Actividades iniciales

1. Dada la función $g(x) = \sqrt{3x+1}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+3h+1} - \sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x+3h+1-3x-1}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

2. Dada la función $f(x) = |2x - 4|$, calcula:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f(x) = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 \text{ si } x \geq 2 \\ -2x+4 \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(2+h)-4-0}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2(2+h)+4-0}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 5] para las funciones:

$f(x) = 7 - 2x$ $\qquad$ $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

$k(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ $\qquad$ $h(x) = \sqrt{x+4}$

• $f(x) = 7 - 2x$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{-3-3}{3} = -2$$

• $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{g(5)-g(2)}{5-2} = \frac{90-15}{3} = 25$$

• $K(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{k(5)-k(2)}{5-2} = \frac{\frac{15}{26} - \frac{6}{5}}{3} = -0{,}21$$

• $h(x) = \sqrt{x+4}$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{h(5)-h(2)}{5-2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{6}}{3} = 0{,}18$$

2 Una pelota lanzada hacia arriba, desde una altura de 2 m, sigue la ecuación de movimiento dada por la función $h = 2 + 25t - 4{,}9t^2$, siendo h la altura en metros y t el tiempo en segundos. Calcula la velocidad media entre los instantes 1*s* y 2*s*. Calcula las velocidades instantáneas en esos dos instantes. ¿Cuál es el punto más alto que alcanza la pelota?

$$V_m = tv_m\,[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 32{,}4; f(t) = 2+25\,t - 4{,}9\,t^2$$

$$V_i\,(1) = tv_i\,[1] = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+25\,(1+h) - 4{,}9\,(1+h)^2 - [2+25-4{,}9]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{25\,h - 9{,}8\,h - h^2 \cdot 4{,}9}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\,(15{,}2 - 4{,}9\text{ h})}{h} =$$

$$= 15{,}2$$

$$V_i\,(2) = tv_i\,[2] = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+25\,(2+h) - 4{,}9\,(2+h)^2 - [2+50-19{,}6]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{25\,h - 19{,}6\,h - 4{,}9\,h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\,(5{,}4 - 4{,}9\,h)}{h} = 5{,}4$$

El punto más alto lo alcanzará en el instante en el cual la velocidad instantánea sea 0.

$$V_i\,(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\,(t_0+h) - f\,(t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+25\,(t_0+h) - 4{,}9\,(t_0+h)^2 - \left[2+25\,t_0 - 4{,}9\,t_0^2\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(25 - 9{,}8\,t_0 - 4{,}9\,h)}{h} = 25 - 9{,}8\,t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{25}{9{,}8} = 2{,}6 \text{ s}$$

El punto más alto lo alcanza a los 2,6 s.
La altura para este tiempo es:

$$h = 2 + 25 \cdot 2{,}6 - 4{,}9 \cdot 2{,}6^2 = 33{,}876 \text{ m}$$

El punto más alto que alcanza la pelota está a 33,876 + 2 = = 35,876 m del suelo.

3 Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

1) $f(x) = -3$; $f'(2)$ $\qquad$ 2) $g(x) = \dfrac{-5}{x}$; $D[g\,(1)]$

3) $H(x) = 3x^2-2x+2$; $H'(-1)$ $\qquad$ 4) $k(x) = (2x-1)^2$; $D[k(2)]$

5) $l(x) = \sqrt{x+3}$; $l'(6)$ $\qquad$ 6) $t(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ $D[t(0)]$

$$1)\ f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3-(-3)}{h} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 0}$$

2) $D[g(1)] = g'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{-5}{1+h} - \dfrac{-5}{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-5+5+5h}{h\,(1+h)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5}{1+h} = 5 \Rightarrow \boxed{D[g(1)] = 5}$

3) $H'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{H(-1+h)-H(-1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 2 - 7}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3 - 6h + 3h^2 + 2 - 2h + 2 - 7}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3h-8)}{1+h} =$

$= -8 \Rightarrow \boxed{H'(-1) = -8}$

4) $D[k(2)] = k'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k(2+h)-k(2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[2(2+h)-1]^2 - 3^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h^2 + 12h + 9 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,(4h+12)}{h} = 12$

5) $l'(6) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{l(6+h)-l(6)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h} - 3}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{9+h}-3\right)\left(\sqrt{9+h}+3\right)}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{9+h}+3} = \dfrac{1}{6}$

6) $D[t(0)] = t'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{t(0+h)-t(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h^2+1} - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h^2}{(h^2+1)\,h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h}{h^2+1} = 0$

4 **Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 2x^3 + x$ en el origen de coordenadas.**

$f(x) = 2x^3 + x$

Recta tangente: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$f'(x) = 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

$y - 0 = 1\,(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$

Recta normal: $y - f(0) = \dfrac{-1}{f'(0)} \cdot (x - 0)$

$y - 0 = -1\,(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$

5 **Halla los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 30x - 6$ es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.**

La pendiente de la recta $y = 6x - 5$ vale 6; por tanto, la pendiente de la recta tangente, al ser paralela a la anterior, también vale 6. Hemos de encontrar el punto $(x_0, f(x_0))$ en el cual $f'(x_0) = 6$.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 30 \Rightarrow f'(x_0) = 6x_0^2 + 6x_0 - 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 30 = 6 \Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 36 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0^2 + x_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 2;\ x_0 = -3$

Los puntos son: $(2, -38)$ y $(-3, 57)$.

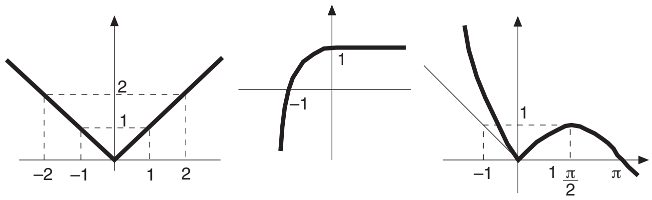
6 **Dada la función $y = x^2 - 4x + 3$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella va paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$.**

Recta secante que pasa por los puntos $(1, 0)$ $(4, 3) \Rightarrow y = x - 1$. La pendiente de esta recta vale 1, luego la pendiente de la tangente vale 1 al ser rectas paralelas $\Rightarrow f'(x_0) = 1$.

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 4 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{5}{2}$

El punto pedido es $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{-3}{4}\right)$

7 **Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$.**



$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$H(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = 1$

  $f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h-0}{h} = -1$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues las derivadas laterales son distintas.

- $g'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1-1}{h} = 0$

  $g'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2+1-1}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

  $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0^-} -h = 0$

$g(x)$ es derivable en $x = 0$.

- $H'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{H(0+h)-H(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\text{sen } h - 0}{h} = 1$

  $H'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{H(0+h)-H(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2 - h}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

  $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h\,(h-1)}{h} = -1$

La función $H(x)$ no es derivable en $x = 0$

8 **Halla los valores de a y b para los cuales la recta tangente a la curva**

$$y = x^2 + ax + b$$

en el punto P (3, 0) tenga de pendiente 2.

La gráfica de la curva dada pasa por el punto P (3, 0) $\Rightarrow 0 = 9 + 3a + b$.

Por otro lado, $f'(3) = 2 \Rightarrow$ como $f(x) = 2x + a \Rightarrow f'(3) = 6 + a \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 + a = 2 \Rightarrow a = -4$

Luego, $a = -4$ y $b = -9 - 3a = 3 \Rightarrow$ $\boxed{a = -4 \text{ y } b = 3}$

9 **Calcula las derivadas sucesivas que se indican:**

a) $f(x) = 2^{3x}$; $f'''(x)$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$; $g^{(4)}(x)$

c) $h(x) = ln\ (x+2)$; $h^{(5)}(x)$

d) $j(x) = sen\ 3x$; $j^{(10)}(x)$

a) $f(x) = 2^{3x}$; $f'(x) = 2^{3x} \cdot ln\ 2 \cdot 3$; $f''(x) = 2^{3x} \cdot (ln\ 2 \cdot 3)^2$;
$f'''(x) = 2^{3x} \cdot (3 \cdot ln\ 2)^3$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$; $g'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$; $g''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

$g'''(x) = \dfrac{-12}{(x-1)^4}$; $g^{(4)}(x) = \dfrac{48}{(x-1)^5}$

c) $h(x) = ln\ (x+2)$; $h'(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $h''(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

$h'''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$; $h^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{(x+2)^4}$; $h^{(5)}(x) = \dfrac{24}{(x+2)^5}$

d) $j(x) = sen\ 3x$
$j'(x) = 3\ cos\ 3x$
$j''(x) = -9\ sen\ 3x$
$j'''(x) = -27\ cos\ 3x$
$j^{(4)}(x) = +81\ sen\ 3x$
$j^{(5)}(x) = 243 \cdot cos\ 3x$
...
$j^{(10)}(x) = -sen\ 3x \cdot (3)^{10}$

Aparece un grupo de cuatro funciones derivadas diferentes, después se repiten.

10 **Obtén las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = ln\ (x-1)$ ***b)*** $g(x) = e^x + e^{-x}$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $f(x) = ln\ (x-1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $f''(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$; $f'''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow$

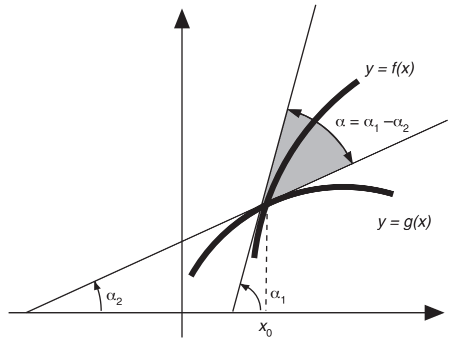
$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}$

b) $g(x) = e^x + e^{-x}$; $g'(x) = e^x - e^{-x}$; $g''(x) = e^x + e^{-x}$
$g'''(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow g^{(n)}(x) = e^x + (-1)^n \cdot e^{-x}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$h'(x) = -2x^{-3}$; $h''(x) = 6x^{-4}$; $h'''(x) = -24x^{-5}$
$h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}$

11 **Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P.**



Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x+2 \end{array}\right\}$ ***b)*** $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x+1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -1$

Los puntos de corte son (2, 4) y (–1, 1)

- Recta tangente a $f(x)$ en (2, 4).
  $y - f(2) = f'(2)\ (x-2) \Rightarrow y - 4 = 4\ (x-2) \Rightarrow y = 4x - 4$
  Recta tangente a $g(x)$ en (2, 4)
  $y - g(2) = g'(2)\ (x-2) \Rightarrow y - 4 = 1\ (x-2) \Rightarrow y = x + 2$
  $tg\ \alpha_1 = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 75°\ 57'\ 50''$
  $tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
  El ángulo que forman las curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el punto (2, 4) vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 30°\ 57'\ 50''$

- Recta tangente a $f(x)$ en (–1, 1)
  $y - f(-1) = f'(-1)\ (x+1)$
  $\Rightarrow y - 1 = -2\ (x+1) \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow tg\ \alpha_1 = -2$
  Recta tangente a $g(x)$ en (–1, 1)
  $y - g\ (-1) = g'\ (-1)\ (x+1) \Rightarrow y - 1 = 1\ (x+1) \Rightarrow y = x + 2$
  $\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1$
  $tg\ \alpha_1 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = 116°\ 33'\ 54''$
  $tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
  El ángulo que formen $f(x)$ y $g(x)$ en el punto (–1, 1) vale: 71° 33' 54''

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Se cortan en (1, 2) y (–1, 0)

- La recta tangente a $f(x)$ en (1, 2) tiene de pendiente 5 $\Rightarrow$
  $\Rightarrow tg\ \alpha_1 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 78°\ 41'\ 24''$
  La recta tangente a $g(x)$ en (–1, 0) tiene por pendiente 1 $\Rightarrow$
  $\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
  El ángulo que forman en el punto (1, 2) es: 33° 41' 24''

- La recta tangente a $f(x)$ en (–1, 0) tiene de pendiente 1 $\Rightarrow$
  $\Rightarrow tg\ \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45°$
  La recta tangente a $g(x)$ en (–1, 0) tiene de pendiente 1 $\Rightarrow$
  $\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
  El ángulo que forman en (–1, 0) vale 0°.

12 **Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

1) $D[x^2]$	**2)** $D[x^3 \cdot x^4]$
3) $D[(x^2-3)^5]$	**4)** $D[(3x)^{1/3}]$
5) $D[x \cdot 4^x]$	**6)** $D[(x+1)^3 \cdot (x-1)^2]$
7) $D[3^x \cdot ln^x]$	**8)** $D[(e^{2x}+3)^4]$
9) $D[ln\,(2-3x^2)^4]$	**10)** $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]$
11) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]$	**12)** $D\left[(4x+2) \cdot \sqrt{4x-2}\right]$
13) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right]$	**14)** $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right]$
15) $D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}]$	**16)** $D[sen\,4x]$
17) $D[sen^4\,x]$	**18)** $D[sen\,x^4]$
19) $D[tg\,2x^2]$	**20)** $D[sen\,x + cos\,x]$
21) $D[ln\,(cos\,2x)]$	**22)** $D[x^x]$
23) $D\left[arc\ tg\ \sqrt{x}\right]$	**24)** $D[(sen\,x)^{arc\,sen\,x}]$

1) $D[x^2] = 2x$

2) $D[x^3 \cdot x^4] = D[x^7] = 7x^6$

3) $D[(x^2-3)^5 = 10x(x^2-3)^4$

4) $D\left[(3x)^{\frac{1}{3}}\right] = (3x)^{-2/3}$

5) $D\,[x \cdot 4^x] = 4^x + 4^x \cdot ln\,4 \cdot x$

6) $D\,[(x+1)^3 \cdot (x-1)^2] = (x^2-1)\,[5x^2+4x-1]$

7) $D\,[3^x \cdot lnx] = 3^x \cdot ln3 \cdot lnx + \dfrac{3^x}{x}$

8) $D\,[(e^{2x}+3)^4] = 8e^{2x}\,(e^{2x}+3)^3$

9) $D\,[ln\,(2-3x^2)^4] = D\,[4 \cdot ln\,(2-3x^2)] = \dfrac{-24x}{2-3x^2}$

10) $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right] = D\left[2 \cdot (x^3-3x^2)^{-6}\right] = \dfrac{-12\,(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^7}$

11) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right] = \dfrac{5x}{(4-5x^2)\sqrt{4-5x^2}}$

12) $D\left[(4x+2)\sqrt{4x-2}\right] = 4\sqrt{4x-2} + \dfrac{4\,(4x+2)}{2\sqrt{4x-2}} = \dfrac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

13) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right] = \dfrac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x\,(x-1)}{x^2}$

14) $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right] = \dfrac{e^x - e^x \cdot x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x\,(1-x)}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$

15) $D\,[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}] = 2x \cdot 2^x \cdot a^{2x} + 2^x \cdot ln2 \cdot x^2 \cdot a^{2x} +$
$+ 2a^{2x}\,lna \cdot x^2 \cdot 2^x$

16) $D\,[sen\,4x] = 4\,cos\,4x$

17) $D\,[sen^4\,x] = D\,[(sen\,x)^4] = 4 \cdot sen^3\,x \cdot cos\,x$

18) $D\,[sen\,x^4] = 4x^3 \cdot cos\,x^4$

19) $D\,[tg\,2x^2] = 4x\,(1 + tg^2\,2x^2) = \dfrac{4x}{cos^2\,(2x^2)}$

20) $D\,[sen\,x + cos\,x] = cos\,x - sen\,x$

21) $D\,[ln\,(cos\,2\,x)] = \dfrac{-2\,sen\,2x}{cos\,2x} = -2\,tg(2x)$

22) $D\,[x^x] = x^x\,[lnx + 1]$

23) $D\left[arc\cdot\ tg\ \sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2x\,(1+x)}$

24) $D\,[(sen\,x)^{arc\,\cdot\,sen\,x}] =$
$= (sen\,x)^{arc\,\cdot\,senx}\left[\dfrac{ln\,(sen\,x)}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{cos\,x \cdot arc\cdot\,sen\,x}{sen\,x}\right]$

13 **¿En qué puntos o punto la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?**

Las pendientes de las rectas tangentes a esta curva verifican la relación:

$$y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow m = 3x^2 + 3$$

Esta pendiente toma el menor valor posible en el vértice de esta función $y = 3x^2 + 3$ cuadrática, es decir en $x = 0$. Luego la menor pendiente de la recta tangente está en (0, 4) y vale 3.

14 **Demuestra que los triángulos que forman las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ con los semiejes positivos coordenados tienen área constante. ¿Cuál es el valor de esta constante?**

Las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ en el punto $P\left(a, \dfrac{2}{a}\right)$ tienen de ecuación: $y - \dfrac{2}{a} = \dfrac{-2}{a^2}\,(x-a)$ y cortan a los semiejes positivos coordenados en los puntos $A\,(2a, 0)$ y $B\left(0, \dfrac{4}{a}\right)$.

Luego los triángulos que forman estas rectas tangentes tienen de vértices 0 (0, 0), $A\,(2a, 0)$ y $B\left(0, \dfrac{4}{a}\right)$ y de área:

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot \dfrac{4}{a}$ 4 unidades cuadradas $\Rightarrow$ El área es constante y vale 4.

15 **Encuentra los valores aproximados de log 11; $\sqrt[3]{1{,}01}$ y $\sqrt{15{,}8}$.**

- Para calcular log 11 tomamos la función $f(x) = log\,x$ y aplicamos la aproximación que nos da la diferencial:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

con $x_0 = 10$ $\quad h = 1$

$f\,(x_0 + h) = log\,11; f\,(x_0) = log\,10 = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot ln\,10} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{10 \cdot ln\,10}$

Luego: $log\,11 \approx 1 + \dfrac{1}{10 \cdot ln\,10} = 1{,}0434294...$

- Para calcular $\sqrt[3]{1{,}01}$ tomamos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y aplicamos la aproximación que nos da la diferencial para $x_0 = 1$ $\quad h = 0{,}01$

$f(x_0 + h) = \sqrt[3]{1{,}01}; f(x_0) = \sqrt[3]{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \dfrac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1{,}01} \approx 1 + \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}01 = 1{,}00\overset{\frown}{3}$

• Para calcular $\sqrt{15,8}$ formamos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y aplicamos la aproximación que nos da la diferencial como en los dos casos anteriores. Aquí tomamos: $x_0 = 16$ $h = -0,2$.

$f(x_0 + h) = f(15,8) = \sqrt{15,8}$; $f(x_0) = f(16) = \sqrt{16} = 4$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{15,8} \approx 4 + \frac{1}{8} \cdot (-0,2) = 3,975$$

16 **Un balón de playa tiene un radio de 15 cm. Un día caluroso se ha dilatado y su radio se ha incrementado 0,2 mm. Determina, de forma aproximada, el aumento de su volumen.**

$V(r) = \frac{4}{3}\Pi r^3$

$V'(r) = 4\Pi r^2$

$[\Delta V]_{r=15;\, h=0,02 \text{ cm}} \approx V'(15) \cdot h = 4\Pi \cdot 15^2 \cdot 0,02 \Rightarrow$

$[\Delta V]_{r=15;\, h=0,02 \text{ cm}} \approx 56,54866776 \text{ cm}^3$

Este valor se aproxima mucho al valor exacto:

$\Delta V = V(15 + 0,02) - V(15) = \frac{4}{3}\Pi \cdot 15,02^3 - \frac{4}{3}\Pi \cdot 15^3 =$
$= 56,624099 \text{ cm}^3$

17 **Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

1) $D\left[\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^3\right]$ **2)** $D[sen^2\, x^2]$

3) $D\left[arc\ sen\ \sqrt{x-1}\right]$ **4)** $D\left[\frac{cos\ (x-1)}{cos\ (x+1)}\right]$

5) $D[x^2 + sen\ x]$ **6)** $D\left[\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}\right]$

7) $D[ln\ tg^2\ x]$ **8)** $D[ln^2\ (ln\ x)]$

9) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x^2}\right]$ **10)** $D\left[\sqrt{\frac{1-sen\ x}{1+sen\ x}}\right]$

11) $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$ **12)** $D[x^{tg\ x}]$

13) $D\left[sen\ \{cos\ (sen\ x)\}\right]$ **14)** $D\left[arc\ tg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$

15) $D\left[ln\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{1+x}\right]$ **16)** $D\left[\frac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right]$

17) $D\left[\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]$ **18)** $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]$

19) $D[sen^3\, 2x \cdot cos^2\, 3x]$ **20)** $D[arc\ tg\ (sen\ x)]$

21) $D[arc\ sen\ (tg\ x)]$ **22)** $D\left[ln\left(arc\ sen\ \sqrt{x}\right)\right]$

23) $D[x + x^x]$ **24)** $D\left[ln\left(e^{2x} + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)\right]$

25) $D[x^{ln\ x}]$ **26)** $D\left[ln\left(tg\ \frac{x}{2}\right)\right]$

27) $D[x \cdot e^{2x} \cdot (1 + e^{2x})^2]$ **28)** $D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}\right]$

29) $D\left[\sqrt{x + \sqrt{x}}\right]$ **30)** $D\left[arc\ tg\ \sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}\right]$

31) $D[e^{sen\ x} + e^{cos\ x}]$ **32)** $D[(sen\ x)^{2\,cos\ x}]$

33) $D[ln\ (sen^3\ x)]$ **34)** $D\left[x^{x^x}\right]$

35) $D\left[\frac{1}{2}\ ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

1) $D\left[\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^3\right] = 3\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) =$

$= \frac{6x^2 - 3}{\sqrt{1-x^2}}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)$

2) $D[sen^2\, x^2] = 4x \cdot sen\ x^2 \cdot cos\ x^2 = 2x \cdot sen\ 2x^2$

3) $D\left[arc\cdot\ sen\ \sqrt{x-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x-1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

4) $D\left[\frac{cos\ (x-1)}{cos\ (x+1)}\right] =$

$= \frac{-sen\ (x-1) \cdot cos\ (x+1) + sen\ (x+1) \cdot cos\ (x-1)}{cos^2\ (x+1)} =$

$= \frac{sen\left[(x+1)-(x-1)\right]}{cos^2\ (x+1)} = \frac{sen\ 2}{cos^2\ (x+1)}$

5) $D[x^2 + sen\ x] = 2x + cos\ x$

6) $D\left[\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}} \cdot \frac{7(1-7x) + 7(1+7x)}{(1-7x)^2} =$

$= \frac{7}{(1-7x)\sqrt{1-49x^2}}$

7) $D[ln\ tg^2\ x] = D[2 \cdot ln\ (tgx)] = \frac{2(1 + tg^2\ x)}{tg\ x}$

8) $D[ln^2\ (ln\ x)] = 2\ ln\ (ln\ x) \cdot \frac{1}{x\ ln\ x} = \frac{2\ ln\ (ln\ x)}{x \cdot ln\ x}$

9) $D\left[(1-x) \cdot \sqrt{1+x^2}\right] = -1 \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}(1-x) =$

$= \frac{-2x^2 + x - 1}{\sqrt{1+x^2}}$

10) $D\left[\sqrt{\frac{1-sen\ x}{1+sen\ x}}\right] =$

$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-sen\ x}{1+sen\ x}}} \cdot \frac{-cos\ x\ (1+sen\ x) - cos\ x\ (1-sen\ x)}{(1+sen\ x)^2} =$

$= \frac{-cos\ x}{(1+sen\ x)\sqrt{1-sen^2\ x}} = \frac{-1}{1+sen\ x}$

11) $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right] =$

$= D\left[ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right] =$

$= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$

12) $D[x^{tg\ x}] = x^{tg\ x} \cdot \left(\frac{ln\ x}{cos^2\ x} + \frac{tg\ x}{x}\right)$

13) $D[sen\ \{cos\ (sen\ x)\}] =$
$= cos\ \{cos\ (sen\ x)\} \cdot [-sen(sen\ x)] \cdot cos\ x$

14) $D\left[arc\ tg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{1\,(x+1) - 1\,(x-1)}{(x+1)^2} =$

$= \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$

15) $D\left[ln\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{1+x}\right] = D\left[-ln\,(1+x) + \frac{1}{1+x}\right] =$

$= -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-2-x}{(1+x)^2}$

16) $D\left[\frac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right] = D\left[x^3 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x}\right] =$

$= 3x^2 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x} + x^3 \cdot 3^{2x} \cdot ln\,3 \cdot 2 \cdot e^{-2x} -$

$- 2x^3 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x} = 3^{2x} \cdot e^{-2x}\,(3x^2 + 2\,ln\,3 \cdot x^3 - 2x^3)$

17) $D\left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] = \frac{1 \cdot \sqrt{a^2-x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

18) $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right] = D\left[ln\,(\sqrt{x}-1) - ln\,(\sqrt{x}+1)\right] =$

$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}$

19) $D\,[sen^3\,2x \cdot cos^2\,3x] =$
$= 6\,sen^2\,2x \cdot cos\,2x \cdot cos^2\,3x - 6\,sen^3\,2x \cdot cos\,3x \cdot sen\,3x$

20) $D\left[arc\cdot\,tg\,(sen\,x)\right] = \frac{cos\,x}{1+sen^2\,x}$

21) $D\,[arc\ sen\,(tg\,x)] = \frac{1+tg^2\,x}{\sqrt{1-tg^2\,x}}$

22) $D\left[ln\,(arc\ sen\sqrt{x}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x-x} \cdot arc\ sen\sqrt{x}}$

23) $D\,[x + x^x] = 1 + x^x\,(lnx + 1)$

24) $D\left[ln\left(e^{2x} + \sqrt{1+e^{2x}}\right)\right] = \frac{2\,e^{2x} + \frac{2\,e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^{2x} + \sqrt{1+e^{2x}}} =$

$= \frac{e^{2x}\left(2\sqrt{1+e^{2x}} + 1\right)}{e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}} + 1 + e^{2x}}$

25) $D\left[x^{ln\,x}\right] = x^{ln\,x}\left[\frac{2\,ln\,x}{x}\right] = 2\,ln\,x \cdot x^{ln\,x-1}$

26) $D\left[ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1+tg^2\,\frac{x}{2}}{2\,tg\,\frac{x}{2}}$

27) $D\,[x \cdot e^{2x} \cdot (1+e^{2x})^2] =$
$= e^{2x}\,(1+e^{2x}) + 2xe^{2x}\,(1+e^{2x})^2 + 2 \cdot (1+e^{2x}) \cdot 2e^{2x} \cdot x \cdot e^{2x} =$
$= e^{2x}\,[1+e^{2x}]\,[1 + e^{2x} + 2x + 6xe^{2x}]$

28) $D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}\right] = D[1 + e^{-2x}] = -2\,e^{-2x}$

29) $D\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x\,(x+\sqrt{x})}}$

30) $D\left[arc\ tg\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}\right] =$

$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}\right)^2} \cdot \frac{\frac{2\,sen\,x}{(1+cos\,x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}} =$

$= \frac{sen\,x}{\frac{2}{1+cos\,x} \cdot (1+cos\,x)\sqrt{1-cos^2\,x}} = \frac{1}{2}$

31) $D[e^{sen\,x} + e^{cos\,x}] = e^{sen\,x} \cdot cos\,x - e^{cos\,x} \cdot sen\,x$

32) $D[(sen\,x)^{2\,cos\,x}] =$

$= (sen\,x)^{2cos\,x}\left[-2\,sen\,x\,ln\,(sen\,x) + \frac{2\,cos^2\,x}{sen\,x}\right]$

33) $D\,[ln\,(sen^3\,x)] = D\,[3 \cdot ln\,(sen\,x)] = \frac{3\,cos\,x}{sen\,x}$

34) $D\left[x^{x^x}\right] = x^{x^x}\left[x^x\,(ln\,x+1) \cdot ln\,x + \frac{x^x}{x}\right] =$

$= x^{x^x} \cdot x^x\left(ln^2\,x + ln\,x + \frac{1}{x}\right)$

35) $D\left[\frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + arc\cdot\,sen\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}} \cdot$

$\cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} =$

$= \frac{1-\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

18 Considérese la hipérbola $x \cdot y = 1$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

La recta secante pasará por los puntos $P\,(1, 1)$ $Q\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y su ecuación es:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x + 2y - 3 = 0$$

La pendiente de esta recta es $m = -\frac{1}{2}$, luego las rectas tangentes paralelas a éste tendrán por pendiente $-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Las rectas tangentes de pendiente $-\frac{1}{2}$ pasarán por los puntos $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $Q\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

y sus ecuaciones son:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{2}\right)$$

19 **Sea la función $f(x) = x \cdot |x|$. Estudia su derivabilidad en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como es una función definida a trozos vamos a estudiar su derivabilidad en $x = 0$ a través de las derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^+} h = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^-} (-h) = 0$$

La función $f(x) = x \cdot |x|$ es derivable en $x = 0$, pues sus derivadas laterales existen y son iguales.

20 **Determina de manera razonada todas las funciones f que sean polinómicas de tercer grado y verifiquen $f'(-1) = f'(1) = 0$. ¿Puede existir alguna de las funciones determinadas anteriormente que verifique $f(0) = f(1) = 0$?**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = 3a - 2b + c \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = -3a,\ b = 0$$

Las funciones polinómicas de tercer grado que verifican las hipótesis del enunciado son de la forma:

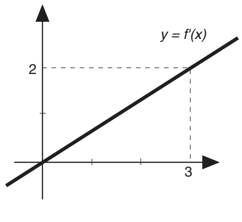
$$f(x) = ax^3 - 3ax + d$$

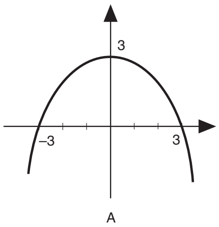
Para que verifique $f(0) = f(1) = 0$, deberán cumplir:

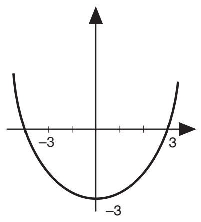
$$\left.\begin{array}{r} d = 0 \\ a - 3a + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d = 0 \\ a = 0 \end{array}$$

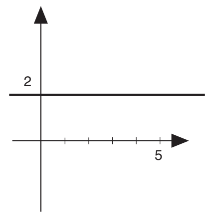
Luego no existe ninguna función polinómica de tercer grado que verifique estas condiciones, excepto el polinomio nulo.

21 **La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.**









a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.
b) Indica cuál de las gráficas A, B o C corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

a) Expresión analítica de $y = f'(x)$. Es una recta que pasa por los puntos (0, 0) (3, 2), luego su ecuación es: $y = \frac{2}{3}x$.

b) Como $f'(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow f(x)$ ha de ser una función polinómica de 2.º grado, por lo cual la gráfica (C) queda descartada. La gráfica (A) corresponde a una función polinómica de 2.º grado, con coeficiente negativo en el término de 2.º grado, luego su función derivada sería negativa. Por tanto, la solución es la función (B).

22 **Determina los coeficientes a y b de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$ sabiendo que la recta tangente en el punto en que $x = 1$ es la recta $y = -2x$.**

La recta tangente en el punto en el cual $x = 1$ pasa por el punto (1, –2) y su pendiente vale (–2). Por tanto:

$$-2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -4$$

Por otro lado, $f'(1) = -2 \Rightarrow$ como $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 2a + b = -2$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -4 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -6 \end{array}$$

Luego, la parábola tiene de ecuación:

$$y = 2x^2 - 6x + 2$$

23 **Se considera la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.**
***a)* Estudia su derivabilidad.**
***b)* Encuentra $f''(x)$.**

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos su derivabilidad en $x = 0$ y para ello buscamos las derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{h}{1+h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h\,(1+h)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1+h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{h}{1-h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h\,(1-h)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1-h} = 1$$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.
Luego es derivable $\forall\, x \in R$.

b) Hallamos $f''(x)$ a través de las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-2h - h^2}{h\,(1+h)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{-2 - h}{(1+h)^2} = -2$$

$$f''(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{(1-h)^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h - h^2}{h\,(1+h)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{2 - h}{(1+h)^2} = 2$$

La función $f''(x)$ no existe en $x = 0$ para todos los demás valores:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

24 Ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $x \cdot y = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

Las curvas se cortan en los puntos que obtenemos al resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\,,\ \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right);$$

$$Q\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\,,\ -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Basta con hallar el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas en P, en Q es igual.
Hallamos α_1 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x \cdot y = 1$ en el punto P con el eje de abscisas:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow tg\ \alpha_1 = \frac{-1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 148°\ 16'\ 57''$

Hallamos α_2 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 = 1$ en el punto P con el eje de abscisas.

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow tg\ \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_2 = 58°\ 16'\ 57''$

Luego, el ángulo que forman las rectas tangentes en P vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 90°$

25 ¿Es derivable en el punto $x = 1$ la función $f(x) = x + |x - 1|$? Justifica la respuesta.

$$f(x) = x + |x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2\,(1+h) - 1 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1-1}{h} =$$

La función $f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues sus derivadas laterales no coinciden.

26 Halla el punto de la curva $y = ln\ (1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

La recta tangente a la curva en el punto P (1, 0) tiene por pendiente:

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow m = 1$$

La recta perpendicular tendrá por pendiente (–1), por tanto:

$$\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow -1 \Rightarrow 1 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$$

Por tanto, el punto buscado es $P\ (-1,\ ln\ 2) \Rightarrow P\ (-1,\ 0{,}7)$

27 Busca los puntos de la curva

$$y = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + x + 1$$

que tienen la tangente formando un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

Hemos de buscar los puntos en los cuales la recta tangente tenga por pendiente $m = tg\ 45° = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 21x^2 + 26x + 1 \Rightarrow 4x^3 - 21x^2 + 26x + 1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^3 - 21x^2 + 26x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = \dfrac{13}{4}$

Obtenemos tres puntos:

$$P\ (0,\ 1) \qquad Q\ (2,\ 15) \qquad R\left(\frac{13}{4},\ 12{,}8\right)$$

28 Sea la función $f(x) = ln\ (a + bx^3)$. Estudia la relación que tiene que existir entre a y b para que $f'(1) = 1$.

$$f'(x) = \frac{3\,bx^2}{a + bx^3}$$

$$f'(1) = \frac{3\,b}{a+b} \Rightarrow \frac{3\,b}{a+b} = 1 \Rightarrow a = 2b$$

La relación que debe existir entre a y b es: $\boxed{a = 2b}$ con $b \neq 0$