12. Técnicas de recuento

ACTIVIDADES

1. Se ofrecen 2 · 3 · 2 = 12 modelos diferentes:

— Designamos los tipos de material por Pl (plástico) y Met (metal), los tipos de montura por Cl (clásica), Act (actual) y Mod (moderna), y designamos el tipo de cristal por N (normal) y R (resistente). El diagrama en árbol resultante es:

Material	Montura	Cristal	Configuración
Pl	Cl	N	Pl Cl N
		R	Pl Cl R
	Act	N	Pl Act N
		R	Pl Act R
	Mod	N	Pl Mod N
		R	Pl Mod R
Met	Cl	N	Met Cl N
		R	Met Cl R
	Act	N	Met Act N
		R	Met Act R
	Mod	N	Met Mod N
		R	Met Mod R

2. Aplicamos el principio multiplicativo.

El número de configuraciones es:

30 · 29 = 870

Es posible escoger al delegado y al subdelegado de 870 maneras.

3. Representamos por B una bola blanca y por R una bola roja:

Podemos obtener 10 resultados distintos

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	Configuración
B	B	R	R	R	BBRRR
	R	B	R	R	BRBRR
		R	B	R	BRRBR
			R	B	BRRRB
B	B	B	R	R	RBBRR
		R	B	R	RBRBR
			R	B	RBRRB
	R	B	B	R	RRBBR
			R	B	RRBRB
		R	B	B	RRRBB

4. Aplicamos el principio multiplicativo.

El número de configuraciones es:

2 · 2 · 2 · 2 = 16

Se pueden obtener 16 resultados diferentes.

5. Las diferentes configuraciones pueden formarse eligiendo 3 colores entre los 5 disponibles, de forma que importa el orden y no pueden repetirse. Se trata de variaciones ordinarias de 5 elementos tomados de 3 en 3. El número de posibilidades es de:

$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

6. Las diferentes configuraciones resultan de elegir 3 personas entre las 25 que participan en el sorteo, de manera que importa el orden y no se pueden repetir.

$V_{25,3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$

Los premios pueden quedar repartidos de 13 800 maneras diferentes.

7. Si las cuatro cifras han de ser distintas, no puede haber elementos repetidos en una misma configuración. Además, importa el orden de colocación de los elementos. Se trata de variaciones ordinarias de 4 elementos tomados de 4 en 4:

$V_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Para saber cuántos de estos números son menores que 6000 hay que considerar el total de configuraciones que empiezan por 2 o por 4.

Si se fija la primera cifra en 2, quedan 3 elementos con los que formar las tres cifras restantes. Hay, pues, un total de posibilidades igual a:

$V_{3,3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

El mismo número de posibilidades se obtienen fijando la primera cifra en 4. Por tanto, la cantidad de números menores que 6 000 es de: 2 · 6 = 12.

8. Las diferentes configuraciones resultan de elegir 5 letras entre las 6 letras, de manera que importa el orden y no se pueden repetir.

$V_{6,5} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$

Se pueden formar 720 palabras.

Si fijamos 1 elemento:

B __ __ __ __

Las diferentes configuraciones resultan de elegir 4 letras entre las 5 letras disponibles, de manera que importa el orden y no se pueden repetir.

$V5_{,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Comienzan por B 120 palabras.

9. Se han de elegir 3 letras entre las 7 disponibles, de manera que importa el orden de colocación de las letras y pueden aparecer letras repetidas.

$VR_{7,3} = 73 = 343$

Es posible formar 343 palabras

Si fijamos 1 elemento:

B __ __

Las diferentes configuraciones resultan de elegir 2 letras entre las 7 letras, de manera que importa el orden y hay repetición.

$VR_{7,2} = 72 = 49$

Comienzan por B 49 palabras.

10. Importa el orden de colocación de los elementos y éstos pueden repetirse en una misma configuración. Son variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$VR_{5,3} = 53 = 125$

11. Importa el orden de colocación de los elementos y éstos pueden repetirse en una misma configuración. Son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 3 en 3:

$VR_{2,3} = 23 = 8$

12. Disponemos de tres elementos (1, X, 2) que se tienen que distribuir en 14 lugares de manera que importa el orden de colocación de los elementos y pueden aparecer elementos repetidos.

$VR_{3,14} = 314 = 4\,782\,969$

Es posible rellenar 4 782 969 quinielas diferentes.

13. Las configuraciones posibles son las diferentes maneras de ordenar los 10 libros.

$P_{10} = 10! = 3628800$

Hay 3 628 800 ordenaciones posibles.

14. Las configuraciones posibles son las diferentes maneras de ordenar los cuatro números.

$P_4 = 4! = 24$

Se pueden formar 24 códigos.

15. La palabra UNIVERSAL tiene 9 letras. Si se utilizan todas sus letras para formar palabras de 9 letras, en las distintas configuraciones intervienen todos los elementos, los cuales no pueden repetirse. Además, importa el orden de los elementos. Son permutaciones ordinarias de 9 elementos:

$P_9 = 9! = 362880$

16. Sólo tendrán la terminación impar los acabados en 7. Las cuatro cifras anteriores estarán formadas por los números 2, 4, 6 y 8, sin que se repita ninguno. El número de configuraciones distintas es:

$P_4 = 4! = 24$

17. Las configuraciones posibles son las diferentes maneras de ordenar los 7 pantalones en una semana.

$P_7 = 7! = 5040$

Pueden hacerse 5 040 distribuciones diferentes.

5 años $\cong$ 260 semanas

$260 < 5\,040 \Rightarrow$ Es cierto que puede estar cinco años sin repetir la misma distribución de pantalones.

18. a) Importa el orden de colocación de los elementos, intervienen todos los elementos en todas las configuraciones y no se pueden repetir los elementos. Se trata de permutaciones ordinarias de 5 elementos: $P = 5! = 120$

b) Importa el orden de colocación de los elementos, intervienen todos los elementos en todas las configuraciones y no se pueden repetir los elementos. Es un producto de permutaciones ordinarias:

$P_2 \cdot P_3 = 2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

19. El número de formas de colocar ocho amigos en ocho plazas distintas coincide con el número de permutaciones ordinarias de ocho elementos:

$P_8 = 8! = 40320$

20. Importa el orden de colocación de los elementos, intervienen todos los elementos en todas las configuraciones y no se pueden repetir los elementos. Se trata de permutaciones ordinarias de n elementos:

$P_n = n! = 720 \Rightarrow n = 6$

21. No importa el orden de colocación de los elementos y no se pueden repetir los elementos. Se trata de combinaciones ordinarias de 20 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{20,3} = \frac{V_{20,3}}{P_3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$$

22. Las configuraciones son listas de 6 números, elegidos entre los 49, de manera que no importa el orden de colocación ni pueden aparecer números repetidos.

$$C_{49,6} = \frac{V_{49,6}}{P_6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13\,983\,816$$

Se pueden hacer 13 983 816 apuestas diferentes.

23. No importa el orden de colocación de los elementos y no se pueden repetir los elementos. Se trata de combinaciones ordinarias. En un dodecágono regular hay 12 vértices que, si se unen dos a dos, dan lugar a este número de segmentos:

$$C_{12,2} = \frac{V_{12,2}}{P_2} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$$

A este valor hay que restar el número de segmentos entre dos vértices consecutivos: 66 - 12 = 54. Así, un dodecágono regular tiene 54 diagonales.

— En el caso de un polígono regular de n lados, el número de diagonales es:

$$C_{n,2} - n = \frac{V_{n,2}}{P_2} - n = \frac{n \cdot (n-1)}{2!} = \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

24. No importa el orden de colocación de los elementos y no se pueden repetir los elementos. Se trata de combinaciones ordinarias.

Formas de elegir 2 alumnos del grupo 4ESOA:

$$C_{24,2} = \frac{V_{24,2}}{P_2} = \frac{24 \cdot 23}{2!} = 276$$

Formas de elegir 2 alumnos del grupo 4ESOB:

$$C_{25,2} = \frac{V_{25,2}}{P_2} = \frac{25 \cdot 24}{2!} = 300$$

Formas de elegir una comisión:

$$C_{24,2} \cdot C_{25,2} = 276 \cdot 300 = 82\,800$$

25. Cada triángulo se forma a partir de tres vértices diferentes entre los ocho del octágono, sin importar el orden de elección. Se trata de combinaciones ordinarias de 8 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{8,3} = \frac{V_{8,3}}{P_3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

26. a) $\binom{x}{3} + \binom{x}{4} = \binom{x+1}{4} \Rightarrow \binom{x+1}{4} = \binom{6}{4} \Rightarrow x = 5$

b) $\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \cancel{(x-3)!}}{3! \cdot \cancel{(x-3)!}} = 35 \Rightarrow$

$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 210 \Rightarrow x = 7$

27. a) $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 =$

$= a^2 - 2ab + b^2$

b) $\left(\frac{1}{4}x - 2y\right)^4 = \frac{x^4}{256} - \frac{x^3 y}{8} + \frac{3x^2 y^2}{2} - 8xy^3 + 16y^4$

28. *Problema 1*

Una clase de 25 alumnos ha de elegir un delegado y un subdelegado. ¿De cuántas maneras puede hacerse la elección?

- ¿Importa el orden de colocación de los elementos?

  Sí.

- ¿Intervienen todos los elementos en todas las configuraciones?

  Sí.

- ¿Pueden repetirse los elementos?

  No.

  Se trata de variaciones ordinarias de 25 elementos tomados de 2 en 2.

  $V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600$

  Puede hacerse la elección de 600 maneras diferentes.

Problema 2

Un test consta de 10 preguntas. Cada una admite tres respuestas diferentes, a, b o c. ¿De cuántas maneras diferentes puede responderse el test?

- ¿Importa el orden de colocación de los elementos?

  Sí.

- ¿Intervienen todos los elementos en todas las configuraciones?

  No.

- ¿Pueden repetirse los elementos?

  Sí.

  Se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 10 en 10.

  $VR_{3,10} = 310 = 59049$

  Se puede responder el test de 59049 maneras diferentes.

Problema 3

Ocho personas asisten a una fiesta y cada una de ellas saluda a las otras. ¿Cuántos saludos se han efectuado?

- ¿Importa el orden de colocación de los elementos?

  No.

- ¿Intervienen todos los elementos en todas las configuraciones?

  No.

- ¿Pueden repetirse los elementos?

  No.

  Se trata de combinaciones ordinarias de 8 elementos tomados de 2 en 2.

  $$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2! \cdot \cancel{6!}} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

  Se han hecho 28 saludos.

—Respuesta abierta.

29. **Aplicando el principio multiplicativo:**

Para el caso de números que empiecen por cifra par:

Considerando que los números pueden empezar por cero:

$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 648$ números distintos

Considerando que no pueden empezar por cero:

$2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 432$ números distintos

Las que empiezan y acaban por cifra impar:

$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 324$ números distintos

30. Los números de tres cifras que son capicúas son de la forma *xyx*. Así, debemos hallar todas las ordenaciones posibles de la forma *xy*.

Importa el orden de colocación de los elementos, no intervienen todos los elementos en todas las configuraciones y se pueden repetir los elementos. Se trata de variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 2 en 2: $VR_{10,2} = 102 = 100$

Pueden obtenerse 100 números entre los cuales hemos considerado los que empiezan por 0, es decir los de la forma 0*y*0 que en total son 10. Hallamos el número total de capicúas que pueden formarse: $VR_{10,2} - 10 =$ $= 100 - 10 = 90$. Así, hay 90 números de tres cifras que son capicúas.

Un número capicúa es aquél que es igual leído de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Así, los capicúas de cuatro cifras son de la forma *xyyx*. Hay que hallar todas las ordenaciones posibles de la forma *xy*, que ya hemos visto antes que son: $VR_{10,2} = 102 = 100$. En este caso hay que restar los que empiezan por 0, es decir los de la forma 0*yy*0 que en total son 10. Por tanto, se observa que el número de números capicúas de cuatro cifras es igual al de capicúas de tres cifras: $VR_{10,2} - 10 = 100 - 10 = 90$

31. Un problema de contar es un problema matemático que se resuelve averiguando cuántas cosas de un cierto tipo hay, o de cuántas maneras es posible elegir u ordenar algo.

Llamamos configuración a cada uno de los resultados posibles en un problema de contar.

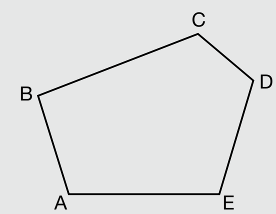
32. Un diagrama en árbol es una figura gráfica que representa las diferentes configuraciones de un problema de contar.

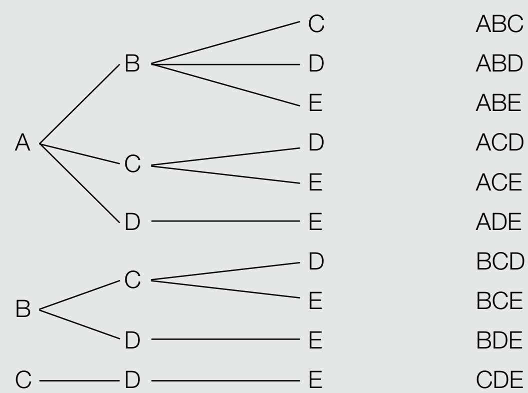
Diagrama regular:

Números de dos cifras diferentes que se pueden formar con las cifras 2, 4 y 6.

Diagrama no regular:

Triángulos que se pueden formar con los vértices de un pentágono.





33. Consiste en hacer el recuento multiplicando el número de opciones de cada elección.

Ejemplo en el que se cumple:

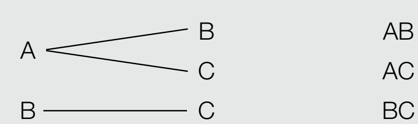
Una persona tiene 3 pantalones y 4 camisetas. Se puede vestir de $3 \cdot 4 = 12$ maneras diferentes.

Ejemplo en el que no se cumple:

Sorteo de dos discos iguales entre tres amigos (A, B y C)

Diagrama:

1.º Disco 2.º Disco Configuración



No podemos aplicar el principio multiplicativo, porque el diagrama no es regular.

34. a)

1.ª letra	2.ª letra	Configuración
	A	AA
	B	AB
A	C	AC
	D	AD
	E	AE
	A	BA
	B	BB
B	C	BC
	D	BD
	E	BE
	A	CA
	B	CB
C	C	CC
	D	CD
	E	CE
	A	DA
	B	DB
D	C	DC
	D	DD
	E	DE
	A	EA
	B	EB
E	C	EC
	D	ED
	E	EE

b)

1.ª letra	2.ª letra	Configuración
	B	AB
A	C	AC
	D	AD
	E	AE
	C	BC
B	D	BD
	E	BE
C	D	CD
	E	CE
D	E	DE

El primer caso presenta un diagrama regular.

Se aplicará el principio multiplicativo en el primer caso.

35. Bebida: Zu – zumo de fruta, Ba – batido de chocolate, Ca – café.

Bocadillo: Ch – bocadillo de chorizo, Ja – bocadillo de jamón, Mo – bocadillo de mortadela, Sa – bocadillo de salchichón.

Pasta: Cr – cruasán, En – ensaimada y Ma – magdalena.

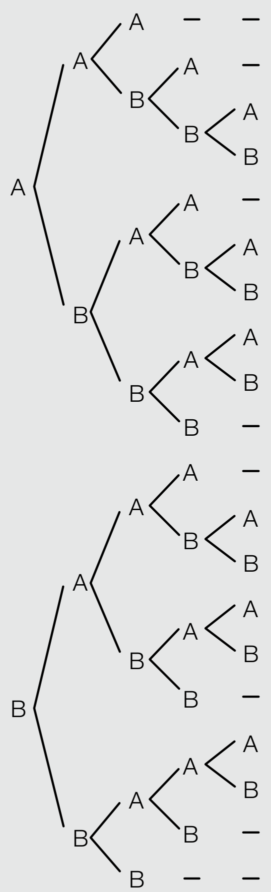
$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Los clientes pueden elegir entre 36 desayunos diferentes.

Bebida	Bocadillo	Pasta	Configuración
		Cr	Zu Ch Cr
	Ch	En	Zu Ch En
		Ma	Zu Ch Ma
		Cr	Zu Ja Cr
	Ja	En	Zu Ja En
Zu		Ma	Zu Ja Ma
		Cr	Zu Mo Cr
	Mo	En	Zu Mo En
		Ma	Zu Mo Ma
		Cr	Zu Sa Cr
	Sa	En	Zu Sa En
		Ma	Zu Sa Ma
		Cr	Ba Ch Cr
	Ch	En	Ba Ch En
		Ma	Ba Ch Ma
		Cr	Ba Ja Cr
	Ja	En	Ba Ja En
Ba		Ma	Ba Ja Ma
		Cr	Ba Mo Cr
	Mo	En	Ba Mo En
		Ma	Ba Mo Ma
		Cr	Ba Sa Cr
	Sa	En	Ba Sa En
		Ma	Ba Sa Ma
		Cr	Ca Ch Cr
	Ch	En	Ca Ch En
		Ma	Ca Ch Ma
		Cr	Ca Ja Cr
	Ja	En	Ca Ja En
Ca		Ma	Ca Ja Ma
		Cr	Ca Mo Cr
	Mo	En	Ca Mo En
		Ma	Ca Mo Ma
		Cr	Ca Sa Cr
	Sa	En	Ca Sa En
		Ma	Ca Sa Ma

36. Representamos por A y por B a las dos personas que participan en el concurso y señalamos en el diagrama en árbol el ganador de cada una de las pruebas.

1.ª 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª



Configuración	Ganador
AAA	A
AABA	A
AABBA	A
AABBB	B
ABAA	A
ABABA	A
ABABB	B
ABBAA	A
ABBAB	B
ABBB	B
BAAA	A
BAABA	A
BAABB	B
BABAA	A
BABAB	B
BABB	B
BBAAA	A
BBAAB	B
BBAB	B
BBB	B

37. $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$

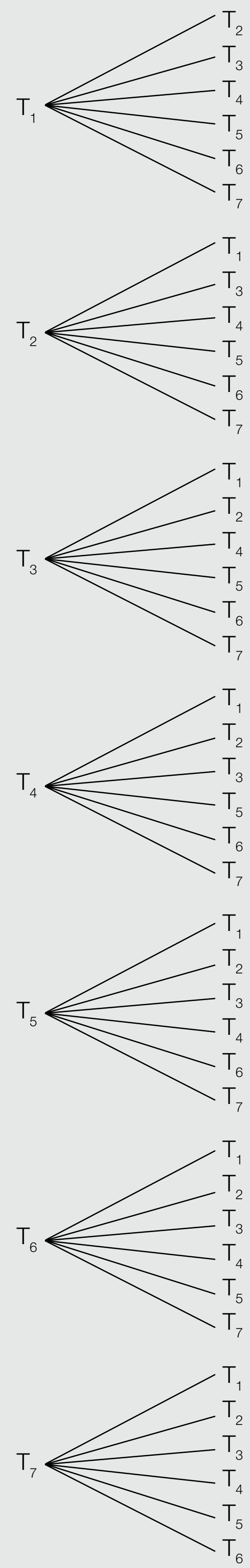
Un cliente puede pedir visita de 30 maneras diferentes.

— Si el señor García no trabaja los lunes, existen dos posibilidades menos (no puede atender a los clientes ni el lunes por la mañana ni el lunes por la tarde) y si la señora Pérez no trabaja por las tardes existen otras cinco posibilidades menos (las tardes de lunes a viernes).

$30 - 2 - 5 = 23$

En este caso un cliente puede pedir visita de 23 maneras diferentes.

38. Primera tarea — Segunda tarea — Configuración

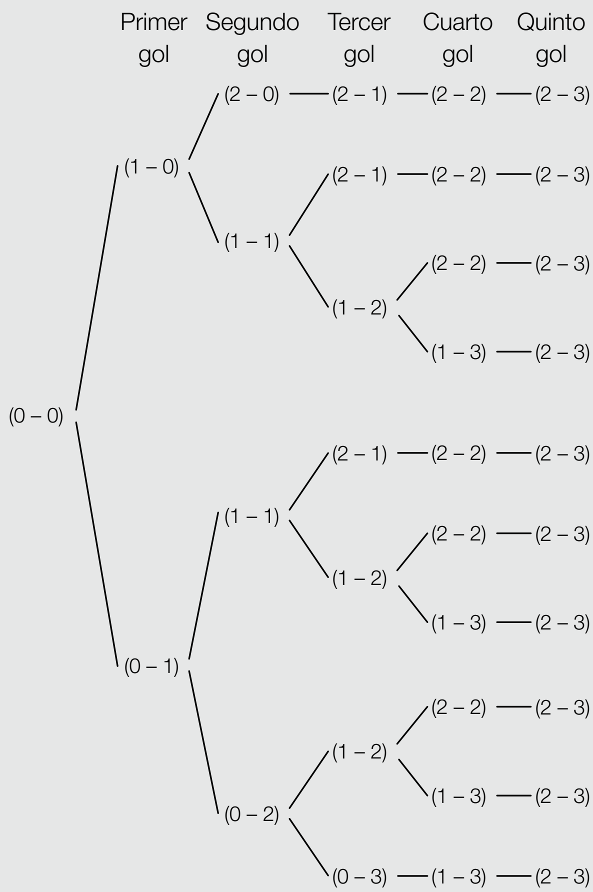


Configuración
T_1T_2
T_1T_3
T_1T_4
T_1T_5
T_1T_6
T_1T_7
T_2T_1
T_2T_3
T_2T_4
T_2T_5
T_2T_6
T_2T_7
T_3T_1
T_3T_2
T_3T_4
T_3T_5
T_3T_6
T_3T_7
T_4T_1
T_4T_2
T_4T_3
T_4T_5
T_4T_6
T_4T_7
T_5T_1
T_5T_2
T_5T_3
T_5T_4
T_5T_6
T_5T_7
T_6T_1
T_6T_2
T_6T_3
T_6T_4
T_6T_5
T_6T_7
T_7T_1
T_7T_2
T_7T_3
T_7T_4
T_7T_5
T_7T_6

Se pueden repartir de 42 maneras.

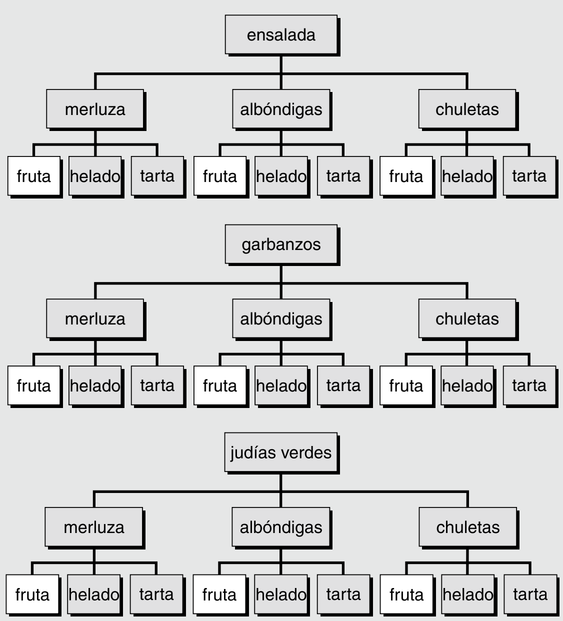
Se cumple el principio multiplicativo: $7 \cdot 6 = 42$.

39. Las diferentes situaciones para llegar al marcador final (2-3) pueden ser:



Obtenemos 10 posibles partidos diferentes.

40. a)



Podrán elaborarse 27 menús diferentes.

b) De todos estos menús, hay 9 que tienen fruta de postre.

41.

1.er núm.	2.º núm.	Suma	Múltiplos de 3
1	2	3	x
	3	4	
	4	5	
	5	6	x
2	1	3	x
	3	5	
	4	6	x
	5	7	
3	1	4	
	2	5	
	4	7	
	5	8	
4	1	5	
	2	6	x
	3	7	
	5	9	x

42. Similitudes:

En las variaciones ordinarias, en las variaciones con repetición y en las permutaciones ordinarias importa el orden de colocación de los elementos.

En las variaciones ordinarias, en las permutaciones ordinarias y en las combinaciones ordinarias no aparecen elementos repetidos en una misma configuración.

Diferencias:

En las variaciones ordinarias, en las variaciones con repetición y en las permutaciones ordinarias importa el orden de colocación de los elementos, mientras que en las combinaciones ordinarias no importa.

En las variaciones ordinarias, en las permutaciones ordinarias y en las combinaciones ordinarias no aparecen elementos repetidos en una misma configuración, mientras que en las variaciones con repetición pueden aparecer elementos repetidos.

43. Dado un número natural n ($n > 1$) se designa por $n!$, que se lee factorial de n, al número natural definido por:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$

Por convenio el valor de los números factoriales 1! y 0! es: $1! = 1$, $0! = 1$.

—Un cociente del tipo $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ con $k \leq n$, se llama combinatorio de n sobre k y se representa abreviadamente por $\dbinom{n}{k}$.

—Propiedades de los números combinatorios:

1. Para cualquier número natural, *n* se cumple:

   a) $\binom{n}{1}=n$ b) $\binom{n}{0}=1$ c) $\binom{n}{n}=1$

2. Para cualesquiera números naturales *n* y *k* o para $k=0$, tales que $k\leq n$, se cumple:

   $$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

3. Para cualesquiera números naturales *n* y *k* o para $k=0$, tales que $k+1\leq n$, se cumple:

   $$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{k+1}{k+1}$$

—Aplicaciones de los números combinatorios:

Triángulo de Tartaglia

$$\begin{array}{c}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\\ \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\\ \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}\\ \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}1\quad1\\ 1\quad2\quad1\\ 1\quad3\quad3\quad1\\ 1\quad4\quad6\quad4\quad1\end{array}$$

Binomio de Newton

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+$$
$$+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n$$
$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0-\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}a^0b^n$$

44. a) $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

b) $10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$
$=3\,628\,800$

c) $\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\,(9-3)!}=\frac{9!}{3!\,6!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{3!\,\cancel{6!}}=$
$=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

d) $\binom{11}{5}=\frac{11!}{5!\,(11-5)!}=\frac{11!}{5!\,6!}=$
$=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{5!\,\cancel{6!}}=$
$=\frac{11\cdot\cancel{10}\cdot9\cdot8\cdot7}{\cancel{5}\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}=462$

45. a) $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,(8-3)!}=\frac{8!}{3!\,5!}=$
$=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{3!\,\cancel{5!}}=\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=56$

b) $\binom{15}{9}+\binom{15}{10}=\binom{16}{10}=\frac{16!}{10!\,(16-10)!}=$
$=\frac{16!}{10!\,6!}=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot\cancel{10!}}{\cancel{10!}\,6!}=$
$=\frac{16\cdot\cancel{15}\cdot14\cdot13\cdot\cancel{12}\cdot11}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=8\,008$

46. a) $V_{5,3}=5\cdot4\cdot3=60$

b) $VR_{5,3}=5^3=125$

c) $VR_{3,5}=3^5=243$

d) $P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

e) $C_{5,3}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot2!}=$
$=\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot2!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

f) $C_{4,4}=\binom{4}{4}=\frac{4!}{4!\,(4-4)!}=\frac{4!}{4!\,0!}=1$

47. a) $5VR_{3,5}=5\cdot3^5=5\cdot243=1215$

b) $VR_{10,2}-V_{10,2}=10^2-10\cdot9=100-90=10$

c) $4VR_{2,3}-2V3,2=4\cdot2^3-2\cdot3\cdot2=32-12=20$

48. a) $\frac{VR_{3,2}}{V_{3,2}}=\frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{3}\cdot2}=\frac{3}{2}$

b) $\frac{V_{5,4}}{P_4}=\frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=5$

c) $\frac{P_{50}}{P_{49}}=\frac{50!}{49!}=\frac{50\cdot\cancel{49!}}{\cancel{49!}}=50$

49. $VR_{3,5}+V_{7,3}+P_5+C_{6,4}=3^5+(7\cdot6\cdot5)+$
$+5!+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4!}=243\cdot210+120+15=588$

50. $\binom{4}{x}=\binom{4}{4-x}\Rightarrow\binom{4}{4-x}=\binom{4}{x+2}\Rightarrow$
$\Rightarrow4-x=x+2\Rightarrow x=1$

51. $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\,(6-2)!}=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{2!\,\cancel{4!}}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\,(7-3)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{3!\,\cancel{4!}}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{3!\,\cancel{3!}}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

$\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=15+20=35=\binom{7}{3}$

52. a) $(x+2)^4=\binom{4}{0}x^4\cdot 2^0+\binom{4}{1}x^3\cdot 2^1+$

$+\binom{4}{2}x^2\cdot 2^2+\binom{4}{3}x^1\cdot 2^3+\binom{4}{4}x^0\cdot 2^4=$

$=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

b) $(x^2-2)^4=\binom{4}{0}(x^2)^4\cdot 2^0-\binom{4}{1}(x^2)^3\cdot 2^1+$

$+\binom{4}{2}(x^2)^2\cdot 2^2-\binom{4}{3}(x^2)^1\cdot 2^3+\binom{4}{4}(x^2)^0\cdot 2^4=$

$=x^8-8x^6+24x^4-32x^2+16$

c) $\left(\frac{1}{x}+2x\right)^5=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^5(2x)^0+\binom{5}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^4(2x)^1+$

$+\binom{5}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^3(2x)^2+\binom{5}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2(2x)^3+$

$+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^1(2x)^4+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^0(2x)^5=\frac{1}{x^5}+5\cdot$

$\cdot\frac{1}{x^4}\cdot 2x+10\cdot\frac{1}{x^3}\cdot 4x^2+10\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 8x^3+5\cdot\frac{1}{x}\cdot$

$\cdot 16x^4+32x^5=\frac{1}{x^5}+\frac{10}{x^3}+\frac{40}{x}+80x+$

$+80x^3+32x^5$

d) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}x)^3=\binom{3}{0}(\sqrt{3})^3\cdot(\sqrt{5}x)^0+\binom{3}{0}(\sqrt{3})^2\cdot$

$\cdot(\sqrt{5}x)^1+\binom{3}{2}(\sqrt{3})^1\cdot(\sqrt{5}x)^2+\binom{3}{3}(\sqrt{3})^0\cdot$

$\cdot(\sqrt{5}x)^3=3\sqrt{3}+9\sqrt{5}x+15\sqrt{3}x^2+5\sqrt{5}x^3$

53. $\binom{x}{3}+\binom{x}{3}=\binom{x+1}{3};$

$\binom{x+1}{3}+\binom{x+1}{4}=\binom{x+2}{4};$

$\binom{x+2}{4}+\binom{x+2}{5}=\binom{x+3}{5};$

$\binom{x+3}{5}+\binom{x+3}{6}=\binom{x+4}{6};$

$\binom{x+4}{6}=\binom{15}{6}\Rightarrow x+4=15\Rightarrow x=11$

54. a) $x^3-9x^2+27x-27$

b) $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

c) $-x^5+15x^4-90x^3+270x^2-405x+243$

d) $16x^8+32x^6+24x^4+8x^2+1$

55. a) $\frac{(x+2)!}{x!\cdot 2!}=\frac{(x+2)\cdot(x+1)\cdot x!}{x!\cdot 2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$

b) $\frac{x!}{(x-3)!\cdot 3!}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)!}{(x-3)!\cdot 6}=$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$

c) $\frac{(x+2)!}{(x-2)!\cdot 4!}=\frac{(x+2)\cdot(x+1)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!\cdot 24}=$

$=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{12}x$

56. $\binom{x-1}{3}+\binom{x-1}{4}+\binom{x}{5}=\binom{11}{5}$

Aplicamos la propiedad: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

$\binom{x}{4}+\binom{x}{5}=\binom{11}{5}\Rightarrow\binom{x+1}{5}=\binom{11}{5}$

$x + 1 = 11 \Rightarrow x = 10$

57. a) $20 + 10 + 25 = 55$

b) $1 - 1 = 0$

c) $4 - 360 = -356$

d) $6^3+\binom{4}{2}=6^3+\frac{4!}{2!\cdot 2!}=222$

58.
- El segundo número de la fila siguiente es $1 + a$ y el tercer miembro es $a + b$.
- $1+a+b=92\Rightarrow a+b=91$; es decir, el tercer número de la fila siguiente es 91.
- $\left.\begin{array}{l} a+b=91 \\ \frac{b}{a}=6 \end{array}\right\}\Rightarrow b=6a\Rightarrow a+6a=91\Rightarrow 7a=91\Rightarrow a=13$

  Así, el segundo número de la fila siguiente es $1 + 13 = 14$.

59. Las configuraciones son las diferentes maneras de ordenar los 12 volúmenes.

$P_{12} = 12! = 479\,001\,600$

Hay 479 001 600 alineaciones posibles.

60. Al ser los cinco personajes distintos, importa el orden de colocación ya que se puede asociar el orden de selección al tipo de personaje. Importa el orden de los elementos y no pueden repetirse. Son variaciones ordinarias de 30 elementos tomados de 5 en 5. El número de posibilidades es de:

$V_{30,5} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 17\,100\,720$

61. Las configuraciones son ordenaciones de caras y cruces, de manera que importa el orden y pueden aparecer elementos repetidos.

$VR_{2,15} = 215 = 32\,768$

Son posibles 32 768 resultados.

— Si el número de resultados posibles fuese 1 024, tendríamos:

$VR_{2,x} = 2^x = 1\,024 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$

Tendríamos que lanzar la moneda 10 veces.

62. Las configuraciones son listas de 5 personas elegidas entre las 10, de manera que no importa el orden ni pueden aparecer personas repetidas.

$$C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{5!\ \cancel{5!}} =$$

$$= \frac{\cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{\cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 252$$

Son posibles 252 repartos.

63. a) Las configuraciones se forman al elegir 4 cifras entre las 6, de manera que importa el orden y no se pueden repetir.

$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Se pueden formar 360 números diferentes.

b) Tenemos que considerar los números de la forma 3 _ _ _.

$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Comienzan por 3 60 números.

c) Tenemos que considerar los números que acaban en 2, los que acaban en 4 y los que acaban en 6.

_ _ _ 2   _ _ _ 4   _ _ _ 6

$3 \cdot V_{5,3} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$

Son pares 180 números.

d) Los números que comienzan por 3, 4, 5 y 6 son mayores que 3 000.

3 _ _ _   4 _ _ _   5 _ _ _   6 _ _ _

$4 \cdot V_{5,3} = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240$

Son mayores que 3 000 240 números.

64. a) Las configuraciones son listas de 6 números, de manera que importa el orden de colocación y existe repetición de elementos.

$VR_{6,6} = 66 = 46\,656$

b) Consideramos los números que no tienen cifras repetidas.

$V_{6,6} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$VR_{6,6} - V_{6,6} = 46\,656 - 720 = 45\,936$

Tienen las cifras repetidas 45 936 números.

65. a) Importa el orden de colocación de los elementos, no intervienen todos los elementos en todas las configuraciones y no se pueden repetir los elementos. Se trata de variaciones ordinarias de 4 elementos tomados de 3 en 3:

$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

b) Hallamos la suma de la cifra de las unidades:

Dado que 24 dividido por 4 es 6, resulta que en 6 de los 24 números, la cifra de las unidades es 1, en otros 6 números es 3, en otros 6 números es 5 y en otros 6 números es 7. Por tanto:

$6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 9$**6**, la cifra de las unidades es 6

Hallamos la cifra de las decenas:

$6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 9 = 10$**5**, la cifra de las decenas es 5

Hallamos la cifra de las centenas:

$6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 10 = 10$**6**, la cifra de las centenas es 6

La suma de todos los números es 10 656.

66. En las distintas configuraciones no puede haber elementos repetidos y no importa el orden de colocación de éstos. Son combinaciones ordinarias de 8 elementos tomados de 4 en 4:

$$C_{8,4} = \frac{V_{8,4}}{P_4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = 70$$

67. No importa el orden de colocación de los elementos y no se pueden repetir los elementos. Se trata de combinaciones ordinarias.

El número de maneras posibles de elegir los problemas es: $C_{4,3} = \dfrac{V_{4,3}}{P_3} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4$

El número de maneras posibles de escoger las cuestiones es: $C_{5,4} = \dfrac{V_{5,4}}{P_4} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!} = 5$

El número de maneras posibles de elegir las preguntas de la prueba es: $C_{4,3} \cdot C_{5,4} = 4 \cdot 5 = 20$

68. Las configuraciones son listas de 7 fichas elegidas entre las 28, de manera que no importa el orden ni pueden aparecer repetidas.

$$C_{28,7} = \binom{28}{7} = \frac{28!}{7!\,(28-7)!} = \frac{28!}{7!\,21!} =$$

$$= \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot \cancel{21!}}{7!\ \cancel{21!}} =$$

$$= \frac{\cancel{28}\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{\cancel{7}\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1\,184\,040$$

Son posibles 1 184 040 elecciones.

—Los tres dobles se pueden ordenar:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!}$$

$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3!\ \cancel{4!}} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 35$$

Las fichas que no son dobles se pueden ordenar:

$$C_{21,4} = \binom{21}{4} = \frac{21!}{4!\,(21-4)!} = \frac{21!}{4!\,17!} =$$
$$= \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{4!\,\cancel{17!}} =$$
$$= 5\,985 \text{ maneras posibles}$$

Hay exactamente tres dobles en:

$C_{7,3} \cdot C_{21,4} = 35 \cdot 5985 = 209\,475$.

El número de elecciones que tienen exactamente tres dobles es 209 475.

69. a) Cada apuesta es una lista de 6 números, elegidos entre 49, de manera que no importa el orden ni pueden aparecer repetidos.

Las apuestas que incluyen los números 25 y 37 son:

$$C_{47,4} = \binom{47}{4} = \frac{47!}{4!\,(47-4)!} =$$
$$= \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot \cancel{43!}}{4!\,\cancel{43!}} =$$
$$= \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 178\,365$$

Los números 25 y 37 están incluidos en 178 365 apuestas.

b) Entre los 49 números hay 24 pares y 25 impares.

$$C_{25,6} = \binom{25}{6} = \frac{25!}{6!\,(25-6)!} = \frac{25!}{6!\,19!} =$$
$$= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \cancel{19!}}{6!\,\cancel{19!}} =$$
$$= \frac{25 \cdot \cancel{24} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 177\,100$$

No incluyen ningún número par 177 100 apuestas.

c) Dos pares ⇒ cuatro impares:

$$C_{24,2} \cdot C_{25,4} = \binom{24}{2} \cdot \binom{25}{4} =$$
$$= \frac{24!}{2!\,(24-2)!} \cdot \frac{25!}{4!\,(25-4)!} = \frac{24!}{2!\,22!} \cdot \frac{25!}{4!\,21!} =$$
$$= \frac{24 \cdot 23 \cdot \cancel{22!}}{2!\,\cancel{22!}} \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \cancel{21!}}{4!\,\cancel{21!}} =$$
$$= \frac{24 \cdot 23}{2 \cdot 1} \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,491\,400$$

Incluyen exactamente dos números pares 3 491 400 apuestas.

70. En las distintas configuraciones, parejas, no hay elementos repetidos y no importa el orden de colocación de sus miembros. Son combinaciones ordinarias de 16 elementos tomados de 2 en 2:

$$C_{16,2} = \frac{V_{16,2}}{P_2} = \frac{16 \cdot 15}{2!} = 120$$

71. a) Las configuraciones son listas de 5 cartas elegidas entre las 48, de manera que no importa el orden ni pueden aparecer repetidas.

$$C_{48,5} = \binom{48}{5} = \frac{48!}{5!\,(48-5)!} =$$
$$= \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot \cancel{43!}}{5!\,\cancel{43!}} =$$
$$= \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,712\,304$$

Son posibles 1 712 304 resultados.

b) Las 3 cartas de copas se pueden ordenar:

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\,9!} =$$
$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{3!\,\cancel{9!}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

Son posibles 220 maneras de ordenarlas:

Las 2 cartas de espadas se pueden ordenar:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{3!\,(12-2)!} = \frac{12!}{2!\,10!} =$$
$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2! \cdot \cancel{10!}} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

Son posibles 66 maneras de ordenarlas.

Hay 3 cartas de copas y 2 cartas de espadas en:

$C_{12,3} \cdot C_{12,2} = 220 \cdot 66 = 14\,520$ resultados

El número de resultados en los cuales hay exactamente 3 cartas de copas y 2 de espadas es de 14 520.

c) Las 2 cartas de oros se pueden ordenar:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{12!}{2!\,10!}$$
$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2! \cdot \cancel{10!}} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

Cada una de las cartas de los otros tres palos se puede ordenar:

$$C_{12,1} = \binom{12}{1} = 12$$

Hay 2 cartas de oros y una de cada uno de los otros tres palos en:

$C_{12,2} \cdot C_{12,1} \cdot C_{12,1} \cdot C_{12,1} = 114\,048$

El número de resultados en los cuales hay 2 cartas de oros y una de cada uno de los otros tres palos es 114 048.

72. Las plazas son iguales entre sí, con lo cual no importa el orden de colocación de los elementos en cada configuración. Y, por supuesto, los elementos son distintos entre sí. Son combinaciones ordinarias de 23 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{23,3} = \frac{V_{23,3}}{P_3} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3!} = 1771$$

73. En las distintas configuraciones no puede haber elementos repetidos e importa el orden de colocación de éstos. Son variaciones ordinarias de 7 elementos tomados de 3 en 3:

$V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

74. Si se numeran los dedos del 1 al 10, esta actividad equivale a escoger tres números distintos entre diez posibles valores, sin repetir ninguno. Importa el orden de elección de los 3 valores porque las sortijas son distintas entre sí. Son variaciones ordinarias de 10 elementos tomados de 3 en 3:

$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

75. a) Por el principio multiplicativo, el número de configuraciones distintas de 4 cifras es: 104. Cada una de ellas hay que multiplicarla por el número de configuraciones posibles de 3 consonantes. En el alfabeto castellano, si descartamos la «ll» y la «ch», hay 22 consonantes. Por tanto, el número de agrupaciones distintas de 3 consonantes es: 22^3. En consecuencia, el número de matrículas diferentes es de: $10^4 \cdot 22^3 = 106\,480\,000$

b) Hay 4! maneras distintas de ordenar los números de dicha matrícula. Y para cada una de ellas hay 3! configuraciones de letras distintas. Por tanto, hay $4! \cdot 3! =$ 144 matrículas con las mismas letras y números que la matrícula dada.

c) Si se fija la primera cifra en un 9, las 3 cifras restantes se escogen entre un total de 10 números. Esto es, hay $10^3 = 1000$ configuraciones numéricas distintas. Si, además, se fija la última letra, las 2 letras restantes se escogen entre un total de 22 consonantes. Por tanto, hay $22^2 = 484$ agrupaciones distintas de consonantes por cada configuración numérica. El total de matrículas que empiezan por 9 y terminan en C es de: $1\,000 \cdot 484 = 484\,000$

d) Hay 22 configuraciones con las 3 letras iguales. Cada una de ellas puede ir acompañada por las 104 configuraciones numéricas distintas. Por tanto, el total de matrículas con las 3 letras iguales es de:

$22 \cdot 10^4 = 220\,000$

76. Los 6 libros de matemáticas se pueden ordenar:

$P_6 = 6! = 720$ maneras posibles

Los 5 libros de física se pueden ordenar:

$P_5 = 5! = 120$ maneras posibles.

Los 4 libros de química se pueden ordenar:

$P_4 = 4! = 24$ maneras posibles.

Los 3 libros de biología se pueden ordenar:

$P_3 = 3! = 6$ maneras posibles.

Las 4 materias se pueden ordenar:

$P_4 = 4! = 24$ maneras posibles.

El número de posibilidades es:

$$P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_4 = 720 \cdot 120 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 24 = 298\,598\,400$$

Hay 298 598 400 maneras posibles.

77. Las cifras se escogen entre: {1, 3, 5, 7, 9}. Importa el orden de colocación de los elementos, los cuales pueden repetirse e intervienen todos. Son permutaciones ordinarias de 5 elementos: $P_5 = 5! = 120$

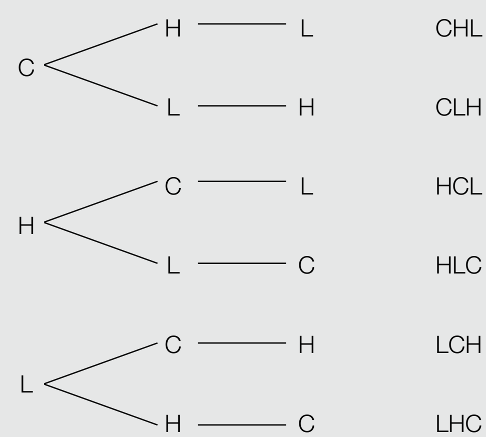
78. Importa el orden de colocación de los elementos, los cuales no pueden repetirse. No intervienen todos en cada configuración. Son variaciones ordinarias de 5 elementos tomados de 3 en 3, de las que hay que descartar las configuraciones que empiezan por cero, ya que serían números de dos cifras: $V_{5,3} - V_{4,2} = (5 \cdot 4 \cdot 3) = 48$

— Para hallar los mayores que 600 hay que considerar aquéllos cuya primera cifra es un 6 o un 8:

$2 \cdot V_{4,2} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

79. C - cocinar, H - hacer la compra y L - limpiar la casa.

Primer compañero	Segundo compañero	Tercer compañero	Configuración



Podemos hacer el reparto de 6 maneras diferentes.

80. Por el principio multiplicativo, hay $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ posibilidades de elección distintas.

81. Son configuraciones de elementos no repetidos sin que importe su orden:

$$C_{18,2} = \frac{V_{18,2}}{P_2} = \frac{18 \cdot 17}{2!} = 153$$

82. $$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3!\,\cancel{4!}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

83. La figurita más grande puede estar en uno de los dos extremos, con lo que la figurita más pequeña está en el extremo que queda libre. El resto de las figuritas se pueden ordenar de 6! maneras distintas. El total de opciones diferentes es de:

$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 1440$

84. $C_{5,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} =$

$$= \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 10 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 6 = 5400$$

— Si los comités tuvieran sólo 4 miembros, uno de cada delegación, por el principio multiplicativo, hay un total de comités distintos igual a:

$5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 480$

85. Importa el orden de colocación de los elementos y éstos pueden repetirse. Por tanto, se trata de variaciones con repetición: $VR_{2,11} = 2^{11} = 2\,048$.

86. Si la pieza G siempre es la última, tendremos en cuenta las 6 primeras piezas {A, B, C, D, E, F}.

Si B y C deben montarse seguidas, las consideraremos como una única pieza BC.

Nos quedan 5 piezas {A, BC, D, E y F}:

$P_5 = 5!\ 120$

De hecho, podemos tener BC en cualquier orden: primero B y luego C o primero C y luego B. Por tanto, existen 240 secuencias distintas de montar el motor.

87. a) Las configuraciones se forman al elegir cuatro cifras entre 1, 3, 5, 7 y 9, de manera que importa el orden y no se pueden repetir.

$V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Se pueden formar 120 números diferentes.

b) Comienzan por 1: 1 _ _ _ $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Comienzan por 3: 3 _ _ _ $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Comienzan por 5: 5 _ _ _ $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Comienzan por 713: 713 _ $V_{2,1} = 2$

En total hay 24 + 24 + 24 + 2 = 74 números.

El número que ocupa el puesto siguiente es 7 153.

El número que ocupa el puesto 75 de la lista es 7 153.

c) Comienzan por 1: 1 _ _ _ $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Comienzan por 3: 3 _ _ _ $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Comienzan por 51: 51 _ _ $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

Comienzan por 53: 53 _ _ $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

Comienzan por 571_ los números 5 713 y 5 719.

Hay 24 + 24 + 6 + 6 + 1 = 61 números menores que 5719.

El número 5 719 ocupa el puesto 62.

88. De las 15 casillas de la quiniela, en 6 de ellas escribimos un 1, con lo cual no hay posibilidad de elección en dichas casillas. De las 9 casillas restantes, en 5 de ellas dudamos entre un 1 o una *X*; es decir, hay 25 posibilidades distintas. Y para cada una de dichas posibilidades, en las 4 casillas que quedan hay 34 elecciones posibles, ya que en cada casilla se elige entre un 1, un 2 o una *X*. El total de quinielas distintas es de: 25 · 34 = 2 592.

89. a) Cada dos puntos determinan una recta.

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2!\ \cancel{5!}} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Determinan 21 rectas.

b) Cada tres puntos determinan un triángulo.

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3!\ \cancel{4!}} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 35$$

Determinan 35 triángulos.

90. No importa el orden ni pueden aparecer cartas repetidas. Se trata de combinaciones ordinarias.

Número de parejas de un número:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Número de parejas:

$6 \cdot 13 = 78$

Número de tríos de un número:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

Número de tríos:

$4 \cdot 13 = 52$

91. Importa el orden de colocación y las cifras no pueden repetirse. Se trata de permutaciones.

Números entre 10 000 y 19 999:

$P_4 = 4! = 24$

Números entre 30 000 y 31 999:

$P_3 = 3! = 6$

Números menores que 35 000:

$24 + 6 = 30$

Número total de números que podemos formar:

$P_5 = 5! = 120$

Números mayores que 35 000:

$120 - 30 = 90$

92. Importa el orden de colocación y las cifras pueden repetirse. Se trata de variaciones con repetición.

Números que acaban en 5:

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$

Números que acaban en 0:

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$

Números que empiezan por 0 y acaban en 5:

$VR_{6,2} = 6^2 = 36$

Números que empiezan por 0 y acaban en 0:

$VR_{6,2} = 6^2 = 36$

Múltiplos de 5:

$216 + 216 - 36 - 36 = 360$

93. Importa el orden de colocación y las cifras pueden repetirse. Se trata de variaciones con repetición.

Puesto que el número es par, puede terminar de cinco maneras diferentes (0, 2, 4, 6, 8).

Además, contiene un 7 y este ha de ocupar la posición de las decenas o centenas.

Números con 7 en las decenas:

$VR_{10,1} = 10$

Números con 7 en las centenas:

$VR_{10,1} = 10$

El 7 en las decenas y las centenas se ha contado dos veces:

$10 + 10 - 1 = 19$

Número mínimo de llamadas que ha de realizar:

$19 \cdot 5 = 95$

94. No importa el orden y no puede marcarse una misma respuesta más de una vez. Se trata de combinaciones ordinarias.

Maneras de contestar una pregunta marcando una respuesta:

$C_{3,1} = 3$

Maneras de contestarla marcando dos respuestas:

$C_{3,2} = 3$

Maneras de contestarla marcando las tres respuestas:

$C_{3,3} = 1$

Maneras de contestar una pregunta:

$3 + 3 + 1 = 7$

Como el examen tiene 10 preguntas, se puede contestar de 70 maneras diferentes.

95. No importa el orden y un mismo jugador no puede repetirse en un equipo. Se trata de combinaciones ordinarias.

En fútbol sala, cada equipo está formado por 5 jugadores. Como ya se han elegido los capitanes, tenemos 8 personas para repartir. El número de equipos que pueden formarse es:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

Cada uno de estos puede ir con uno de los capitanes; por tanto, pueden formarse 140 equipos diferentes.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

1. a) Pueden formarse $3 \cdot 15 \cdot 4 = 180$ helados.

b) $3 \cdot 15 = 45$ tipos de helado que llevan nueces.

c) Existen cuatro helados de cono con limón.

d) Podrían servirse $3 \cdot 12 \cdot 3 = 108$ tipos de helado en ese día.

e) Tenemos que $\frac{108}{180} = 0{,}6$. Por tanto, hubo una reducción del 40 % en la oferta.

2. a) Pueden formarse $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ códigos PIN.

b) $VR_{10,3} = 10^3 = 1\,000$ códigos PIN que terminan en 3.

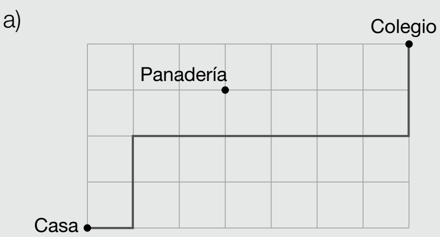
c) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ códigos PIN con las cifras pares y todas distintas.

d) $VR_{4,4} = 4^4 = 256$ códigos PIN en los que las cifras son números primos.

e) $5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 300$ posibilidades para el código PIN de la tarjeta de crédito de Pedro.

f) La primera y la cuarta cifra son iguales, así como la segunda y la tercera. Por ello, $10^2 = 100$ códigos capicúa distintos.

3. a)



b) Hay 11 segmentos recorridos en el total: 7 por el este y 4 por el norte. De estos 11, queremos determinar todos los caminos que tienen 4 veces el norte. Así, Santiago tiene $\binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$ caminos distintos para ir de su casa al centro educativo.

Nota: También se puede ser $\binom{11}{7}$, si se considera que de los 11 segmentos, siete son para el este.

c) Tenemos $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ caminos distintos de su casa a la panadería.

d) Tenemos $\binom{5}{1} = 5$ caminos distintos de la panadería al centro educativo.

e) De su casa al centro educativo, pasando por la panadería, Santiago tiene 84 + 5 = 89 caminos distintos.

4. a) 9! = 362 880 formas distintas

b) $V_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ formas distintas

c) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$ formas distintas

5. a) Es posible tener $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$ equipos diferentes.

b) $P_6 = 6! = 720$ posiciones distintas

c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ posiciones distintas en la zona de ataque

d) Las posiciones son:

5 4 3

6 1 2

e) No, no es posible. Tenemos 6 posiciones diferentes y en ninguna los jugadores 1 y 3 están en la misma columna.

13. Probabilidad

ACTIVIDADES

1. a) Experimento aleatorio simple.

b) Experimento determinista. Se trata de un experimento imposible de realizar.

c) Experimento determinista.

d) Experimento aleatorio compuesto.

e) Experimento aleatorio.

f) Experimento determinista.

2. Si llamamos *B* al suceso *salir bola blanca; N,* al suceso *salir bola negra; V,* al suceso *salir bola verde,* e indicamos las 2 extracciones mediante pares ordenados de estos sucesos. Entonces, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{(B,B),(N,N),(V,V),(B,N),(N,B),(B,V),(V,B),(N,V),(V,N)\}$$

3. Los dos primeros sucesos son elementales y los dos últimos compuestos, ya que en estos dos últimos casos están compuestos por más de un resultado del espacio muestral.

4. a) $A \cup B$: obtener un número par y un múltiplo de 3;

b) $B \cap C$: obtener un múltiplo de 3 que sea igual o mayor a 7 ;

c) $C - A$: obtener un número igual o mayor a 7 que no sea par;

d) $A - B$ = obtener un número par que no sea múltiplo de 3.

5. a) $\overline{B}$: sacar una carta que no sea figura

$A \cap \overline{B}$: sacar una copa que no sea figura.

b) $\overline{\overline{A}} = A$: sacar una copa

c) $A \cup B$: sacar una copa o una figura

d) $\overline{A}$: sacar una carta que no sea una copa

$\overline{B}$: sacar una carta que no sea figura

$\overline{A} \cap \overline{B}$: sacar una carta que no sea una copa ni una figura.

6. $\overline{A}$: extraer un número que no sea primo.

$\overline{B}$: extraer un número tal que la suma de sus cifras sea impar.

a) $A \cap \overline{B}$: extraer un número primo tal que la suma de sus cifras sea impar.

b) $\overline{A} \cap \overline{B}$: extraer un número que no sea primo y que la suma de sus cifras sea impar.

c) $\overline{A} \cup \overline{B}$: extraer un número que no sea primo o que la suma de sus cifras sea impar.

d) $A \cup B$: extraer un número que sea primo o tal que la suma de sus cifras sea par.

7.

Realizaciones del experimento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
25	13	0,52
50	27	0,54
75	36	0,48
100	49	0,49
125	62	0,496
150	66	0,44

8. a)

Suceso	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
{B}	307	0,51
{R}	171	0,29
{V}	72	0,12
{B}	50	0,08