Actividades iniciales

1. Expresa en notación matricial y resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$a)\ \begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - 3y + 4z = 9 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ -2x + 6y + z = 18 \end{cases}$$

Las resolución de los sistemas puede expresarse de la forma siguiente:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - 2F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 13 & 78 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución $x = 5$, $y = 6$.

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \\ -2 & 6 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

La última matriz proporciona la solución:
$x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

2. Si se cumple que $PQ = P$ y $QP = Q$, probar que $P^2 = P$.

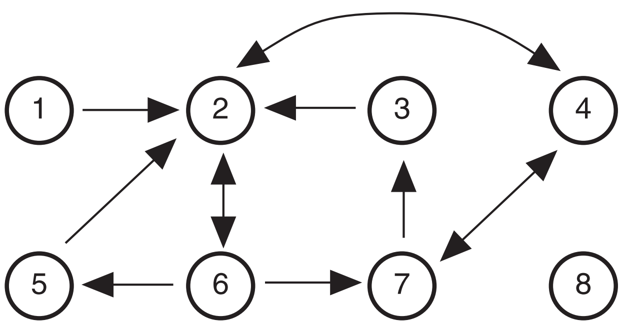
Veamos que $P^2 = P$. Para ello,

$$P^2 \underset{(1)}{=} P \cdot P \underset{(2)}{=} PQ \cdot P \underset{(3)}{=} P \cdot QP \underset{(4)}{=} PQ \underset{(5)}{=} P$$

Las igualdades anteriores son debidas a:

(1) la definición de la potencia cuadrado;
(2) la hipótesis $PQ = P$;
(3) la propiedad asociativa del producto;
(4) la hipótesis $QP = Q$;
(5) la hipótesis $PQ = P$.

3. El grafo adjunto muestra las relaciones que se establecen en un grupo de ocho personas. Construye una tabla que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



La matriz que indica las relaciones existentes en el grafo es:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula *a, b, c* y *d* para que se cumpla

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas y aplicando la igualdad de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a+b+7 \\ c+d-2 & 3d+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = a + 5 \\ 2b = a + b + 7 \\ 2c = c + d - 2 \\ 2d = 3d + 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $a = 5$, $b = 12$, $c = -6$, $d = -4$

2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

calcula:
***a)* $A + B$** **b) $A - B - C$**
c) $3A + 5B - 6C$ **d) $AB - BC$**
e) $2AB + 3AC - 5BC$

$$a)\ A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ 3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$$

d) $AB - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

e) $2AB + 3AC - 5BC =$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} -$

$- 5\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -18 & 27 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 25 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

3 Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$**, calcula** AB **y** BA**.**

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$

4 Calcula los productos posibles entre las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Los productos posibles son:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$

$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

5 Si A **y** B **son dos matrices cuadradas de orden** n**, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?**
a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$**?**

En general, las igualdades anteriores no son ciertas, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

a) $(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B) = AA + AB + BA + BB =$
$= A^2 + AB + BAA + B^2$

b) $(A - B)^2 = (A - B)\,(A - B) = AA - AB - BA + BB =$
$= A^2 - AB - BA + B^2$

c) $(A + B)\,(A - B) = AA - AB + BA - BB =$
$= A^2 - AB + BA - B^2$

6 Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando en la igualdad $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

obtenemos el sistema $\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$

La solución del sistema es $c = 0$, $a = d$ y b cualquiera.

Por tanto, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ van de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

Procediendo de manera análoga para

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ c = 0 \\ e + f = a \\ f = e \\ 0 = f \\ h + i = a + d \\ i = b + d \\ 0 = c + f \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = h$, $e = 0$, $f = 0$, g cualquiera, $i = 0$.

Las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & d & 0 \end{pmatrix}$ con d y g números cualesquiera.

7 **Para las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $A + B$	***d)*** AD	***g)*** $A^t C$	***j)*** $D^t D$
b) $3A - 4B$	***e)*** BC	***h)*** $D^t A^t$	***k)*** DD^t
c) AB	***f)*** CD	***i)*** $B^t A$	

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $3A - 4B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & 0 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 \\ -4 & -8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -10 \\ 16 & 8 & -21 \end{pmatrix}$

c) AB no puede realizarse ya que ambas son matrices de dimensión $2 \cdot 3$.

d) $AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $BC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 3 & 12 & -18 \\ 11 & -5 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

f) CD no puede realizarse.

g) A^tC no puede efectuarse.

h) $D^tA^t = (2\ 1\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (7\ -1)$

i) $B^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 12 \\ 16 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

j) $D^tD = (2\ 1\ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 14$

k) $DD^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (2\ 1\ 3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

8 **Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Toda matriz cuadrada A puede expresarse en la forma

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

En la suma anterior, el sumando $\frac{A + A^t}{2}$ es una matriz simétrica y el sumando $\frac{A - A^t}{2}$ es una matriz antisimétrica.

Las descomposiciones pedidas son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \\ 1/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 9/2 \\ 1/2 & 0 & 5 & 9/2 \\ 0 & 5 & 7 & 9/2 \\ 9/2 & 9/2 & 9/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -3 & -1 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$

9 **Para la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcular** A^{50} **y** A^{97}**. Encuentra los valores de** a **y** b **para que la matriz** A **conmute con la matriz** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$**.**

Calculamos las potencias sucesivas de A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I$

etcétera.

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:¶

$A^{50} = A^{4 \cdot 12 + 2} = (A^4)^{12} \cdot A^2 = I^{12} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = -I$

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Para calcular los valores a y b operamos las matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando las matrices, se obtiene $a = 1$, $b = 0$.

10 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

Obtén si procede $(BA)^{-1}$.

Calculamos BA,

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz BA, por el método de Gauss-Jordan, es:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/10 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/15 & 1/15 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/10 \end{array}\right)$$

La matriz $(BA)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} 4/15 & 1/15 \\ -1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$

11 **Obtener las matrices X e Y que verifiquen los sistemas matriciales siguientes:**

a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$

Llamamos A y B a las matrices numéricas que aparecen en cada uno de los sistemas. Resolvemos éstos por el método de reducción y obtenemos:

a) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ 7Y = A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{3}{7}A + \frac{1}{7}B \\ Y = \frac{1}{7}A - \frac{2}{7}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \\ Y = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ Y = -\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B \\ Y = -\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} 3X + Y = A \\ X + Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + Y = A \\ X = -\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \\ Y = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = B \\ Y = -A + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -A + 3B \\ X = -A + 2B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

12 **Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$d)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad e)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad f)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Si $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, entonces $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

b) Si $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, entonces $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

c) Si $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, entonces $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha&-\operatorname{sen} n\alpha\\\operatorname{sen} n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$

d) Si $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, entonces $A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

e) Si $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, entonces $A^n=\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}$

f) Si $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, entonces $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n^2+n}{2}\\0&1&n\\0&0&0\end{pmatrix}$

13 **Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&3\end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.**

La matriz (AB) es $\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&7\\3&1\end{pmatrix}$

La matriz traspuesta de la anterior $(AB)^t$ es $\begin{pmatrix}7&3\\7&1\end{pmatrix}$

La matriz inversa de la anterior $(AB)^{-1}$ es $\begin{pmatrix}-1/4&1/2\\3/14&-1/2\end{pmatrix}$

14 **Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo**

$$A=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}\text{ y }B=\begin{pmatrix}4&5\\3&4\end{pmatrix}$$

La matriz B^{-1} es $\begin{pmatrix}-4&5\\3&-4\end{pmatrix}$

La matriz A^2 es $\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2$ es $\begin{pmatrix}-4&5\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36&45\\27&-36\end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2B$ es $\begin{pmatrix}-36&45\\27&-36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&0\\0&-9\end{pmatrix}$

15 **Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices escalonadas equivalentes a las matrices siguientes:**

$$a)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{pmatrix}\qquad b)\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{3}&\mathbf{-2}&\mathbf{1}\\\mathbf{4}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\qquad d)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{3}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

$$a)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{3F_1-F_2\to F_2}\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$$

$$b)\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[2F_1+F_3\to F_3]{F_1+F_2\to F_2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&3\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-2F_3\to F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2-2F_3\to F_3}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&3\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-2&1\\4&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[4F_1-F_3\to F_3]{3F_1-F_2\to F_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&8&-4\\0&8&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-F_3\to F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2-F_3\to F_3}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&8&-4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&0&1&3\\-1&1&2&1\\3&2&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{2F_1-F_2\to F_2}\\F_1+F_3\to F_3\\3F_1+F_4\to F_4\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\xrightarrow{2F_1-F_2\to F_2}\\F_1+F_3\to F_3\\3F_1+F_4\to F_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&-5&-1\\0&2&0&2\\0&1&-7&1\end{pmatrix}\xrightarrow[2F_4-F_2\to F_4]{F_2-F_3\to F_3}$$

$$\xrightarrow[2F_4-F_2\to F_4]{F_2-F_3\to F_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&-5&-1\\0&0&-5&-3\\0&0&-9&3\end{pmatrix}\xrightarrow{9F_3-5F_4\to F_4}$$

$$\xrightarrow{9F_3-5F_4\to F_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&-5&-1\\0&0&-5&-3\\0&0&0&-42\end{pmatrix}$$

16 **Utiliza el método de Gauss para averiguar si los sistemas siguientes tienen solución o no. En caso afirmativo, encuéntrala.**

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + 3y + z = -1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ 7x + 5y - z = 12 \\ 3x - y + z = 21 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 2x - y + 5z = 7 \\ x + 10y - 8z = 9 \end{cases}$$

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + 3y + z = -1 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7y + z = 1 \\ 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

El sistema tiene solución única: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

$$b)\ \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \\ 4y - 4z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = t$, con $t \in R$.

$$c)\ \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ 3y - 15z = 0 \\ -3y + 15z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ 3y - 15z = 0 \\ 0z = 2 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución.

$$d)\ \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ 7x + 5y - z = 12 \\ 3x - y + z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ -27y + 39z = -223 \\ y + 11z = -159 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ -27y + 39z = -223 \\ 336z = -4516 \end{cases}$$

El sistema tiene solución única: $x = 17{,}47$, $y = 27{,}67$, $z = -13{,}44$.

$$e)\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y + 2z = 10 \\ 2y + 2z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x = 1$, $y = 5 - t$, $z = t$.

$$f)\ \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 2x - y + 5z = 7 \\ x + 10y - 8z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 7y - 7z = -17 \\ -7y + 7z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 7y - 7z = -17 \\ 0z = -3 \end{cases}$$

El sistema no tiene soluciones.

17 **Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:**

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$a)\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$ No existe matriz inversa.

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right)$$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

18 Determina el valor de *a* para que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

no tenga inversa. Calcula A^{-1} para los restantes valores de *a*.

Utilizando el método de Gauss, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & -3a-1 & a & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7a+1 & -a & 2a & 1 \end{array}\right)$$

Cuando la expresión $7a + 1$ vale cero, es decir, $a = -1/7$, la matriz A no tiene inversa. Para los restantes valores de a, existe A^{-1} y su expresión es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7a+1} & \frac{-2}{7a+1} & \frac{7}{7a+1} \\ \frac{2a}{7a+1} & \frac{3a+1}{7a+1} & \frac{-2}{7a+1} \\ \frac{-a}{7a+1} & \frac{2a}{7a+1} & \frac{1}{7a+1} \end{pmatrix}$$

19 Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

b) Rango de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix}$ =

$$= \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

20 **Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro A:**

a) $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) $\text{Rango de} \begin{pmatrix} a-1 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Rango de} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-1 & a+2 \end{pmatrix} =$

$= \text{Rango de} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Si $a = 0$ el rango es 1 y si $a \neq 0$ el rango es 2.

b) $\text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & a+4 \end{pmatrix} =$

$= \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$

Si $a = -4$, el rango es 2 y si $a \neq -4$, el rango es 3.

c) $\text{Rango de} \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} = \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2a & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix} =$

$= \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$

- Si $a = 1$, el rango es 1.
- Si $a = -2$, el rango es 2.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, el rango es 3.

21 **¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir AB y BA?**

Sí es posible en el caso que las dimensiones sean $m \cdot n$ para A y $n \cdot m$ para B.
En esta situación, el producto AB es una matriz de dimensión $m \cdot m$ y el producto BA es una matriz de dimensión $n \cdot n$.

22 **Si A una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?**

Se tiene que:
$B^2 = B \cdot B - (2A - I) \cdot (2A - I) - 4A \cdot A - 2A \cdot I - 2A \cdot I + I^2 =$
$= 4A^2 - 2A - 2A + I - 4A - 4A + I = I$

Por tanto la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

23 **Encuentra todas las matrices de orden 2 que cumplan:**
a) $A^2 = A$ ***b)*** $A^2 = 0$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

La matriz $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

a) Al ser $A^2 = A$, debe cumplirse:

$$\begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc + d^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d-1) = 0 \\ c(a+d-1) = 0 \\ bc + d^2 = d \end{cases}$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1. $b = 0$, entonces $a^2 = a$, $d^2 = d$ y $c = 0$ o $a + d = 1$.
En estas condiciones las soluciones son las matrices

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ con c cualquiera.

2. $c = 0$, entonces $a^2 = a$, $d^2 = d$ y $b = 0$ o $a + d = 1$.
En estas condiciones, las soluciones son las matrices

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con b cualquiera.

3. $a + d = 1$, entonces $a = 1 - d$ y $b = \dfrac{d - d^2}{c}$

Las soluciones son las matrices $\begin{pmatrix} 1-d & \dfrac{d-d^2}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$ con c y d cualesquiera.

b) La condición $A^2 = 0$ se convierte en el sistema

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:
1. $b = 0$, entonces $a = 0$, $d = 0$ y c cualquiera.

Esto proporciona las soluciones $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con $c \in R$.

2. $c = 0$, entonces $a = 0$, $d - 0$ y b cualquiera.

Las soluciones son $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $b \in R$.

3. $a + d = 0$, entonces $a = -d$ y $b = -d^2/c$.

Las soluciones son $\begin{pmatrix} -d & -d^2/c \\ c & d \end{pmatrix}$ con c y d cualesquiera, $c \neq 0$.

24 Encuentra todas las matrices de orden 3 que conmutan con $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ que debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices y utilizando la definición de igualdad de matrices, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} a + 2c = a & d + 2f = d & g + 2i = 2a + d + 3g \\ b + \ \ c = b & e + \ \ f = e & h + \ \ i = 2b + e + 3h \\ \quad c = 3c & 3f = f & 3i = 2c + f + 3i \end{cases}$$

Las soluciones nos dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2i - 2a - 2g & i - 2b - 2h & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

siendo *a, b, g, h, i* números reales cualesquiera.

25 ***a)*** **Escribe tres matrices de dimensión 3 · 4, que tengan, respectivamente rango, 2, 1 y 4. Razona la respuesta.**

b) **Si cada una de las matrices escritas es la matriz asociada a un sistema de ecuaciones. ¿Qué se puede afirmar sobre el tipo de sistema del que se trata y de sus soluciones?**

a) Las matrices de dimensión 3 · 4,

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
- con rango 4 no es posible construirla.

b) En el primer caso y en el segundo se trataría de sistemas compatibles indeterminados.

26 Resuelve la ecuación matricial $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \mathbf{-10} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

Llamando a la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -10 \\ 4x - y + 2z = 11 \\ x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

cuya solución es $X = \begin{pmatrix} 58/39 \\ -163/39 \\ 17/39 \end{pmatrix}$

27 Averigua para qué valores del parámetro *t* la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula la matriz inversa de *A* para *t* = 1, si es posible.

Utilizando el método de Gauss-Jordan para la obtención de A^{-1} se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{t^2 - 12}{(t-2)(t+6)} & \frac{12}{(t-2)(t+6)} & \frac{-4t}{(t-2)(t+6)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4t}{(t-2)(t+6)} & \frac{t+4}{(t-2)(t+6)} & \frac{-4t}{(t-2)(t+6)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{(t-2)(t+6)} & \frac{-3}{(t-2)(t+6)} & \frac{t}{(t-2)(t+6)} \end{array}\right)$$

En los casos $t = 2$ y $t = -6$ no existe matriz inversa. Para cualquier otro valor de la variable *t*, existe matriz inversa.

Para $t = 1$, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/7 & -12/7 & 4/7 \\ 4/7 & -5/7 & -4/7 \\ -1/7 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$

28 Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Dada una matriz *A*, ¿existe otra matriz *B* tal, que el producto *AB* sea una matriz de una sola fila?**

b) **Prueba que si *A* verifica la relación $A^2 - A - I = 0$, entonces existe A^{-1}. Hállala.**

c) **Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica viendo de qué tipo son.**

a) En el caso de que la matriz A tenga dimensión $m \cdot n$, con $m \neq 1$, es imposible encontrar la matriz B cumpliendo las condiciones pedidas.
En el caso de que la matriz A tenga dimensión $1 \cdot n$, la matriz B tendrá dimensión $n \cdot m$ y la matriz resultante será la matriz fila $1 \cdot m$.

b) La matriz inversa de A es la matriz B que cumple $A \cdot B = I$.
La relación $A^2 - A - I = 0$ puede ser expresada en la forma: $A^2 - I = I$ o $A\ (A - I) = I$. Por tanto, la matriz inversa de A es $A - I$.

c) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$.
Veamos como son las potencias sucesivas:
$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (-A) \cdot (-A) = A^2$, luego v^2 es simétrica.
$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (-A) \cdot A^2 = -A^3$, luego A^3 es antisimétrica.
Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

29 **Si dos matrices de orden n A y B cumplen $AB - BA = I$, demuestra, utilizando el método de inducción, que para cualquier número natural m, mayor o igual que 1, se verifica $A^mB - BA^m = mA^{m-1}$,**

Para $m = 1$, la expresión $A^mB - BA^m = mA^{m-1}$ se transforma en $A^1B - BA^1 = 1 \cdot A^{1-1} \Rightarrow AB - BA = I$, que es verdadera.

Supongamos que la expresión $A^mB - BA^m = mA^{m-1}$ es cierta para $m = h$, es decir, $A^hB - BA^h = hA^{h-1}$, y veamos que se cumple para $m = h + 1$.

$$\begin{aligned}
A^{h+1}B - BA^{h+1} &= A\,(A^hB) - BA^{h+1} \underset{(*)}{=} A\,(BA^h + hA^{h-1}) - BA^{h+1} = \\
&= (AB)\,A^h + hA^h - BA^{+1} \underset{(*)}{=} \\
&\underset{(**)}{=} (BA+\mathrm{I})\,A^h + hA^h - BA^{h+1} = \\
&= BA^{h+1} + A^h + hA^h - BA^{h+1} = \\
&= A^h + hA^h = (h+1)\,A^h
\end{aligned}$$

Veamos que se cumple lo buscado; hemos hecho uso de las igualdades $A^hB = BA^h + BA^h + hA^{h-1}$ en $^{(*)}$
y $AB = BA + I$ en $^{(**)}$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

30 **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix},$$

averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 2$.

Utilizanzo el método de Gauss-Jordan y partiendo de la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{m^2+3}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{1}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{-m}{(m-1)(m-3)} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-12}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{m-4}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{3}{(m-1)(m-3)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4m}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{1}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{-m}{(m-1)(m-3)} \end{array}\right)$$

La matriz A^{-1} existe para cualquier valor de m distinto de 1 ó 3.
En el caso de $m = 2$, la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ es } \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

31 **Halla las matrices simétricas de orden dos tales que $A^2 = A$.**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b\,(a+d) \\ b\,(a+d) & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Los casos posibles son:

i) $b = 0$, entonces $a = 0$ o $a = 1$, y $d = 0$ o $d = 1$.
Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $a = 1 - d$, entonces $b = \pm\sqrt{d - d^2}$ con $d \in [0,1]$.
Las soluciones son las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1-d & \pm\sqrt{d-d^2} \\ \pm\sqrt{d-d^2} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \text{ con } d \in [0, 1].$$

32 **Dadas las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

La matriz $A - kI$ es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

La matriz $(A - kI)^2$ es

$$(A - kI)\,(A - kI) = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es $k = 1$.

33 Resuelve la ecuación matricial *B(2A + I) = AXA + B*, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Operando en la ecuación matricial, obtenemos:
$2BA + B = AXA + B \Leftrightarrow AXA = 2BA \Leftrightarrow AX = 2B \Leftrightarrow X = $
$= 2A^{-1}B$

Por tanto, la solución es la matriz $X = 2A^{-1}B$.

Al ser $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz buscada es

$$X = 2\,A^{-1}\,B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 0 & 14 & -22 \end{pmatrix}$$

34 Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

La matriz $A + A^t$ es

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A + A^t)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

35 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz

$Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz $Y = 3A^tA - 2I$ es

$$Y = 3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 39 \\ 39 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llamamos a $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, operamos y resolvemos el sistema correspondiente.

El sistema es $\begin{cases} 3a_{11} + a_{21} = 2 \\ 5a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{12} + a_{22} = 0 \\ 5a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$

Las soluciones son: $a_{11} = 4$, $a_{21} = -10$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$

La matriz X es $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

36 Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

Calculamos $A^2 - A - 2I$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

37 **Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide: *a)* Calcular M^2 y M^3. *b)* Calcula M^n, siendo n un número natural.

La matriz $M = aI + bJ$ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) Las potencias cuadrada y cúbica de M son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n con n natural, calculamos nuevas potencias.

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^4 con n natural tiene la expresión siguiente:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

La demostración de esta última proposición puede efectuarse por el método de inducción.

38 **La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$**

es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} & -\frac{ab}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

La matriz M siempre es inversible, ya que el ser $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $a^2 + b^2 \neq 0$.
La matriz inversa de M es

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

39 **Aplicando el método de Gauss, discute y resuelve los sistemas.**

a) $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + kz = k^2 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 2u = 1 \\ 3x + 2y + z + u = 7 \\ 3y + 4z + 7u = -4 \end{cases}$

a) Intercambiando las ecuaciones y triangulando el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -y + 2z = 2 \\ (2a-1)\, y + (a+1)\, z = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -y + 2z = 2 \\ (5a-1)\, z = 6a - 3 \end{cases}$$

- Si $a = 1/5$, el sistema no tiene solución.
- Si $a \neq 1/5$, el sistema tiene la siguiente solución única:

$$x = \frac{9}{5a-1},\ y = \frac{2a-4}{5a-1},\ z = \frac{6a-3}{5a-1}$$

b) Triangulando el sistema, se obtiene:

$$\begin{cases} x + y + kz = k^2 \\ (1-k)\, y + (k-1)\, z = k^2 - k \\ (k-1)\, y + (k^2-1)\, 2 = k^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + kz = k^2 \\ (1-k)\, y + (k-1)\, z = k^2 - k \\ (k^2 + k - 2)\, z = k^3 + k^2 - k - 1 \end{cases}$$

- Si $k = -2$, el sistema no tiene solución.
- Si $k = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones:
  $x = 1 - t - s$, $y = t$, $z = s$ con t y s números reales.
- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1$, el sistema tiene una única solución:

$$x = \frac{1-k}{k+2},\ y = \frac{1}{k+2},\ z = \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

c) Triangulando el sistema, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 2u = 1 \\ 3x + 2y + z + u = 7 \\ 3y + 4z + 7u = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z - 2u = 7 \\ 4y + 8z - u = 5 \\ 3y + 4z + 7u = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z - 2u = 7 \\ 16z + 3u = 3 \\ 2z + 41u = -41 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z - 2u = 7 \\ 16z + 3u = 3 \\ 325u = -331 \end{array}\right.$$

La solución única es:

$x = 1{,}675;\quad y = 0{,}314;\quad z = 0{,}566;\quad u = -1{,}018.$

40 **Resuelve la ecuación $AX - B + C = 0$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando en la ecuación, se tiene:

$AX - B + C = 0 \Leftrightarrow AX = B - C \Leftrightarrow X = A^{-1}(B - C)$

Por tanto,

$$X = A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

La solución es la matriz $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$

41 **Resuelve la ecuación matricial en *X*: $XA - 2B + 3C = D$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Operando en la ecuación, se tiene:

$$XA - 2B + 3C = D \Leftrightarrow XA = D + 2B - 3C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X = (2B - 3C + D)\,A^{-1}$$

Por tanto,

$$X = (2B - 3C + D)\,A^{-1} =$$

$$= \left[2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -37/5 \\ 7/5 & 49/5 \end{pmatrix}$$

La solución es la matriz $X = \begin{pmatrix} 4/5 & -37/5 \\ 7/5 & 49/5 \end{pmatrix}$

Resolución de problemas

1. LAS EDADES DE LA FAMILIA. Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que si escribe tres veces seguidas su edad obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?

Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101$$
$$P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego si la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen, respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.

Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

2. DOS NÚMEROS. Encuentra dos números tales, que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

Llamamos *x, y* a los números. Se debe cumplir que:

$$x + y = x \cdot y = \frac{x}{y}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = x \cdot y \\ x \cdot y = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow y = \dfrac{x}{x-1} \\ \Rightarrow xy^2 = x \Rightarrow y = \pm 1 \end{array}$$

Luego para $y = +1 \Rightarrow \dfrac{x}{x-1} = +1 \Rightarrow$ no existe solución.

Para $y = -1 \Rightarrow -1 = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

La solución válida es: $\boxed{x = \dfrac{1}{2}\,;\; y = -1}$