I.E.S. ABYLA (Ceuta)	Nombre:			2ª EVAL	NOTA
	Curso:	**4º ESO A**	Examen IX		
	Fecha:	11 de marzo de 2024	**Final 2ª evaluación**		

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

1.- Resuelve y completa la tabla de la derecha con la solución o soluciones: (4 puntos)

a) $x^{2024}-8x^{2021}=0$

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2}<0$

c) $\begin{cases}\dfrac{2(x-1)}{3}-\dfrac{1-y}{2}=-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{2(y-2)}{5}=\dfrac{19}{10}\end{cases}$

d) $\begin{cases}2\log x+\log y=1\\ \log x-2\log y=-2\end{cases}$

Soluciones:	
a)	
b)	
c)	
d)	

2.- Se mezcla cierta cantidad de café de 5 € el kilo con el cuadrado de dicha cantidad de otro café de calidad superior cuyo precio es de 8 €/kilo. ¿Qué cantidad de cada uno se ha de utilizar para que el precio de la mezcla sea de 7,50 € el kilo? (1,5 puntos)

3.- Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se añade una bola blanca, éstas representan entonces el 25% del contenido de la caja. Si se quita una blanca, las bolas blancas representan el 20% del total. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la caja? (1,5 puntos)

4.- En una tienda de comercio justo venden cafés de Ecuador y de Colombia. El que procede de Ecuador cuesta 1,30 € por paquete, y el de Colombia, 1,65 €. Averigua el número máximo de paquetes de café de cada tipo que puedo adquirir si no me quiero gastar más de 25 €, y si, además, quiero comprar el doble de paquetes de café de Colombia que de Ecuador. (1,5 puntos)

5.- El lado de un rombo es 5 cm y su área es 24 cm². Calcula la longitud de sus diagonales. (1,5 puntos)

B.- Se define en el conjunto de los números reales una nueva operación: $a\oplus b=\sqrt{a+3}+\sqrt{b-7}$. ¿Cumple la propiedad conmutativa?, Con la ayuda de ella resuelve la siguiente ecuación:

$$(x+2)\oplus(x-8)=10$$

	Nombre:	SOLUCIONES		2ª EVAL	NOTA
I.E.S. ABYLA (Ceuta)	Curso:	**4º ESO A**	Examen IX		
	Fecha:	11 de marzo de 2024	**Final 2ª evaluación**		

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

1.– Resuelve: (4 puntos)

- La primera es una **ecuación** que resolveremos sacando factor común y convirtiéndola en una ecuación factorizada.

a) $x^{2024}-8x^{2021}=0 \xrightarrow[\text{Y la convertimos en una ecuación factorizada}]{\text{Sacamos factor común } x^{2021}} x^{2021}\cdot\left(x^3-8\right)=0 \xrightarrow{\text{Si el producto de dos números es cero es poprque alguno de ellos es 0}}$

$\xrightarrow[\text{Y resolvemos las ecuaciones obtenidas:}]{\text{Igualamos cada uno de los factores a cero}} \begin{cases} \text{Si } x^{2021}=0 & \rightarrow \quad x_1=0 \\ \text{Si } x^3-8=0 & \rightarrow \quad x^3=8 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{8} \quad \rightarrow \quad x_2=2 \end{cases}$

- La segunda es una **inecuación** cociente de polinomios, y dicho cociente es negativo si numerador y denominador tienen signos opuestos.

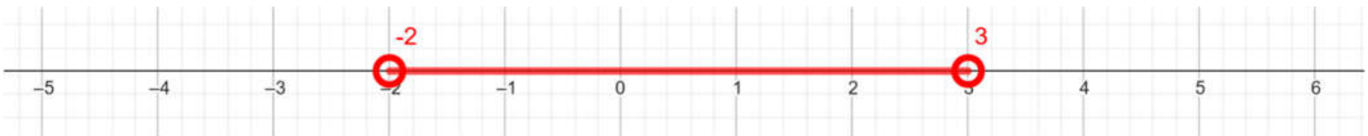
b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2}<0 \quad \rightarrow$ Como el denominador es un cuadrado, siempre es positivo, luego la única opción para que el cociente sea negativo es que el numerador lo sea también:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2}<0 \quad \rightarrow \quad x^2-x-6<0$$

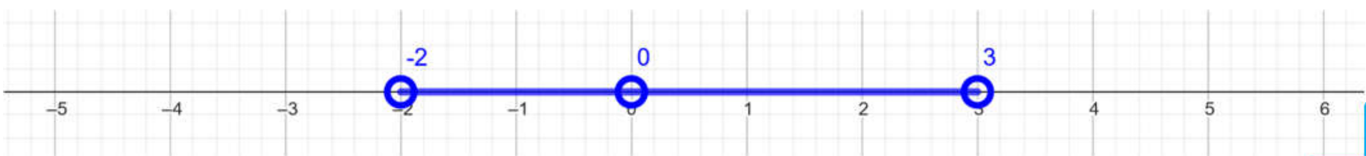
Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2-x-6=0 \xrightarrow{\text{Factorizamos}} (x-3)\cdot(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } x-3=0 & \rightarrow \quad x_1=3 \\ \text{Si } x+2=0 & \rightarrow \quad x_2=-2 \end{cases}$$

Representamos los puntos en la recta real y verificamos la región que cumple la desigualdad, sustituyendo en la inecuación $x^2-x-6<0$ el punto x=0, por ejemplo: $0^2-0-6<0 \quad \rightarrow \quad -6<0$ es verdadero, por tanto, el intervalo que verifica la desigualdad es el (–2,0)



Pero como $\dfrac{x^2-x-6}{x^2}<0$, es un cociente, y el denominador se anula dentro del intervalo (–2,0), tenemos que quitar el valor x=0 porque en matemáticas dividir por cero es una indeterminación.



Así que, la solución de la inecuación es: $(-2,0)\cup(0,3)$

El tercer apartado es un **sistema de ecuaciones lineales**, que vamos a poner "guapo" antes de decidir el método utilizado para resolverlo:

$$c)\begin{cases}\dfrac{2\cdot(x-1)}{3}-\dfrac{1-y}{2}=-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{2\cdot(y-2)}{5}=\dfrac{19}{10}\end{cases} \xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador en ambas ecuaciones}} \begin{cases}\dfrac{2\cdot2(x-1)}{6}-\dfrac{3\cdot(1-y)}{6}=-\dfrac{2}{6}\\[2mm] \dfrac{5\cdot(x+1)}{10}+\dfrac{2\cdot2\cdot(y-2)}{10}=\dfrac{19}{10}\end{cases} \xrightarrow{\text{Quitamos Denominadores}}$$

$$\rightarrow \begin{cases}\dfrac{2\cdot2(x-1)}{\cancel{6}}-\dfrac{3\cdot(1-y)}{\cancel{6}}=-\dfrac{2}{\cancel{6}}\\[2mm] \dfrac{5\cdot(x+1)}{\cancel{10}}+\dfrac{2\cdot2\cdot(y-2)}{\cancel{10}}=\dfrac{19}{\cancel{10}}\end{cases} \xrightarrow[\text{operamos}]{\text{Quitamos paréntesis y}} \begin{cases}4x-4-3+3y=-2\\ 5x+5+4y-8=19\end{cases} \xrightarrow{\text{Agrupamos}} \begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\begin{cases}4x+3y=5\\ 5x+4y=22\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Multiplicando la 1) por 5 y la 2) por (−4)}]{\text{Por el Método de Reducción}} \begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\begin{cases}20x+15y=25\\ -20x-16y=-88\end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando ambas ecuaciones}} \begin{array}{r}20x+15y=25\\ +\ -20x-16y=-88\\ \hline 0x-\ \ 1y=\ -63\end{array} \rightarrow \quad y=63$$

y sustituyendo, por ejemplo, en la ecuación 1):

$$\text{En } 4x+3y=5 \rightarrow 4x+3\cdot63=5 \rightarrow 4x+189=5 \rightarrow 4x=-184 \rightarrow x=\frac{-184}{4}=-46$$

Por tanto, se trata de un Sistema Compatible Determinado de soluciones x=−46 e y=63

$$S.C.D.\left\{x=-46 \quad y=63\right\}$$

En el último ejercicio tenemos un **sistema de ecuaciones no lineales**, puesto que aparecen logaritmos, pero que vamos a resolver con el **método de reducción**:

$$d)\begin{cases}2\log x+\log y=1\\ \log x-2\log y=-2\end{cases} \xrightarrow{\text{Multiplicamos la primera por 2}} \begin{cases}4\log x+2\log y=2\\ \log x-2\log y=-2\end{cases} \xrightarrow{\text{Y sumamos}} \begin{array}{r}4\log x+2\log y=2\\ +\quad \log x-2\log y=-2\\ \hline 5\log x=0\end{array}$$

$$\text{Si } 5\log x=0 \rightarrow \log x=0 \xrightarrow{\text{Por la definición de logaritmo}} 10^0=x \rightarrow x=1$$

Y, sustituyendo, por ejemplo, en la primera ecuación:

$$2\log x+\log y=1 \rightarrow 2\log 1+\log y=1 \rightarrow 0+\log y=1 \xrightarrow{\text{Por la definición de logaritmo}} 10^1=y \rightarrow y=10$$

Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado de soluciones x=1 e y=10

$$S.C.D.\left\{x=1 \quad y=10\right\}$$

2.− Se mezcla cierta cantidad de café de 5 € el kilo con el cuadrado de dicha cantidad de otro café de calidad superior cuyo precio es de 8 €/kilo. ¿Qué cantidad de cada uno se ha de utilizar para que el precio de la mezcla sea de 7,50 € el kilo? (1,5 puntos)

Se trata de un problema de ecuaciones, en particular de uno de mezclas, así que nos ayudaremos de una tabla en la que llamaremos x a la cantidad de café 1 y x^2 a la de café 2.

	Cantidad (Kg)	Precio del kilo (€)	Total
Café 1	x	5	$5x$
Café 2	x^2	8	$8x^2$
Mix	x^2+x	7,5	$7{,}5\cdot(x^2+x)$

Una vez completada la tabla, planteamos la ecuación recordando que el total de la mezcla era siempre igual a la suma de los totales de cada una de las partes por separado:

$$5x+8x^2=7{,}5\left(x^2+x\right)\xrightarrow{\text{Rompemos paréntesis}}5x+8x^2=7{,}5x^2+7{,}5x\xrightarrow{\text{Agrupamos}}0{,}5x^2-2{,}5x=0\xrightarrow{\text{Sacamos factor común x}}$$

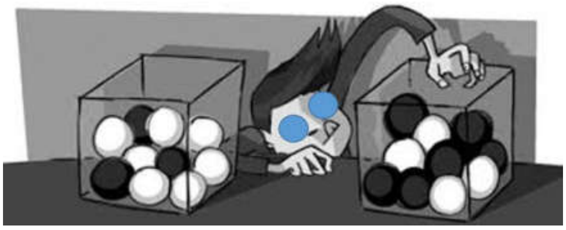
$$\rightarrow\quad x\left(0{,}5x-2{,}5\right)=0\xrightarrow{\text{Resolvemos como una ecuación factorizada}}\begin{cases}\text{Si } x=0 \rightarrow x_1=0\\ \text{Si } 0{,}5x-2{,}5=0 \rightarrow 0{,}5x=2{,}5 \rightarrow x_2=\dfrac{2{,}5}{0{,}5}=5\end{cases}$$

Desechamos la solución nula por ser trivial.

Y, por tanto, utilizaremos 5 kg de café de 5 € el kilo y 25 kg de café de 8 €para obtener la mezcla pedida.

3.- Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se añade una bola blanca, éstas representan entonces el 25% del contenido de la caja. Si se quita una blanca, las bolas blancas representan el 20% del total. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la caja? (1,5 puntos)

Se trata de un problema que se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones lineales. Si llamamos N al número de bolas negras y B al número de bolas blancas, en total dentro de la caja hay B+N bolas. Así que con esto trataremos de plantear el sistema:



- ✓ Si se añade una bola blanca, ahora hay B+1 bolas blancas, y estas representan el 25 % del total (la cuarta parte), por tanto, la primera ecuación es:

$$B+1=\frac{B+N+1}{4}\xrightarrow{\text{Operando}}4B+4=B+N+1\rightarrow 3B-N=-3$$

- ✓ Si se saca una bola blanca, ahora hay B–1 bolas blancas y estas representan el 20 % del total (la quita parte), por tanto, la segunda ecuación es:

$$B-1=\frac{B+N-1}{5}\xrightarrow{\text{Operando}}5B-5=B+N-1\rightarrow 4B-N=4$$

El sistema queda de la forma: $\begin{cases}3B-N=-3\\4B-N=4\end{cases}\xrightarrow[\text{Si a la primera le restamos la segunda}]{\text{Por Reducción}}-B=-7\rightarrow B=7$

Y sustituyendo en $4B-N=4$, obtendremos el valor de N:

$$4B-N=4\rightarrow 47-N=4\rightarrow N=28-4=24$$

Por tanto, en la caja hay 7 bolas blancas y 24 bolas negras.

4.- En una tienda de comercio justo venden cafés de Ecuador y de Colombia. El que procede de Ecuador cuesta 1,30 € por paquete, y el de Colombia, 1,65 €. Averigua el número máximo de paquetes de café de cada tipo que puedo adquirir si no me quiero gastar más de 25 €, y si, además, quiero comprar el doble de paquetes de café de Colombia que de Ecuador. (1,5 puntos)

Si llamamos x a los paquetes de café de Ecuador, entonces 2x serán los paquetes de café de Colombia.

Con esto, ya podemos plantear una inecuación con el dinero:

$$\underbrace{1{,}30\cdot x}_{\text{Coste del café de Ecuador}}+\underbrace{1{,}65\cdot 2\cdot x}_{\text{Coste del café de Colombia}}\leq 25$$

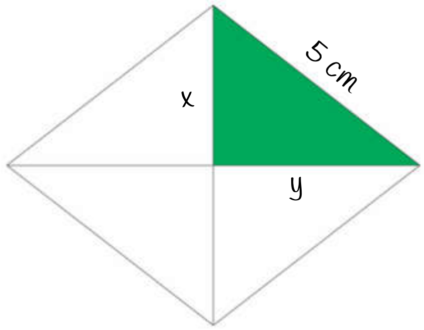
Operando, llegamos a:

$$1{,}3x+3{,}3x\le 25 \quad\rightarrow\quad 4{,}6x\le 25 \quad\rightarrow\quad x\le\frac{25}{4{,}6} \quad\rightarrow\quad x\le 5{,}435$$

Como x es el número de paquetes, tenemos que x=5

Por tanto, compraremos 5 paquetes de café de Ecuador y 10 de café de Colombia.

5.- El lado de un rombo es 5 cm y su área es 24 cm². Calcula la longitud de sus diagonales. (1,5 puntos)



El **rombo** es un paralelogramo cuyos cuatro lados son de igual longitud y cuyas diagonales lo parten en 4 triángulos rectángulos iguales. Si su área es de 24 cm², el área de cada triángulo será de 6 cm².

Si nos fijamos en uno de ellos (el verde) y llamamos x a uno de los catetos e y al otro, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y obtenemos una ecuación no lineal:

$$x^2+y^2=5^2 \quad\rightarrow\quad x^2+y^2=25$$

Con ayuda del área, podemos plantear otra ecuación, a así completar un sistema de ecuaciones no lineales.

$$\frac{x\cdot y}{2}=6$$

El sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x\cdot y=12\end{cases} \quad\rightarrow\quad \text{de la ecuación 2), despejamos la x: } x=\frac{12}{y} \text{ y la sustituimos en la 1):}$$

$$x^2+y^2=25 \quad\rightarrow\quad \left(\frac{12}{y}\right)^2+y^2=25 \quad\xrightarrow{\text{Operando}}\quad \frac{144}{y^2}+y^2=25 \quad\rightarrow\quad 144+y^4=25y^2$$

Obtenemos una ecuación bicuadrada, que resolveremos mediante un cambio de variable:

$$y^4-25y^2+144=0 \quad\rightarrow\quad \left[\text{Si } y^2=z\right] \quad\rightarrow\quad z^2-25z+144=0 \quad\xrightarrow{\text{Factorizando}}\quad (z-9)\cdot(z-16)=0$$

$$\rightarrow\quad \begin{cases}\text{Si } z-9=0 \quad\rightarrow\quad z=9\\ \text{Si } z-19=0 \quad\rightarrow\quad z=16\end{cases} \quad \underset{z=y^2\ \rightarrow\ y=\pm\sqrt{z}}{\xrightarrow{\text{Si deshacemos el cambio:}}} \quad \begin{cases}z=9 \quad\rightarrow\quad y=\pm\sqrt{9} \quad\rightarrow\quad y=\pm 3\\ z=16 \quad\rightarrow\quad y=\pm\sqrt{16} \quad\rightarrow\quad y=\pm 4\end{cases}$$

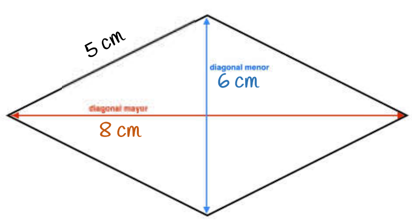
Como y es la medida de un cateto, tomaremos solo los valores positivos: y=3 e y=4

Y una vez conocidos y, ya podemos calcular los valores de x, sustituyendo en $x=\frac{12}{y}$:

$$\begin{cases}\text{Si } y=3 \quad\rightarrow\quad x=\frac{12}{y}=\frac{12}{3}=4 \quad\rightarrow\quad x=4\\ \text{Si } y=4 \quad\rightarrow\quad x=\frac{12}{y}=\frac{12}{4}=3 \quad\rightarrow\quad x=3\end{cases}$$

Así que los catetos del triángulo miden 3 y 4 cm. Y sus diagonales medirán el doble.

Por tanto, sus diagonales miden 6 y 8 cm respectivamente.



B.- Se define en el conjunto de los números reales una nueva operación: $a \oplus b = \sqrt{a+3} + \sqrt{b-7}$. ¿Cumple la propiedad conmutativa?, Con la ayuda de ella resuelve la siguiente ecuación:

$$(x+2) \oplus (x-8) = 10$$

Como todos sabemos, o como deberíamos saber, en matemáticas, la propiedad conmutativa o conmutatividad es una propiedad fundamental que tienen algunas operaciones según la cual el resultado de operar dos elementos no depende del orden en el que se toman. Así que:

$$\text{Si } a \oplus b = \sqrt{a+3} + \sqrt{b-7} \xrightarrow{\text{Entonces}} b \oplus a = \sqrt{b+3} + \sqrt{a-7} \rightarrow a \oplus b \neq b \oplus a$$

Queda demostrado que esta operación no cumple la propiedad conmutativa.

Ahora vamos a intentar resolver la ecuación:

$$(x+2) \oplus (x-8) = 10 \xrightarrow[\text{Llegamos a una ecuación irracional}]{\text{Aplicando la definición}} \sqrt{x+2+3} + \sqrt{x-8-7} = 10$$

Si aislamos una de las raíces y la elevamos al cuadrado, llegamos a:

$$\sqrt{x+2+3} + \sqrt{x-8-7} = 10 \rightarrow \sqrt{x+5} = 10 - \sqrt{x-15} \rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x-15}\right)^2$$

Si desarrollamos los cuadrados y operamos, llegamos a:

$$x+5 = 100 + x - 15 - 20\sqrt{x-15} \xrightarrow{\text{Transponemos términos}} x - x + 5 - 100 + 15 = -20\sqrt{x-15} \xrightarrow{\text{Agrupamos y operamos}}$$

$$\xrightarrow{\text{Llegamos a:}} -80 = -20\sqrt{x-15}$$

Dónde, simplificando un poco, y volviendo a elevar al cuadrado:

$$-80 = -20\sqrt{x-15} \xrightarrow{\text{Dejamos la raíz sola}} \frac{-80}{-20} = \sqrt{x-15} \rightarrow 4 = \sqrt{x-15} \xrightarrow{\text{Elevamos al Cuadrado}} 4^2 = \left(\sqrt{x-15}\right)^2 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Agrupamos}} 16 = x - 15 \xrightarrow{\text{Despejamos}} x = 31$$

Así que, la solución de esta rara ecuación es x=31.

I.E.S. ABYLA (Ceuta)	Nombre:		2ª EVAL	NOTA
	Curso:	4º ESO A	Simulacro Examen IX	
	Fecha:	11 de marzo de 2024	Final 2ª evaluación	

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

1.- Resuelve: (4 puntos)

$$a)\ x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10 \qquad b)\ \frac{x(x+2)}{x-2}>0$$

$$c)\begin{cases}\dfrac{4x-4}{3}-\dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{2y-2}{3}=\dfrac{12}{5}\end{cases} \qquad d)\begin{cases}x^3-\sqrt{y}=1\\ 5x^6+2y-8x^3\sqrt{y}=2\end{cases}$$

2.- Imane está haciendo reformas en casa. Ha agrandado la ventana del salón: ahora es 20 cm más alta y 30 cm más ancha. Con eso ha conseguido tener una ventana que es 0,99 m^2 más grande que la vieja. Además, ahora podrá poner una ventana de dos hojas cuadradas. ¿Cuáles eran las dimensiones de la ventana antes de la reforma? (1,5 puntos)

3.- Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 88,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40% de descuento y en la de calzado el 30%. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuanto me ha costado? (1,5 puntos)

4.- ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más unidades? (1,5 puntos)

5.- Hallar una fracción cuyo valor no cambia añadiendo 15 al numerador y 18 al denominador y que se triplica cuando se añade 55 al numerador y 6 al denominador. (1,5 puntos)

Nombre:	**S O L U C I O N E S**	2ª EVAL	NOTA
Curso:	**4º ESO A**	Simulacro Examen IX	
Fecha:	11 de marzo de 2024	**Final 2ª evaluación**	

I.E.S. ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

1.– Resuelve: (4 puntos)

- La primera ecuación es una ecuación radical, que resolveremos aislando el radical y elevando al cuadrado:

$$a)\ x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10 \xrightarrow{\text{Transponemos el }-10\text{ al primer miembro de la ecuación}} x^2-4x+10=3\sqrt{x^2-4x+20} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación}}$$

$$\rightarrow\ \left(x^2-4x+10\right)^2=\left(3\sqrt{x^2-4x+20}\right)^2 \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado un polinomio es multiplicarlo por sí mismo}} x^4-8x^3+20x^2-80x+100=9\left(x^2-4x+20\right)$$

$$\left[\left(x^2-4x+10\right)^2=\left(x^2-4x+10\right)\cdot\left(x^2-4x+10\right)=x^4-4x^3+10x^2-4x^3+16x^2-40x+10x^2-40x+100=x^4-8x^3+20x^2-80x+100\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Operando}} x^4-8x^3+36x^2-80x+100=9x^2-36x+180 \xrightarrow{\text{Agrupando}} x^4-8x^3+27x^2-44x-80=0$$

Que es una ecuación de cuarto grado que tenemos que factorizar mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -8 & 27 & -44 & -80 \\
-1 & & -1 & 9 & -36 & +80 \\
\hline
 & 1 & -9 & 36 & -80 & \underline{|0} \\
5 & & 5 & -20 & 80 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 16 & \underline{|0} &
\end{array}
\rightarrow\ x^4-8x^3+27x^2-44x-80=(x+1)\cdot(x-5)\cdot\left(x^2-4x+16\right)$$

Por tanto, la ecuación quedaría, en forma factorizada, de la siguiente manera:

$$(x+1)\cdot(x-5)\cdot\left(x^2-4x+16\right)=0 \xrightarrow{\text{Cuya solución viene dada por:}} \begin{cases}\text{Si } x+1=0 \rightarrow x=-1\\ \text{Si } x-5=0 \rightarrow x=5\\ \text{Si } x^2-4x+16=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow \text{No Sol.}\end{cases}$$

Y sus soluciones serían: $x_1=-1$ y $x_2=5$.

- La segunda operación es una inecuación racional en la que para que el cociente de dos "cosas" sea positivo ha de ocurrir que ambas tengan el mismo signo, o positivo o negativo.

$$b)\ \frac{x(x+2)}{x-2}>0 \rightarrow \begin{cases}\text{Si ambos son }+\begin{cases}x^2+2x>0 \rightarrow x<-2\ y\ x>0\\ x-2>0 \rightarrow x>2\end{cases} \rightarrow x>2\\[2ex] \text{Si ambos son }-\begin{cases}x^2+2x<0 \rightarrow -2<x<0\\ x-2<0 \rightarrow x<2\end{cases} \rightarrow -2<x<0\end{cases}$$

Cuya solución es la unión de ambas soluciones: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

- La tercera operación se trata de un sistema de ecuaciones lineales sin pena ni gloria, en el que no perderemos tiempo en resolver, pero del cual si os daré su solución.

$$c)\begin{cases}\dfrac{4x-4}{3}-\dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{2y-2}{3}=\dfrac{12}{5}\end{cases} \rightarrow \quad S.C.D.\{x=1 \quad y=-2\}$$

- El cuarto ejercicio se trata de un sistema de ecuaciones no lineales con radicales

$$d)\begin{cases}x^3-\sqrt{y}=1\\ 5x^6+2y-8x^3\sqrt{y}=2\end{cases} \xrightarrow{\text{De la primera ecuación despejamos } x^3} x^3=1+\sqrt{y} \xrightarrow{\text{Y la sustituimos en la segunda ecuación}} 5\left(1+\sqrt{y}\right)^2+2y-8\left(1+\sqrt{y}\right)\sqrt{y}=2$$

Llegamos a una ecuación en y, en la que operando:

$$\rightarrow 5\left(1+y+2\sqrt{y}\right)+2y-8\sqrt{y}-8y=2 \xrightarrow{\text{Si queitamos () y agrupamos}} 5+5y+10\sqrt{y}+2y-8\sqrt{y}-8y-2=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -y-2\sqrt{y}+3=0 \xrightarrow{\text{Aislamos la Raíz}} 3-y=2\sqrt{y} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado}} (3-y)^2=\left(2\sqrt{y}\right)^2 \rightarrow y^2-6y+9=4y$$

$$\rightarrow y^2-10y+9=0 \xrightarrow{\text{Factorizando}} (y-9)\cdot(y-1)=0 \rightarrow \begin{cases}\text{Si } y-9=0 \rightarrow y_1=9\\ \text{Si } y-1=0 \rightarrow y_2=1\end{cases}$$

Conocidos los valores de y, podemos calcular los de x:

$$\text{Si } x^3=1+\sqrt{y} \rightarrow x=\sqrt[3]{1+\sqrt{y}} \rightarrow \begin{cases}\text{Si } y_1=9 \rightarrow x_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{9}}=\sqrt[3]{1+3}=\sqrt[3]{4}\\ \text{Si } y_2=1 \rightarrow x_2=\sqrt[3]{1+\sqrt{1}}=\sqrt[3]{1+1}=\sqrt[3]{2}\end{cases}$$

Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado de soluciones: $S.C.D.\begin{cases}y_1=9 \quad , \quad x_1=\sqrt[3]{4}\\ y_2=1 \quad , \quad x_2=\sqrt[3]{2}\end{cases}$

2.- Imane está haciendo reformas en casa. Ha agrandado la ventana del salón: ahora es 20 cm más alta y 30 cm más ancha. Con eso ha conseguido tener una ventana que es 0,99 m² más grande que la vieja. Además, ahora podrá poner una ventana de dos hojas cuadradas. ¿Cuáles eran las dimensiones de la ventana antes de la reforma? (1,5 puntos)

Se trata de un problema que se puede resolver por sistemas de ecuaciones no lineales y por ecuaciones. Lo vamos a resolver por ecuaciones.

Si llamamos x a la altura de la ventana nueva, la anchura será 2x, puesto que se podrán poner dos hojas cuadradas, así que, con esto, podemos plantear una ecuación con el área:

Si x es la altura de la ventana nueva, la vieja tendía una altura de x−20, y si el ancho de la ventana nueva es 2x, el de la vieja era de 2x−30. Como las distancias están en cm, el área también lo tiene que estar, por tanto, hacemos un cambio de unidades:

$$0{,}99m^2=0{,}99\ m^2\cdot\frac{10^4\ cm^2}{1\ m^2}=0{,}99\ \cancel{m^2}\cdot\frac{10^4\ cm^2}{1\ \cancel{m^2}}=0{,}99\cdot10^4\ cm^2=9900\ cm^2$$

Y, ahora sí, ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{(x-20)\cdot(2x-30)+9900}_{\text{Área de la ventana vieja}} = \underbrace{2x\cdot x}_{\text{Área de la nueva}}$$

Cuya solución es:

$$(x-20)\cdot(2x-30)+9900=2x\cdot x \quad \rightarrow \quad \cancel{2x^2}-30x-40x+600+9900=\cancel{2x^2} \quad \rightarrow \quad -70x=-10.500$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-10.500}{-70} \quad \rightarrow \quad x=150$$

Así que la altura de la ventana nueva es de 150 cm y la anchura es de 300 cm, como nos piden las dimensiones antes bastaría con restarle 20 a la altura y 30 a la anchura.

Por tanto, la ventana antes de la reforma medía 130 cm de alto y 270 cm de ancho.

Si lo resolviéramos mediante un sistema de ecuaciones sería así:

Si llamamos x a la anchura inicial de la ventana e y a su altura, podemos plantear el sistema, en el que una ecuación será con el área y la otra con las dimensiones de la nueva ventana:

$$\begin{matrix}\text{Ecuación con el área} \\ \text{Ecuación con dimensiones}\end{matrix}\begin{cases} x\cdot y+9900=(y+20)\cdot(x+30) \\ 2(y+20)=x+30\end{cases}$$

Que operando quedaría como un sistema lineal:

$$\begin{cases} x\cdot y+9900=(y+20)\cdot(x+30) \\ 2(y+20)=x+30\end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy+9900=xy+20x+30y+600 \\ 2y+40=x+30\end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x+30y=9300 \\ x-2y=10\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+3y=930 \\ x-2y=10\end{cases} \xrightarrow[\text{la ec 2) por }(-2)]{\text{Por reducción, multiplicando}} \begin{cases} 2x+3y=930 \\ -2x+4y=-20\end{cases} \xrightarrow[\text{Sumando}]{} 7y=910 \rightarrow y=130 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=2y+10 \quad \rightarrow \quad x=160+10=270$$

$$S.C.D.\left\{x=270 \quad y=130\right\}$$

3.- Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 88,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40% de descuento y en la de calzado el 30%. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuanto me ha costado? (1,5 puntos)

Si llamamos x al precio original del chándal, e y al de las zapatillas ya podemos plantear un sistema de ecuaciones lineales, en el que la primera ecuación la escribiremos con los precios antes de las rebajas:

$$1) \quad x+y=135$$

Y la segunda con los precios ya rebajados. Si nos descuentan un 40%, pagamos un 60% y si el descuento es del 30% pagaremos un 70%

$$2) \quad 0{,}6x+0{,}7y=88{,}50$$

Con esto:

$$\begin{matrix}1) \\ 2)\end{matrix}\begin{cases} x+y=135 \\ 0{,}6x+0{,}7y=88{,}50\end{cases} \xrightarrow{\text{Por reducción}} \begin{cases} -0{,}6x-0{,}6y=-81 \\ 0{,}6x+0{,}7y=88{,}50\end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando ambas Ecuaciones}} 0{,}1y=7{,}5 \rightarrow y=75\ €$$

Y de la ecuación 1):

$$x+y=135 \quad \rightarrow \quad x=135-y=135-75=60\ €$$

Por tanto, el chándal costaba 60 € y las zapatillas 75 €; y me han costado 36 € y 52,50 € respectivamente.

4.- ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más unidades? (1,5 puntos)

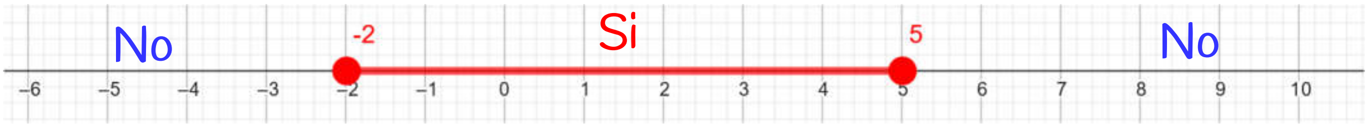
Si llamamos x al número más pequeño de ellos, ya podemos plantear una inecuación: $3x+10 \geq x^2$, en la que, para resolverla, primero resolvemos la ecuación:

$$3x+10=x^2 \quad \rightarrow \quad x^2-3x-10=0 \quad \underset{\text{Factorizando}}{\rightarrow} \quad (x-5)\cdot(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } x-5=0 & \rightarrow \quad x=5 \\ \text{Si } x+2=0 & \rightarrow \quad x=-2 \end{cases}$$

Si representamos ambas soluciones en la recta real y probamos con un número cualquiera que no sea ninguna de ellas, podremos verificar en qué intervalo se verifica la desigualdad. Probaremos por ejemplo con el cero:

$$3x+10 \geq x^2 \quad \rightarrow \quad \text{Si } x=0 \quad \rightarrow \quad 0+10 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 10 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Verdadero}$$

Así que, si el 0 verifica la desigualdad, todos los números de ese intervalo también.



Por tanto, los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más son todos los que pertenecen a: $[-2,5]$

5.- Hallar una fracción cuyo valor no cambia añadiendo 15 al numerador y 18 al denominador y que se triplica cuando se añade 55 al numerador y 6 al denominador. (1,5 puntos)

Si llamamos x al numerador e y al denominador, ya podemos plantear un sistema de ecuaciones en el que la primera ecuación sería:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+15}{y+18} \quad \rightarrow \quad x\cdot(y+18)=y(x+15) \quad \rightarrow \quad xy+18x=xy+15y \quad \rightarrow \quad 18x-15y=0 \quad \rightarrow \quad 6x-5y=0$$

Y la segunda:

$$3\cdot\frac{x}{y}=\frac{x+55}{y+6} \quad \rightarrow \quad 3x(y+6)=y(x+55) \quad \rightarrow \quad 3xy+18x=xy+55y \quad \rightarrow \quad 2xy+18x-55y=0$$

$$\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{cases} 6x-5y=0 \\ 2xy+18x-55y=0 \end{cases}$$

Lo resolveremos por el método de sustitución: Si despejamos x de la primera ecuación: $6x-5y=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{5y}{6}$

Y la sustituimos en la segunda, llegamos a:

$$2xy+18x-55y=0 \quad \rightarrow \quad 2\frac{5y}{6}y+18\frac{5y}{6}-55y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3}y^2+15y-55y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3}y^2-40y=0$$

Una ecuación de segundo grado incompleta que resolveremos sacando factor común:

$$\frac{5}{3}y^2-40y=0 \quad \rightarrow \quad 5y\left(\frac{y}{3}-8\right)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } 5y=0 & \rightarrow \quad y=0 \\ \text{Si } \frac{y}{3}-8=0 & \rightarrow \quad y=24 \end{cases}$$

De las dos soluciones desechamos la trivial y calculamos x sustituyendo en: $x=\frac{5y}{6}=\frac{5\cdot 24}{6}=5\cdot 4=20$

Por tanto, la fracción pedida es $\frac{20}{24}$