| Departamento de Matemáticas | Nombre: | | 3ª Evaluación | Nota |
|---|---|---|---|---|
| | Curso: | **4º ESO A** | Examen XI: Final | |
| | Fecha: | 12 de junio de 2023 | Cada apartado vale 1 punto | |

**IES ABYLA (Ceuta)**

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $B(x) = -3x^2 + 120x + 675$ donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

1) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

2) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

Sabemos que un ángulo del tercer cuadrante verifica que $sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Calcula el valor exacto de las otras razones trigonométricas.

4) Da el valor (en radianes) de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo coseno que α.

Una antena de telecomunicaciones está sujeta al suelo con dos cables de acero que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 8 y 5 m, respectivamente. Si la antena está ente los dos anclajes:

5) ¿A qué distancia del poste de la antena están sujetos ambos cables del suelo?

6) ¿A qué altura se enganchan a la antena?



Dados los puntos $A(1,-2)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$ de un paralelogramo:



7) Calcula las coordenadas del punto D.

8) Escribe la ecuación general de la diagonal BD y comprueba que dicha recta contiene el punto medio del segmento AC.

Situada en un llano se encuentra una torre. Desde un punto se observa la parte más alta con un ángulo de 10° con la horizontal, y si nos aproximamos a la torre 50 metros observamos que el ángulo es ahora de 25°.

9) ¿Qué altura tiene la torre?

10) ¿A qué distancia de la torre nos encontramos?

| Departamento de Matemáticas | Nombre: | **SOLUCIONES** | 3ª Evaluación | Nota |
|---|---|---|---|---|
| | Curso: | **4º ESO A** | Examen XI: Final | |
| | Fecha: | 12 de junio de 2023 | Cada apartado vale 1 punto | |

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $B(x)=-3x^2+120x+675$ donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

**1)** Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

La función B(x) es una función cuadrática, para calcular el gasto a partir del cual la empresa no tiene beneficios, hemos de igualar la función a cero para calcular los puntos de corte con el eje x. Para buscar los x que hacen el gasto cero. A partir de este gasto la empresa no tiene beneficios porque tiene pérdidas:

$$B(x)=-3x^2+120x+675 \quad \rightarrow \quad B(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad -3x^2+120x+675=0$$

Así que vamos a resolver la ecuación de segundo grado:

$$-3x^2+120x+675=0 \quad \leftrightarrow \quad 3x^2-120x-675=0 \quad \leftrightarrow \quad x^2-40x-225=0$$

Por descomposición mediante la Regla de Ruffini, llegamos a:

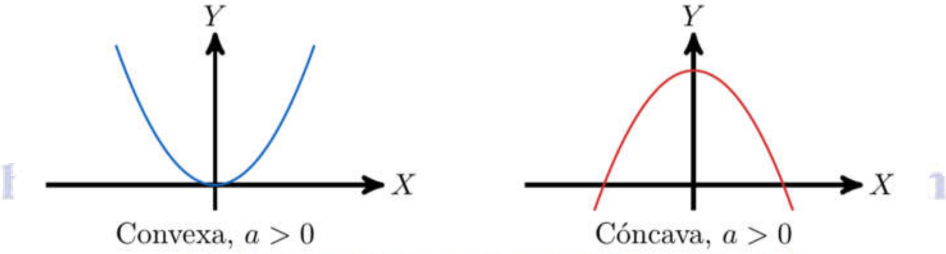
$$x^2-40x-225=0 \quad \rightarrow \quad (x+5)\cdot(x-45)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \cancel{x_1=-5} \\ x_2=45 \end{cases}$$

La primera solución la desechamos porque si x es el gasto en publicidad, éste no puede ser negativo.

Por tanto, a partir de 45.000 € de gasto en publicidad, la empresa no tiene beneficios.

**2)** Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

Como ya hemos dicho, B(x) es una función cuadrática en la que a<0, por tanto se trata de una función cuadrática cóncava (de ramas hacia abajo). Por tanto el máximo se corresponde con el vértice como podemos apreciar en la imagen de debajo.




Así que, vamos a calcular el vértice que, como ya hemos trabajado en clase, viene dado por $(V_x, V_y)$:

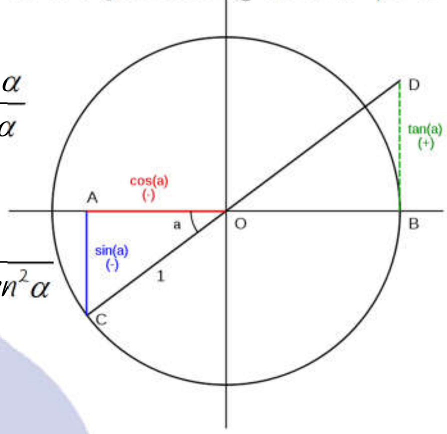
$$\begin{cases} V_x=-\dfrac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad V_x=-\dfrac{120}{2\cdot(-3)}=-\dfrac{120}{-6}=20 \\ \\ V_y=B(V_x) \quad \rightarrow \quad V_y=B(20)=-3(20)^2+120\cdot(20)+675=-3\cdot400+2400+675=1875 \end{cases}$$

Por tanto, el máximo de beneficios se alcanza a los 20.000 € de gasto en publicidad y ese gasto, generan unos beneficios a la empresa de 1.875.000 €.

## Sabemos que un ángulo del tercer cuadrante verifica que $sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

### 3) Calcula el valor exacto de las otras razones trigonométricas.

Calcularemos las otras razones trigonométricas usando la identidad fundamental de la trigonometría y sabiendo que la tangente de un ángulo es el cociente entre su seno y su coseno:




$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

Cono nos dan el seno, de la Ec. Fundamental de la trigonometría despejaremos el coseno:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Como nos encontramos en el tercer cuadrante, tanto el seno como el coseno son negativos, mientras que la tangente es positiva.

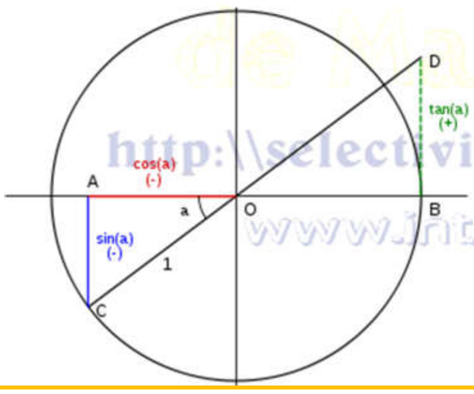
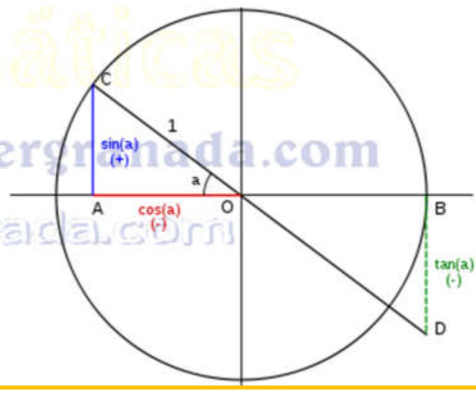
Por tanto: $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ y la tangente: $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Las razones trigonométricas inversas serían la secante, inversa del coseno, la cosecante, inversa del seno y la cotangente, inversa de la tangente.

**Resumiendo: Cosα = −1/2 y tg α=√3**

### 4) Da el valor (en radianes) de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo coseno que α.

De los cuatro cuadrantes, el único en el que el coseno tiene exactamente el mismo valor que en el tercero, es en el segundo.

| Tercer cuadrante | Segundo Cuadrante |
| --- | --- |
|  |  |

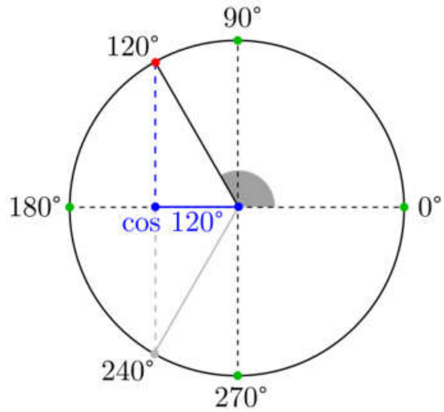






Sabemos que en el primer cuadrante, el único ángulo α que tiene $\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ es el ángulo **α= 60°**

Pues en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° − 60° = 120°




Por simetría, y observando la circunferencia goniométrica de la izquierda, puede deducirse que el coseno de 120° es exactamente igual al coseno de 240°.

Si calculamos con la calculadora el arcoseno de –1/2 obtenemos:

$$\underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)=120°}_{\text{En grados sexagesimales (Modo Deg)}} \qquad \underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}}_{\text{En Radianes (Modo Rad)}}$$

Dependiendo del modo en que pongamos nuestra calculadora, podemos obtener el resultado directamente en radianes o en grados sexagesimales.

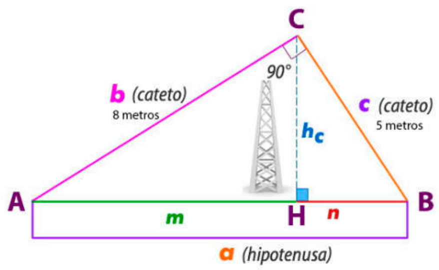
Puesto que en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° – 60° = 120°

Por tanto, el ángulo buscado es el de 120°, que en radianes se expresa como $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Una antena de telecomunicaciones está sujeta al suelo con dos cables de acero que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 8 y 5 m, respectivamente. Si la antena está ente los dos anclajes:

5) ¿A qué distancia del poste de la antena están sujetos ambos cables del suelo?

Si nos ayudamos con un dibujo, podemos observar que se trata de un problema en el que nos piden el valor de m y n en un triángulo rectángulo apoyado en su hipotenusa. Para calcularlos utilizaremos el teorema del Cateto:




El Teorema del Cateto dice que en todo triángulo rectángulo, como por ejemplo el ABC representados en la figura anterior, el cuadrado de cualquier cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre ella, así que lo primero será calcularla aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$$



Hecho esto, ya podemos calcular las dos proyecciones m y n:



$$b^2=m\cdot a \quad \rightarrow \quad m=\frac{b^2}{a}=\frac{64}{\sqrt{89}}=6{,}78\ m \quad \text{y de la misma forma:} \quad c^2=n\cdot a \quad \rightarrow \quad n=\frac{c^2}{a}=\frac{25}{\sqrt{89}}=2{,}65\ m$$

Por tanto los anclajes están a 6,78 y 2,65 metros de la antena.

6) ¿A qué altura se enganchan a la antena?

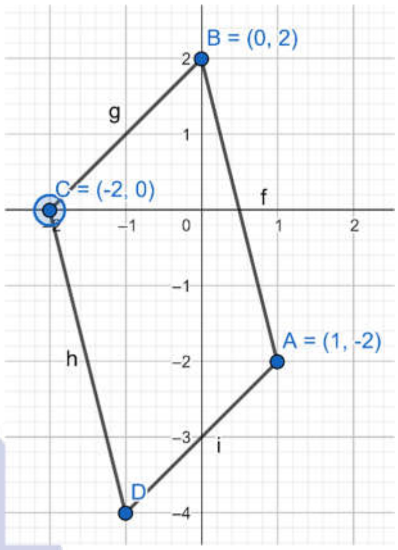
Para ello, en este caso nos ayudamos del Teorema de la altura que dice que, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, por tanto:

$$h^2=m\cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{6{,}78\cdot 2{,}65}=4{,}24\ m$$

Por tanto la antena mide 4,24 metros de altura.

## Dados los puntos $A(1,-2)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$ de un paralelogramo:

### 7) Calcula las coordenadas del punto D.




Si representamos las coordenadas en un plano cartesiano obtenemos la figura de la derecha, es por ello que podemos predecir que el punto D estaría aproximadamente donde lo hemos representado.

Para calcularlo, podemos hacerlo de varias maneras, pero la más rápida es calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ e igualarlo al vector $\overrightarrow{DC}$ y de aquí calcular el punto D.

Así que empezamos calculando el vector $\overrightarrow{AB}=B-A=(0-1,2-(-2))=(-1,4)$

Claramente los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son paralelos (paralelogramo) e iguales, por tanto con esto calcularemos el punto D:

$$\overrightarrow{AB}=(-1,4) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{DC}=(-1,4) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{DC}=C-D$$

Si D es el punto D (x,y), con el vector y el punto C, podemos calcularlo:

$$\overrightarrow{DC}=C-D=(-2-x,0-y)=(-1,4) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2-x=-1 & \rightarrow \quad x=-1 \\ -y=4 & \rightarrow \quad y=-4 \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas del punto D son: **D (−1, −4)**

### 8) Escribe la ecuación general de la diagonal BD y comprueba que dicha recta contiene el punto medio del segmento AC.

Para encontrar la ecuación general voy a partir de la ecuación continua $\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}$ en la que P es un punto de la recta y V su vector director, por tanto, lo primero será coger un punto y calcular su vector director:

$$\text{Recta BC:}\begin{cases} P=(0,2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{DB}=B-D=(1,6) \end{cases} \quad \text{con ello:} \quad \frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y} \quad \text{quedaría} \quad \frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{6}$$

$$\text{Y multiplicando en cruz: } \frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{6} \quad \rightarrow \quad 6x=y-2 \quad \rightarrow \quad 6x-y+2=0$$

Por tanto, la ecuación general de la diagonal BD es: **6x − y + 2 = 0**



Veamos si el punto medio del segmento $\overline{AC}$ pertenece a dicha recta. Para ello calcularemos dicho punto medio:



$$M_{\overline{AC}}=\left(\frac{a_x+c_x}{2},\frac{a_y+c_y}{2}\right)=\left(\frac{1-2}{2},\frac{-2+0}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},-1\right)$$

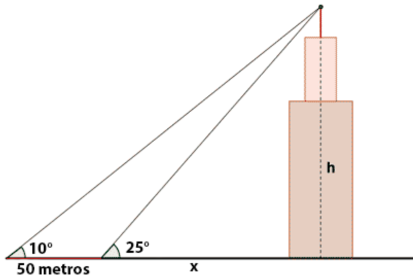
Y ahora lo sustituimos en la ecuación de la recta BD y si la verifica es porque el punto M pertenece a ella:

$$6x-y+2=0 \quad \text{sustituimos } M\left(\frac{-1}{2},-1\right) \quad 6\left(\frac{-1}{2}\right)-(-1)+2=0 \quad \rightarrow \quad -3+1+2=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$$

Por tanto la verifica, así que, podemos afirmar que el punto medio del segmento AC pertenece a la diagonal de los vértices B y D.

Situada en un llano se encuentra una torre. Desde un punto se observa la parte más alta con un ángulo de 10° con la horizontal, y si nos aproximamos a la torre 50 metros observamos que el ángulo es ahora de 25°.

## 9) ¿Qué altura tiene la torre?




Para calcular la altura de la torre, vamos a utilizar la tangente, que es la razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con el cateto contiguo y con ella vamos a plantear un sistema de ecuaciones no lineales n el que las incógnitas serán x y h.

$$\begin{cases} 1)\ tg\ 10° = \dfrac{h}{x+50} \\ 2)\ tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Para resolverlo, despejamos x de la segunda ecuación y lo sustituiremos en la primera:

De la ecuación 2) despejamos x: $tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{h}{tg\ 25°}$

Y lo sustituimos en la 1) $tg\ 10° = \dfrac{h}{x+50} \quad \rightarrow \quad tg\ 10° = \dfrac{h}{\dfrac{h}{tg\ 25°}+50} \quad \rightarrow$ operando un poco:

$$tg\ 10° = \frac{h}{\dfrac{h}{tg\ 25°}+50} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+50\right) tg\ 10° = h \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+\frac{50 \cdot tg\ 25°}{tg\ 25°}\right) tg\ 10° = h$$

$$(h + 50 \cdot tg\ 25°) \cdot tg\ 10° = h \cdot tg\ 25° \quad \rightarrow \quad h \cdot tg 10° + 50 \cdot tg 25° \cdot tg 10° = h \cdot tg\ 25°$$

Despejando h, llegamos a:

$$50 \cdot tg 25° \cdot tg 10° = h \cdot tg\ 25° - h \cdot tg 10° \quad \rightarrow \quad 50 \cdot tg 25° \cdot tg 10° = h \cdot (tg\ 25° - tg 10°) \quad \rightarrow \quad h = \frac{50 \cdot tg 25° \cdot tg 10°}{tg\ 25° - tg 10°}$$

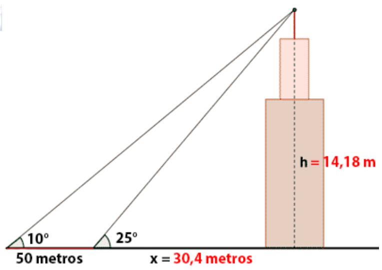
Y de aquí:

$$h = \frac{50 \cdot tg 25° \cdot tg 10°}{tg\ 25° - tg 10°} = 14{,}18\ m$$

Así que, la altura de la torre es de 14,18 metros.

## 10) ¿A qué distancia de la torre nos encontramos?

En este punto nos piden el valor de x del dibujo, que calcularemos con $x = \dfrac{h}{tg\ 25°}$, por tanto, con sustituir lo obtenido en el apartado anterior, nos bastaría:




$$x = \frac{h}{tg\ 25°} = \frac{14{,}18}{tg\ 25°} = 30{,}4\ m$$

Así que estamos a 30,4 metros de la torre.