I.E.S. ABYLA (Ceuta)	Nombre:		2ª EVAL	NOTA
	Curso:	4º ESO A	Examen VII	
	Fecha:	26 de febrero de 2024	*Examen de problemas II*	

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

1.- El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos componían el rebaño del jeque?

2.- Calcula un número de dos cifras, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

3.- Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

4.- La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si la base aumenta un 20 % y la altura un 30 %, el perímetro aumenta un 24 %. Halla las dimensiones del rectángulo.

5.- Calcula el tiempo que tiene que pasar para que un capital de 10.000 € depositado en un banco aumente un 50 % en los siguientes casos:

a) Al 4 % anual con periodo de capitalización anual.
b) Al 3,6 % anual con periodo de capitalización mensual.

B.- La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.

I.E.S. ABYLA (Ceuta)	Nombre:		2ª EVAL	NOTA
	Curso:	**4º ESO A**	Examen VII	
	Fecha:	26 de febrero de 2024	*Examen de problemas II*	

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

1.- El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos componían el rebaño del jeque?

Si llamamos x al número de camellos que tiene el jeque Omar, como a cada uno de sus hijos les ha dado la tercera parte, para su esposa Fátima queda otra tercera parte, y como a ella le da 140 camellos, quiere esto decir que la tercera parte de los camellos son 140.

Con esto, podemos plantear la ecuación:

$$\frac{x}{3}=140$$

Cuya solución es:

$$\frac{x}{3}=140 \quad \rightarrow \quad x=3\cdot 140=420$$

Por tanto, el rebaño del jeque estaba compuesto por 420 camellos.

2.- Calcula un número de dos cifras, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

Si llamamos x a la cifra de las decenas, la cifra de las unidades será 14–x, por tanto, el número será de la forma:

$$\underbrace{x}_{\text{Decenas}}\ \underbrace{14-x}_{\text{Unidades}} \qquad \text{y si se invierte su orden} \qquad \underbrace{14-x}_{\text{Decenas}}\ \underbrace{x}_{\text{Unidades}}$$

Si expresamos ambos números en unidades, recordando aquello de que una decena son 10 unidades, llegamos a:

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{\text{Decenas}}\ \underbrace{14-x}_{\text{Unidades}} \rightarrow 10\cdot x+14-x= \xrightarrow{\text{El número original se expresaría como:}} =9x+14 \\ \underbrace{14-x}_{\text{Decenas}}\ \underbrace{x}_{\text{Unidades}} \rightarrow 10(14-x)+x=140-10x+x= \xrightarrow{\text{El número invertido se expresaría como:}} =140-9x \end{cases}$$

Como nos dicen que al invertir el número disminuye en 18 unidades, podemos plantear la siguiente ecuación haciendo:

$$\underbrace{9x+14}_{\text{Mayor}}=\underbrace{140-9x+18}_{\text{Menor +18}}$$

Cuya solución es:

$$9x+14=140-9x+18 \quad \rightarrow \quad 9x+9x=140+18-14 \quad \rightarrow \quad 18x=144 \quad \rightarrow \quad x=\frac{144}{18} \quad \rightarrow \quad x=8$$

Por tanto, las decenas son 8 y las unidades 14 – 8 = 6

Así que, el número pedido es el 86.

Se puede comprobar que el resultado es correcto puesto que: 86 – 68 = 18

3.– Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Si llamamos x al número, su siguiente será: x + 1, el cuadrado de su siguiente será $(x+1)^2$, y su inverso será: $\frac{1}{x}$ así que con esto ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{(x+1)^2}_{\text{El cuadrado del siguiente}} - \underbrace{8\cdot\frac{1}{x}}_{\text{8 veces su inverso}} = 23 \rightarrow (x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \xrightarrow{\text{Operando}} x^2+2x+1-23-\frac{8}{x}=0 \xrightarrow{\text{Reduciendo a común denominador}}$$

$$\rightarrow \qquad x^3+2x^2-22x-8=0$$

Que por Ruffini podemos factorizar en:

$$\left.\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -22 & -8 \\ 4 & & 4 & 24 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 2 & \boxed{0} \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^3+2x^2-22x-8=(x-4)\cdot(x^2+6x+2)$$

Por tanto, la ecuación factorizada quedaría de la forma:

$$(x-4)\cdot(x^2+6x+2)=0$$

Cuyas soluciones vienen dadas por:

$$(x-4)\cdot(x^2+6x+2)=0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x-4=0 \quad \rightarrow \quad x_1=4 \\ x^2+6x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-8}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{28}}{2} \end{cases}$$

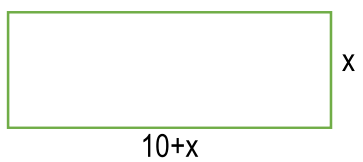
De las tres soluciones, x=4 es la única solución entera.

Así que, el número pedido es el 4.

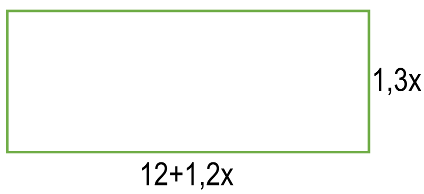
Se puede comprobar que el resultado es correcto puesto que: $25-\frac{8}{4}=23$

4.– La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si la base aumenta un 20 % y la altura un 30 %, el perímetro aumenta un 24 %. Halla las dimensiones del rectángulo.

Si llamamos x a la altura del rectángulo, su base será 10 + x, y su perímetro será: $P_1(x) = 4x + 20$



Si su base aumenta un 20 %, ahora medirá 1,2·(10+x) y si su altura aumenta un 30 %, Medirá 1,3x. El nuevo perímetro será: $P_2(x) = 24 + 2{,}5x + 2{,}6x = 24 + 5x$



Una vez conocidos ambos perímetros, plantearemos la ecuación haciendo que el perímetro del pequeño aumentado en un 24 % será igual que el del grande:

$$1{,}24\cdot P_1(x)=P_2(x) \quad \rightarrow \quad 1{,}24(4x+20)=24+5x$$

Cuya solución, viene dada por:

$$1{,}24(4x+20)=24+5x \rightarrow 4{,}96x+24{,}8=24+5x \rightarrow 5x-4{,}96x=24{,}8-24 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}04x=0{,}8 \rightarrow x=\frac{0{,}8}{0{,}04} \rightarrow x=20$$

Por ello, la altura del rectángulo es de 20 cm y la base de 10 + 20 = 30 cm.

Se puede comprobar que el resultado es correcto puesto que: 100·1,24=24+100

5.- Calcula el tiempo que tiene que pasar para que un capital de 10.000 € depositado en un banco aumente un 50 % en los siguientes casos:

Se trata de un ejercicio de interés compuesto en el que el capital final venía dado por: $C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

Si nos dice que aumenta un 50 %, ya sabemos que: $C_o = 10.000$ € $\qquad C_f = 15.000$ €

a) Al 4 % anual con periodo de capitalización anual.

En este caso, tenemos: $C_o = 10.000$ € $\qquad C_f = 15.000$ € $\qquad r = 4\%$ anual

Si llamamos t al tiempo, en años, que tiene que pasar, la ecuación será:

$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 15.000 = 10.000 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^t \rightarrow 15.000 = 10.000 \cdot 1{,}04^t \xrightarrow{\text{Operando}}$$

$$\xrightarrow{\text{Operando}} \frac{15000}{10000} = 1{,}04^t \rightarrow 1{,}5 = 1{,}04^t$$

Que es una ecuación exponencial, y donde, para despejar t, tenemos que aplicar logaritmos decimales en ambos términos de la ecuación:

$$\log 1{,}5 = \log 1{,}04^t \xrightarrow{\text{Por las propiedades de los logaritmos}} \log 1{,}5 = t \cdot \log 1{,}04 \xrightarrow{\text{Y despejando t}} t = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} = 10{,}338 \text{ años}$$

Por lo que, para conseguir los 15.000 € han de pasar 11 años

b) Al 3,6 % anual con periodo de capitalización mensual.

En este caso, tenemos: $C_o = 10.000$ € $\qquad C_f = 15.000$ € $\qquad r = \frac{3{,}6}{12}\% = 0{,}3\%$ mensual

Donde hemos dividido el interés entre 12 porque nos dice el enunciado que aunque el interés es anual, la capitalización es mensual, así que por eso dividimos entre 12.

Si llamamos t al tiempo, en meses, que tiene que pasar, la ecuación será:

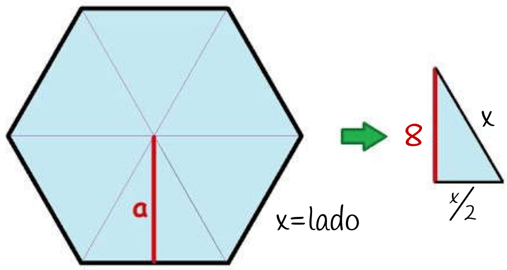
$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 15.000 = 10.000 \cdot 1{,}003^t \rightarrow \frac{15000}{10000} = 1{,}003^t \rightarrow 1{,}5 = 1{,}003^t$$

Que es otra ecuación exponencial y donde, de nuevo, para despejar t, aplicaremos logaritmos, aunque esta vez serán neperianos a ambos términos de la ecuación:

$$\ln 1{,}5 = \ln 1{,}003^t \xrightarrow{\text{Por las propiedades de los logaritmos}} \ln 1{,}5 = t \cdot \ln 1{,}003 \xrightarrow{\text{Y despejando t}} t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}003} = 135{,}358 \text{ meses}$$

Por lo que, para conseguir los 15.000 € han de pasar 136 meses

B.- La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.



Un hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros.

Si llamamos x al lado del hexágono, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras en uno de los triángulos equiláteros y llegamos a la ecuación:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 8^2$$

Cuya solución viene dada por:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 64 \rightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{256}{4} \rightarrow \frac{4x^2}{\cancel{4}} = \frac{x^2}{\cancel{4}} + \frac{256}{\cancel{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 = 256 \rightarrow x = \sqrt{\frac{256}{3}} \rightarrow x = \frac{16}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{16\sqrt{3}}{3} cm$$

Así que, el lado del hexágono mide $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

Y para el área, sabemos que el área de un hexágono viene dada por el semiproducto de su perímetro por su apotema:

$$A = \frac{Perímetro \cdot Apotema}{2} = \frac{6 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot 8}{2} = 128\sqrt{3}\ cm^2$$

Así que, el área del hexágono es de $128\sqrt{3}$ cm^2.

Recuerda que el teorema de Pitágoras hacía referencia a la relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo: