

RELACION DE PROBLEMAS DE ANÁLISIS

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1996/97.

1º. - De una función continua $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ se sabe que si $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una primitiva suya, entonces también lo es la función G dada por $G(x) = 3 - F(x)$. ¿Puedes determinar $f(33)$? ¿y $f(5)$? ¿y el valor de $\int_5^{33} f(x)dx$? Justifica las respuestas y en los casos de respuesta afirmativa, calcula los correspondientes valores.

2º. - La recta de ecuación $3x - y + 2 = 0$ es tangente a la parábola de ecuación $y = ax^2 + c$ en el punto $P = (1,5)$. Calcula las constantes a y c de la ecuación de la parábola describiendo el procedimiento que sigas. Dibuja la región plana limitada por la parábola dada y la recta cuya ecuación es $2y = 6x + 5$. Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

3º. - Supongamos que el rendimiento r de una alumna en un examen que dura una hora viene dado por la relación $r(t) = 300t(1 - t)$ donde t , con $0 \leq t \leq 1$, es el tiempo medido en horas. ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en qué intervalos disminuye? ¿En qué momentos se obtiene mayor rendimiento y cuanto vale? ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

4º. - De la gráfica de la función polinómica $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ se conocen los siguientes datos: que pasa por el origen de coordenadas y que en los puntos de abscisas 1 y -3 tiene tangentes paralelas a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Calcula a , b y c . Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y el eje de abscisas u calcula su área.

5º. - La línea recta que pasa por los puntos $(0,-6)$ y $(1,0)$ es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función f . Se sabe que el origen pertenece a la curva $y = f(x)$ y que en ese punto la recta tangente tiene pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f .

6º. - Explica en qué consiste el método de integración por partes. Calcula

$$\int x^2 \ln(x) dx,$$

donde $\ln(x)$ denota el logaritmo neperiano de un número positivo.

7º. - Calcula el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = f(3)$, y justifica el método empleado.

8º. - Sea f una función real definida por $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Determina los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas y halla las ecuaciones de dichas tangentes.

9º. - Considera la función f definida para $x \neq -2$ por la relación

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

Halla los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento y los extremos locales de f . Calcula $\int_2^6 f(x) dx$.

10º. - En las páginas de un libro ha de imprimirse un texto que ocupa 200 cm^2 . Los márgenes laterales han de ser de 4 cm. y los márgenes superior e inferior de 6 cm. cada uno. Calcula las dimensiones de cada página para que la cantidad de papel necesario sea mínima.

11º. - Se desea construir un depósito cilíndrico sin tapa que tenga 2 m^3 de volumen. Determina la altura del depósito y el radio de su base para que la cantidad de material empleado en su construcción sea mínima.

12º. - Determina los valores de m para los que el área de la región limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = mx$ es 1.

13º. - Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones:

$$y = \sin(x), \quad y = \cos(x), \quad x = 0 \quad y \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

14º. - Sea f' la función derivada de una función derivable f . Se sabe que f' es continua y que

- 1) $f(0) = 0, f(2) = 1, f(3) = 0, f(4) = -1, f(5) = 0$.
- 2) f' es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(4, +\infty)$.
- 3) f' es estrictamente decreciente en el intervalo $(2,4)$.
- 4) la recta de ecuación $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua de f' cuando $x \rightarrow +\infty$.

Esboza la gráfica de f' . ¿En qué valores de x alcanza f sus máximos y mínimos relativos?

15º. - Determina el dominio y la expresión de la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

- a) f es la función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $P=(0,5)$ y $Q=(5,0)$.
- b) g es la función dada por $g(x) = |x + 1|x$.
- c) h es la función dada por $h(x) = x|x|$.

16º. - Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ -1 & \text{si } 6 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

y sea F la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Se pide: Calcula $F(4)$ y $F(7)$ y dibuja la gráfica de F explicando cómo lo haces.

17°. - La velocidad de un móvil en función del tiempo viene dada por:

$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ -t+5 & \text{si } 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

Calcula la función espacio recorrido. Dibuja la gráfica de la función espacio recorrido. Prueba que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.

18°. - Halla el punto P de la gráfica de la función f definida para $x \geq -3$ por

$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$

que está más próximo al origen de coordenadas. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en P.

19°. - Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$. Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada y calcula su área.

20°. - Describe el método de integración por cambio de variable. Usa el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x)$ para hallar la integral:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x)}$$

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1997/98.

21°. - Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = |x+3|$. (1) Estudia la derivabilidad de f. (2) Dibuja las gráficas de f y f'.

22°. - Representa las curvas de ecuaciones:

$$y = x^2 - 3x + 3 \quad \text{e} \quad y = x$$

calculando dónde se cortan. Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.

23°. - (1) Sabiendo que F es una primitiva de una función f, halla una primitiva de f que se anule en el punto $x = a$. (2) De una función $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ se sabe que es dos veces derivable y también que

$$g(0) = 5 \quad g'(0) = 0 \quad \text{y} \quad g''(x) = 8 \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}$$

Calcula una expresión algebraica de g.

24°. - Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln(x))^2}$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

25°. - Una compañía aérea ofrece vuelos para grupos de estudiantes con las siguientes condiciones: Para organizar un vuelo, el número mínimo de pasajeros debe ser 80, los cuales pagarían 210 euros cada uno. Sin embargo, esta tarifa se reduce en 1 euro por cada pasajero que exceda el número de 80. Suponiendo que la capacidad de cada avión es de 105 pasajeros y que el coste para la compañía es de 100 euros por plaza ocupada, ¿qué número de pasajeros ofrecen el máximo y, respectivamente, el mínimo beneficio para la compañía?

26°. - Se sabe que la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio y que en los puntos $x = 0$ y $x = 4$ toma el mismo valor. (1) Halla a , b y c . (2) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

27°. - Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}.$$

(1) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y sus tangentes en los puntos de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$. (2) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área.

28°. - Se quiere construir un envase cerrado con forma de cilindro cuya área total (incluyendo las tapas) sea 900 cm^2 . ¿Cuáles deben ser el radio de la base y la altura para que el volumen del envase sea lo más grande posible? ¿Cuánto vale ese volumen máximo?

29°. - Sea la función $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$. (1) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f . (2) Calcula los máximos y los mínimos relativos de f .

30°. - (1) Hallar el área del triángulo formado por el eje OX y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$. (2) Hallar el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje OX para los valores $-1 \leq x \leq 0$.

31°. - Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f: [-7, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$. (2) Sea b el punto en el que f alcanza su máximo absoluto. Calcular $\int_{-7}^b f(x) dx$.

32°. - Sea $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ la función derivable que para $x \neq 0$ verifica

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\text{sen}(x)}$$

siendo \ln el logaritmo neperiano. (1) ¿Cuánto vale $f(0)$? (2) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

33°. - Sea f la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ cuya derivada f' es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

(1) Halla una expresión algebraica de f sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas. (2) Representa gráficamente la función f . (3) Estudia la derivabilidad de f' .

34°. - Se sabe que la temperatura, medida en grados centígrados, de un cámara frigorífica viene dada por la expresión $f(t) = at^2 + bt + c$ donde t representa las horas transcurridas desde su conexión a la red y a , b y c son tres constantes reales. Al conectarla, la temperatura interior asciende, por efecto del calor del motor, y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender la temperatura y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados. A las dos horas de haberla conectado, la temperatura es de tres grados bajo cero. Usando esos datos, determina los valores de las constantes a , b y c .

35°. - Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = |x + 1|$. (1) Representala gráficamente. (2) Estudia su derivabilidad. (3) Calcula $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

36°. - La temperatura media en una ciudad andaluza, desde las 12 horas del mediodía hasta la medianoche de un cierto día de agosto, viene dada por la expresión $T(x) = ax^2 + bx + c$, en la que x representa el número de horas transcurridas desde el mediodía. (1) Calcula a , b y c sabiendo que a las 5 de la tarde se alcanzó la temperatura máxima de 35°C y que a las 12 del mediodía se midieron 30°C . (2) Determina de forma razonada los puntos en los que la función anterior alcanza sus extremos absolutos y relativos.

37°. - Considera las funciones f y g de \mathbf{R} en \mathbf{R} definidas por

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \quad g(x) = -x^2 - 3x + 10$$

(1) Representa gráficamente ambas funciones. (2) Halla el área de la región del plano que está formada por los puntos (x, y) que cumplen $f(x) \leq y \leq g(x)$.

38°. - Calcula las asíntotas de la gráfica de la función f definida para $x \neq -1$ por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

y estudia la posición de dicha gráfica con respecto a las asíntotas.

39°. - Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ la función logaritmo neperiano, $f(x) = \ln(x)$. (1) Prueba que la función derivada es decreciente en todo su dominio. (2) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función g :

$(0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

40°. - Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dadas por

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3 - 2x$$

41°. - La función derivada de una función derivable $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ viene dada por la expresión:

$$f'(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(1) Determina una expresión algebraica de f , sabiendo que $f(-1) = \frac{9}{2}$. (2)

Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

42°. - Calcula una primitiva de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 \sin(x)$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

43°. - Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta $y = -x + 3$ y la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$.

44°. - Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación $y = f(x)$ siendo $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(1) ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente? (2) Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura. (3) ¿A qué recta se aproxima la trayectoria cuando $x \rightarrow \infty$? Justifica la respuesta.

45°. - Dibuja la región limitada por la gráfica de la función $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+x)$, la recta tangente a la gráfica de f en el origen y la recta $x = 1$. Halla el área de dicha región.

46°. - La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t , medido en años, según la función $P: [2,12] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por:

$$P(t) = \begin{cases} 10 + (t-6)^2 & \text{si } 2 \leq t \leq 10 \\ 28 - 2^{t-9} & \text{si } 10 < t \leq 12 \end{cases}$$

(1) Representa gráficamente la función P e indica en qué períodos de tiempo crece o decrece la población. (2) Indica los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo. (3) Si la población evolucionara a partir de $t = 12$ con la misma función que para $10 < t \leq 12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

47°. - Sea f la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula a , b , c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $Q = (-1,3)$ y que la tangente a dicha gráfica en el punto $M = (0,1)$ es horizontal.

48°. - Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = \frac{2}{1+x^2}$ y las rectas de ecuaciones $x = 1$ e $y = 3x + 2$.

49°. - Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, calcula

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx.$$

50°. - Se sabe que la función $f: [0,5] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a , b y c ?

51°. - Dos partículas A y B se mueven en el plano XOY . En cada instante de tiempo t las posiciones de las partículas son, respectivamente,

$$A = \left(\frac{1}{2}(t-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t) \right) \quad \text{y} \quad B = (2-t, 0).$$

Determina el instante t_0 en el que las partículas están más próximas entre sí y a qué distancia se halla una de otra en ese instante.

52°. - Calcula la integral

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{(\text{cos}(x))^3} dx$$

realizando el cambio de variable $\text{cos}(x) = t$. Calcula la misma integral utilizando el cambio de variable $\text{tg}(x) = u$. ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos? Justifica la respuesta.

53°. - La función f de \mathbf{R} en \mathbf{R} dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 0$. ¿Cuánto valen b y c ?

54°. - De las funciones continuas f y g se sabe que

$$\int_1^2 (f(x) + g(x)) dx = 3, \quad \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx = 3, \quad \int_1^3 f(x) dx = 3, \quad \int_1^2 2f(x) dx = 3$$

Calcula, si es posible, $\int_1^3 g(x) dx$ y, si no es posible, di por qué.

55°. - Sea f de \mathbf{R} en \mathbf{R} la función definida por $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$. (1) Demuestra que la recta de ecuación $y = -2x + 1$ es tangente a la gráfica de f y halla el punto de tangencia. (2) ¿Corta esta recta tangente a dicha gráfica en algún punto distinto al de tangencia?

56°. - Sea f de \mathbf{R} en \mathbf{R} la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(1) Estudia la derivabilidad de f . (2) Calcula $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x) dx$.

57°. - Sea k un número real y sea f de \mathbf{R} en \mathbf{R} la función definida por

$$f(x) = \cos(x) + kx.$$

(1) Determina todos los valores de k para los que la función anterior es creciente en todo su dominio. (2) Para $k = 1$ halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

58°. - Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la recta $y + x = 0$ y la curva de ecuación $y = x^2 + 4x + 4$.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1998/99.

59°. - Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida en la forma $f(x) = 1 + x \cdot |x|$. (a) Halla la derivada de f . (b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (c) Calcula $\int_{-1}^2 xf(x) dx$.

60°. - De la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$. Calcula a , b , c y d .

61°. - Dibuja la región limitada por la curva de ecuación $y = x(3-x)$ y la recta de ecuación $y = 2x - 2$. Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

62º. - Dada la función $f: [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ (donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x), determina cuál de las rectas tangentes a la gráfica de f tiene máxima pendiente.

63º. - Calcula el valor de la integral:

$$\int_{-1}^2 \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6} dx.$$

64º. - Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$. (a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. (b) ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha recta; en caso negativo, explica por qué.

65º. - (a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por:

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$$

(b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay. (c) Esboza la gráfica de f .

66º. - Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ que cumple que $f(1) = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

67º. - Sabiendo que la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es derivable, halla a y b .

68º. - Considera la función $f: \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

(a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \frac{\pi^2}{4}$. (b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior. (Usa en la integral el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.)

69º. - Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua.

(a) Define el concepto de primitiva de f .

(b) Halla una primitiva de la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = xe^{-x}$.

70°. - Considera la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x . (a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento así como los extremos relativos de f . (b) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de corte de la gráfica con el eje OX.

71°. - Determina una primitiva F de la función f dada (en los puntos donde no se anula el denominador) por $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}$, tal que la gráfica de F pase por el punto $(2, \ln(8))$.

72°. - Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida en la forma $f(x) = xe^{2x}$. (a) Determina los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuál es su valor). (b) Determina el valor de la integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + f(x)) dx.$$

73°. - Se desea construir una ventana "normanda" (rectangular con una semicircunferencia en la parte superior) que tenga de perímetro 6 m. ¿Qué dimensiones debe tener para que su superficie sea máxima?

74°. - Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))^2}{e^x - x - 1}.$$

75°. - Determina la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ sabiendo que es dos veces derivable, que su gráfica pasa por el punto $(1, 1)$, que $f'(1) = 0$ y que $f'(x) = \frac{1}{x}$.

76°. - (a) Enuncia la Regla de Barrow. (b) Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$, calcula la integral

$$\int_0^{\sqrt{x}} x \cos(x^2) dx.$$

77°. - (1) Esboza la gráfica de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

(2) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje OX y las rectas de ecuaciones $x + 2 = 0$ y $2x - 1 = 0$.

78°. - Una imprenta recibe el encargo de diseñar carteles en los que la zona impresa debe ocupar 100 cm^2 y hay que dejar de margen derecho 4 cm, de margen izquierdo 4cm, de margen superior 3 cm y de margen inferior 2 cm. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel para que se utilice la menor cantidad de papel que sea posible.

79°. - Considera la función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Dibuja su gráfica determinando previamente los siguientes elementos: sus asíntotas, extremos locales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de simetrías.

80°. - La recta de ecuación $y = -4x + 2$ representa la trayectoria de un móvil A. Otro móvil B se desplaza según la trayectoria dada por la curva de ecuación $y = g(x)$ donde $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es la función definida por $g(x) = -x^2 + 2x + c$. (1) Hallar el valor de c sabiendo que ambas trayectorias coinciden en el punto en que la función g tiene su máximo local. (b) ¿Coinciden ambas trayectorias en algún otro punto? En tal caso, dibuja la región limitada por ambas trayectorias y calcula su área.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1999/00.

81°. - Dibuja el recinto limitado por las curvas

$$y = e^{x+2}, \quad y = e^{-x} \quad \text{y} \quad x = 0$$

y calcula su área.

82°. - Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos, viene dada por

$$h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}.$$

Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta. Teniendo en cuenta que la velocidad es $v(t) = h'(t)$, halla la velocidad al cabo de 2 segundos.

83°. - Se dispone de 288.000 ptas. Para vallar un terreno rectangular colindante con un camino recto. Si el precio de la valla que ha de ponerse en el lado del camino es de 800 ptas./m y el de la valla de los restantes lados es de 100 ptas./m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno rectangular de área máxima que se puede vallar?

84°. - Determina a , b y c para que la curva $y = \frac{a}{x^2 + bx + c}$ sea la siguiente:

(Gráfica con AH $y = 0$; AAVV $x = -3$ y $x = 1$; Máximo en el punto $(-1, -2)$).

85°. - Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad, la velocidad de los coches entre las 2h. Y las 6 h. de la tarde viene dada por

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \quad \text{para } t \in [2, 6].$$

(a) ¿A qué hora circulan los coches a más velocidad? Justifica la respuesta.

(b) ¿A qué hora circulan los coches a menos velocidad? Justifica la respuesta.

86°. - Considera las funciones $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definidas por

$$f(x) = 6 - x^2, \quad g(x) = |x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g . (b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

87°. - Calcula el valor de la integral

$$\int_{-1}^3 (x^2 + 5) e^{-x} dx.$$

88°. - Sea f la función definida para $x \neq -2$ por

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f . (b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f . (c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f .

89°. - Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de f .

90°. - Considera las funciones $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ definidas por:

$$f(x) = 2\text{sen}(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \text{sen}(2x).$$

(a) Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g . (b) Calcula la región descrita en el apartado anterior.

91°. - Sea $F: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por:

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt.$$

(a) Determina $F(1)$. (b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

92°. - Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 cm^3 . Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser dichas medidas? Justifica la respuesta.

93°. - (a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las gráficas de las curvas:

$$y = x^2 + 1, \quad y = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad y = x - 1.$$

(b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

94°. - Calcula a y b sabiendo que la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

es derivable.

95°. - (a) Dibuja el recinto limitado por la curva $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = 1$ y el eje de abscisas. (b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

96°. - De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro, calcula las dimensiones del que tiene área máxima.

97°. - Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 2 + x - x^2$. Calcula $\alpha, \alpha < 2$, de forma que:

$$\int_{\alpha}^2 f(x) dx = \frac{9}{2}.$$

98°. - Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{tg}(x^2)}.$$

99°. - Determina el valor de las constantes a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x(ax^2 + bx + c)$ tiene un punto de inflexión en $(-2, 12)$ y que en dicho punto, la recta tangente tiene por ecuación $10x + y + 8 = 0$.

100°. - Calcula el valor de α positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α .

101°. - Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcula los límites laterales de f en $x = 0$. ¿Es f continua en $x = 0$? (b) Calcula el valor de la derivada de f en $x = 1$.

102°. - Considera la función: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)e^x$. (a) Calcula $\int f(x) dx$. (b) Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$.

103°. - Determina una función polinómica de grado 3 sabiendo que verifica que alcanza un máximo en $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ y que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

104°. - Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

¿Qué representa geoméricamente?

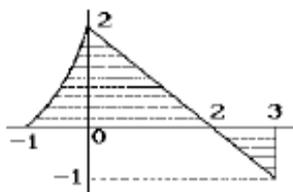
Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2000/01.

105°. - Sea f la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$. (a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores). (b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.

106°. - Siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x , considera la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x \ln(x)$. Calcula: (a) $\int f(x) dx$. (b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1,0)$.

107°. - De la función f se sabe que $f'(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P = (1,2)$. Halla la expresión de f .

108°. - Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \frac{2x+2}{1-x}$.



109°. - Considera la función $f: (-\infty, 10) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

(a) Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$). (b) Esboza la gráfica de f . (c) Estudia la derivabilidad de f .

110°. - Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{2} + \cos x$, los ejes coordenados y la recta $x = \pi$. (b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

111°. - Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

112°. - Determina α sabiendo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \operatorname{sen}(x)}.$$

Calcular dicho límite.

113°. - Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$. (a) Determina las asíntotas de la gráfica de f . (b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f . (c) Esboza la gráfica de f .

114°. - Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Hallar el valor de a .

115°. - Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 10 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f . (b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

116°. - Siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x , calcula

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right).$$

117°. - Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$.

118°. - Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$. (a) Esboza la gráfica de f . (b) Estudia la derivabilidad de f . (c) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

119°. - Siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x , considera la función $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Determina el valor de a sabiendo que f es derivable. (b) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

120°. – Determina la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

121°. – (a) Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ ax + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto $(0,1)$.

(b) ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ cx^2 + d & \text{si } x < 0 \end{cases}$ admita recta tangente en el punto $(0,1)$? Justifica la respuesta.

122°. – Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x}.$$

123°. – Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$. (a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (b) Determina los extremos relativos α y β de f , con $\alpha < \beta$, y calcula $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

124°. – Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (normanda), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las de área igual a 2 m^2 .



125°. – Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - mx - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determina m sabiendo que f es derivable. (b) Calcula $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

126°. – Un hilo de alambre de 1m de longitud se corta en dos trozos, formando con uno de ellos una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

127°. – Considera la función $f: [0,4] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{16}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4-x & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f . (b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

128°. – Considera la función $f: [0,3] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcula el punto de la gráfica de f más cercano al punto $(2,6)$ y calcula también el más alejado.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2001/02.

129°. – Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

(a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f . (b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

130°. – Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que

$$P(0) = P(2) = 1 \text{ y } \int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}$$

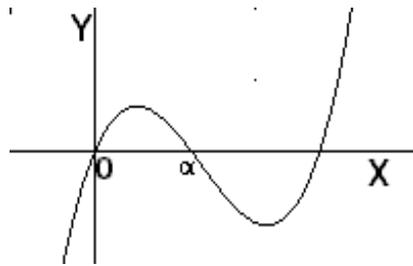
131°. – Sea f la función definida por $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$. (a)

Calcula las asíntotas de la gráfica de f . (b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f .

132°. – Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

133°. – Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. (a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

- i) $F(\alpha) = 0$.
 ii) $F'(\alpha) = 0$.
 iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.



(b) Calcula $F(1)$, siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

134°. – Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ para $x \neq 1$. (a)

Calcula las asíntotas de la gráfica de f . (b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

135°. – Estudia la derivabilidad de la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula la función derivada.

136°. – Calcula

$$\int_0^1 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx.$$

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2002/03.

137°. – Sea $\ln(1 - x^2)$ el logaritmo neperiano de $1 - x^2$ y sea $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(1 - x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

138°. – Se sabe que la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Conociendo además que la integral $\int_0^1 f(x) dx = 6$, halla a , b y c .

139°. – Dadas las parábolas $y = 1 + x^2$ y la recta $y = 1 + x$, se pide: (a) Área de la región limitada por la recta y la parábola. (b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

140°. – Considera la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = (x + 3)e^{-x}$. (a) Halla las asíntotas de la gráfica de f . (b) Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica. (c) Esboza la gráfica de f .

141°. – Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \cdot \sin x}$.

142°. – Sea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$. (a) ¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente. (b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

143°. – Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)\ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x . Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

144°. – Estudia la derivabilidad de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1. \end{cases}$$

