f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, e)$ y estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$.

• Determinemos los extremos:

$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln = 0 \Rightarrow x = e$

$f''(x) = \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3}$; $f''(e) < 0$.

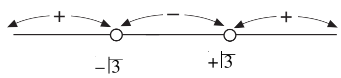
$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

La función $f(x)$ sólo está definida para $x > 0$ por la monotonía y la existencia de máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$, podemos escribir que

$$f(x) \leq \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x \leq x \Rightarrow \ln x^e \leq x \Rightarrow \boxed{x^e \leq e^x}$$

38 1) Enuncia, en función de la derivada segunda, las condiciones de concavidad o concavidad hacia las *y* positivas y convexidad (o concavidad hacia las *y* negativas) en un punto.
2) Siendo $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 4x + 3)$, calcula:
• Los intervalos en los que *f* es cóncava.
• Los intervalos en los que *f* es convexa.

1) En el libro de texto se pueden ver los enunciados pedidos.
2) $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 4x + 3)$.
Para estudiar la concavidad de esta función vemos el signo de la derivada segunda.
$f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x + 1)$
$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 3)$



$f(x)$ es cóncava hacia las y positivas si $f''(x) > 0$, es decir en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$, y cóncava hacia las y negativas si $f''(x) < 0$, es decir, en $\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$.

39 Determina *a* y *b* para que el siguiente límite exista y sea finito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) + ax + bx^2}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) + ax + bx^2}{\operatorname{sen}^3 x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + a + 2bx}{3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}$$

Si $a \neq -1$ este límite tiende a infinito. Por tanto, $\boxed{a = -1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + 2b\,x}{3\,sen^2\,x \cdot cos\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 2b}{6\,sen\,x \cdot cos^2\,x - 3\,sen^3\,x}$$

Si $2b \neq +1$, este límite es infinito. Por tanto, para $\boxed{b = +\frac{1}{2}}$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 1}{6\,sen\,x \cdot cos^2\,x - 3\,sen^3\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6\,cos^3\,x - 21\,sen^2\,x \cdot cos\,x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

40 Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

Los puntos buscados serán de la forma $P\left(x, \pm\sqrt{8x}\right)$

La función a optimizar es:

$$d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\pm\sqrt{8x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 36}$$

$$d(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 36}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 36}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$d'(x) = \frac{32}{(x^2 - 4x + 36)\sqrt{x^2 - 4x + 36}}$$

$d''(2) > 0$

Por tanto, para $x = 2$ la distancia es mínima. Los puntos buscados son: $P\,(2, +4)$, $Q\,(2, -4)$.