MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 1. Números reales

Unidad 1. Números reales

SOLUCIONES PÁG. 21

1 Indica a qué conjunto o conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales):

0,344 4… | $\sqrt[5]{32}$ | $-\frac{3}{4}$
5,666… | $\sqrt[3]{-8}$ | $\sqrt{144}$
1,01001… | **4,56**
–8 287 | $\sqrt{2}$
1 829 | $\sqrt[3]{15}$

Naturales: 1 829; $\sqrt[5]{32}=2$; $\sqrt{144}=12$
Enteros: 1 829; $\sqrt[5]{32}=2$; $\sqrt[3]{-8}=-2$; –8 287; $\sqrt{144}=12$
Racionales: 0,344 4…; 1 829; 5,666…; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[3]{-8}=-2$; $-\frac{3}{4}$; –8 287; 4,56; $\sqrt{144}$
Irracionales: $\sqrt{2}=1{,}474\ 213\ 6...$; $\sqrt[3]{15}=2{,}466\ 212\ 1...$; 1,010 01…
Reales: todos los números.

2 Halla las siguientes distancias entre números reales, escribiendo los números decimales en forma de fracción si fuera necesario:

a. 4,6 y $\frac{2}{5}$

$$d\left(4{,}6\ ;\frac{2}{5}\right)=d(4{,}6\ ;0{,}4)=|4{,}6-0{,}4|=4{,}2$$

b. $3{,}\widehat{4}$ y 5,5

$$d\left(3{,}\widehat{4}\ ;5{,}5\right)=d\left(\frac{31}{9}\ ;\ \frac{55}{10}\right)=\left|\frac{55}{10}-\frac{31}{9}\right|=\left|\frac{55\cdot 9-31\cdot 10}{90}\right|=\left|2{,}0\widehat{5}\right|\approx 2{,}06$$

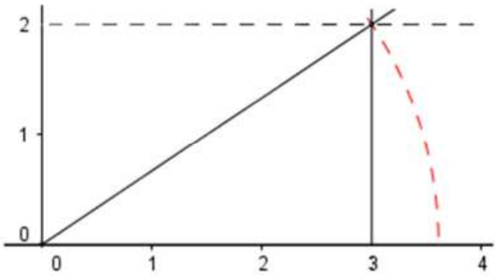
c. $-\frac{7}{10}$ y $0{,}2\widehat{3}$

$$d\left(-\frac{7}{10}\ ;0{,}2\widehat{3}\right)=d\left(-\frac{7}{10}\ ;\frac{23-2}{90}\right)=d\left(-\frac{7}{10}\ ;\frac{21}{90}\right)=\left|\frac{63}{90}+\frac{21}{90}\right|=\left|\frac{84}{90}\right|=0{,}9\widehat{3}$$

3 Representa y ordena los siguientes números reales en la recta real:
Se debe tener en cuenta que para representar raíces en una recta:
1.º Se expresa la raíz como suma de cuadrados.
2.º Se construye un rectángulo cuyos lados tengan el valor de los cuadrados hallados en el paso anterior, y se traza la diagonal.
3.º La diagonal del rectángulo coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los cuadrados ya conocidos.
4.º Con el compás se traza un arco de circunferencia hasta cortar la recta con centro en el punto 0 y con el radio del valor de la hipotenusa calculada en el paso anterior.

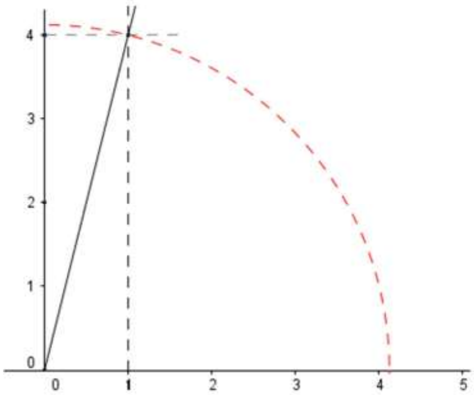
a. $\sqrt{13}$

$$\sqrt{13}=\sqrt{9+4}=\sqrt{3^2+2^2}$$



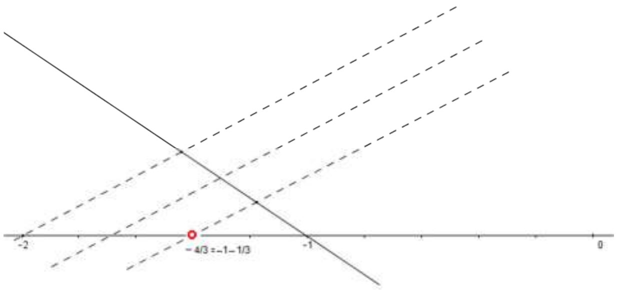
b. $\sqrt{17}$

$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2+1^2}$



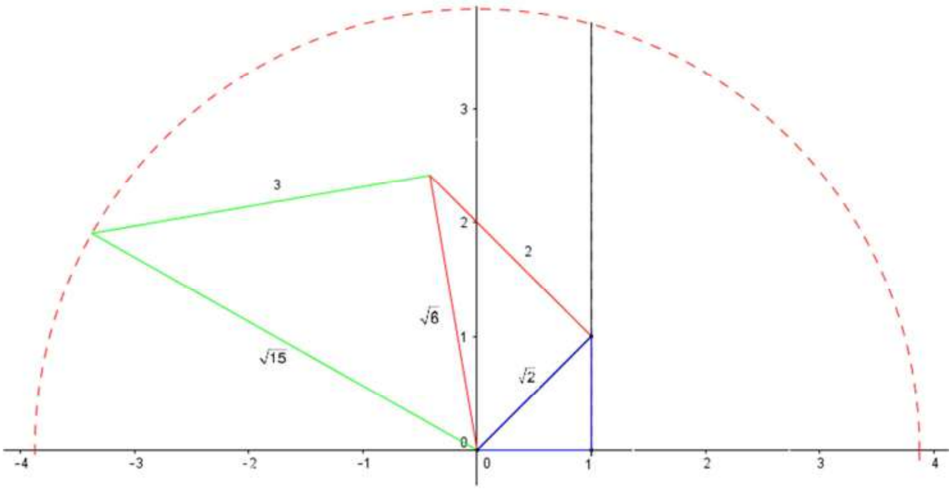
c. $-\frac{4}{3}$

Con origen en –1, se traza una semirrecta. Sobre ella se construyen tres segmentos iguales y consecutivos. El último punto de la semirrecta se une con el punto –2 y se trazan rectas paralelas en cada uno de los puntos de la semirrecta.



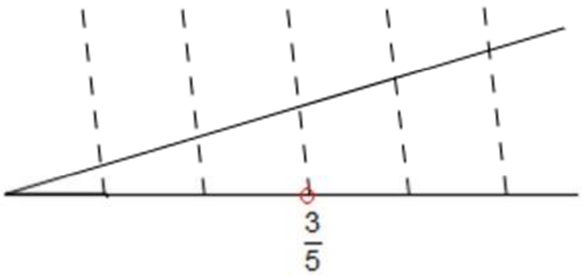
d. $\sqrt{15}$

$\sqrt{15} = \sqrt{9+(\sqrt{6})^2} = \sqrt{3^2+\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}} = \sqrt{3^2+\sqrt{2^2+(\sqrt{1^2+1^2})^2}}$



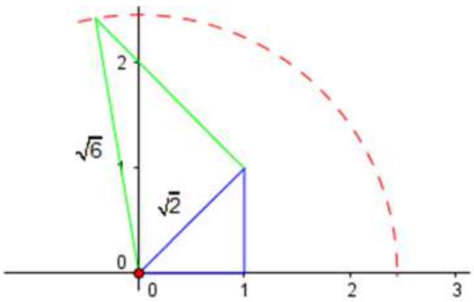
e. $\mathbf{\frac{3}{5}}$

Con origen en 0, se traza una semirrecta. Sobre ella se construyen cinco segmentos iguales y consecutivos. El último punto de la semirrecta se une con el punto 1 y se trazan rectas paralelas en cada uno de los puntos de la semirrecta.



f. $\mathbf{\sqrt{6}}$

$$\sqrt{6} = \sqrt{4+2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{1^2+1^2})^2}$$



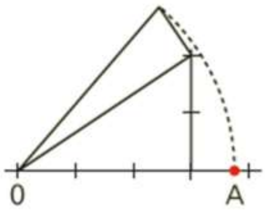
Ordenados en la recta real:

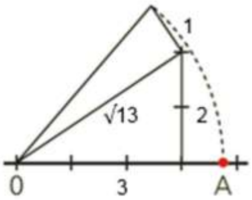
$$-\frac{4}{3} < \frac{3}{5} < \sqrt{6} < \sqrt{13} < \sqrt{15} < \sqrt{17}$$

4 Indica qué números reales están representados en las siguientes rectas:

Se halla el valor de los catetos e hipotenusa de los dos triángulos, siendo la hipotenusa el valor que coincide con el del radio de la circunferencia trazada del número real solicitado:

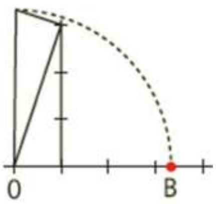
a.

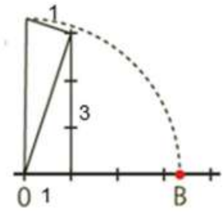




$$A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3^2 + 2^2})^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{13}^2} = \sqrt{14}$$

b.





$$B = \sqrt{1^2 + (\sqrt{1^2 + 3^2})^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{10}^2} = \sqrt{11}$$

5 Entre los números irracionales aparece el número áureo o número de oro, Φ. Dicho número está presente tanto en la naturaleza como en diversas situaciones de la vida real. Investigad en grupos las aplicaciones en las que aparece el número áureo y realizad una presentación.

Respuesta abierta.

6 Recorta una tira de papel. Mide con una regla su longitud. Une los extremos de dicha tira de papel formando un círculo y mide su diámetro. Realiza la división entre la longitud de la tira y el diámetro del círculo formado por ella. ¿Qué número resulta? ¿De qué número irracional se trata?

Al dividir el valor de la longitud de la circunferencia entre el diámetro se está realizando el cálculo:

$$\frac{\text{longitud}}{\text{diámetro}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

Luego la división da el número π.

7 **Dibujad en una hoja de papel varias líneas paralelas y equidistantes. Coged un palillo cuya longitud coincida con la distancia entre las líneas. Dejad caer el palillo sobre la hoja de papel y anotad el número de tiradas y el número de veces que la aguja corta a una línea. Cuantas más veces tiremos el palillo, más se aproximará al número π el cociente del doble del número de tiradas entre el número de veces que el palillo corta a una línea.**

$$\frac{2 \cdot \text{n.º de tiradas}}{\text{n.º de veces que el palillo corta a una línea}} \approx \pi$$

Copiad y completad la siguiente tabla en vuestro cuaderno con los datos de vuestro experimento:

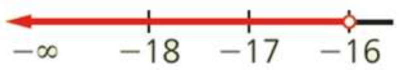
Tiradas	10	20	50	100	200
Veces que corta la línea					
Valor aproximado de π					

Respuesta abierta. Tienen que observar que cuantas más tiradas se realicen, más se aproximan al valor de π.

SOLUCIONES PÁG. 23

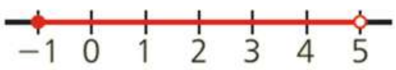
8 **Expresa las siguientes representaciones en la recta real como intervalos y como desigualdades:**

a.



(– ∞ , –16); {*x* ∈ ℝ/ *x* < –16}

b.



[–1 , 5); {*x* ∈ ℝ/ –1 ≤ *x* < 5}

c.

[–19 , –16]; {*x* ∈ ℝ/ –19 ≤ *x* ≤ –16}

d.

[–23 , + ∞); {*x* ∈ ℝ/ –23 ≤ *x*}

e.

(–60 , –56); {*x* ∈ ℝ/ –60 < *x* < –56}

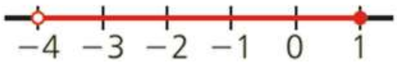
f.

(–∞ , 10]; {*x* ∈ ℝ/ *x* ≤ 10}

g.

(18 , +∞); {*x* ∈ ℝ/ *x* > 18}

h.



(–4 , 1]; {*x* ∈ ℝ/ –4 < *x* ≤ 1}

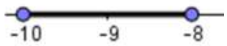
9 **Representa los siguientes intervalos sobre la recta real y exprésalos como desigualdades:**

a. [–2 , 4]

{*x* ∈ ℝ/ –2 ≤ *x* ≤ 4}

b. [–10 , –8]

{*x* ∈ ℝ/ –10 ≤ *x* ≤ –8}



c. (–1 , +∞)

{*x* ∈ ℝ/ –1 < *x*}

d. [5 , +∞)

{*x* ∈ ℝ/ *x* ≥ 5}

e. (3 , 5)

{*x* ∈ ℝ/ 3 < *x* < 5}

f. (–5 , –1]

{*x* ∈ ℝ/ –5 < *x* ≤ –1}

g. (–∞, –6]

{*x* ∈ ℝ/ *x* ≤ –6}

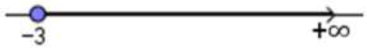
h. (–∞ , 9)

{*x* ∈ ℝ/ *x* < 9}

10 Representa estas desigualdades en la recta real y exprésalas en forma de intervalo:

a. {$x \in \mathbb{R}$ / $x \geq -3$}

[–3 , + ∞)

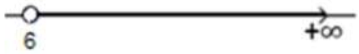


b. {$x \in \mathbb{R}$ / $x < 12$}

(–∞ , 12)

c. {$x \in \mathbb{R}$ / $x > 6$}

(6 , +∞)



d. {$x \in \mathbb{R}$ / $x \leq -9$}

(–∞ , –9]

e. {$x \in \mathbb{R}$ / $5 < x < 7$}

(5 , 7)

f. {$x \in \mathbb{R}$ / $-5 < x \leq 0$}

(–5 , 0]

g. {$x \in \mathbb{R}$ / $-37 \leq x < -33$}

[–37 , –33)

h. {$x \in \mathbb{R}$ / $-24 \leq x \leq -20$}

[–24 , –20]

11 Resuelve las siguientes operaciones con intervalos:

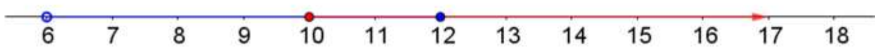
a. [–5 , 6) ∪ (4 , 8)

{$x \in \mathbb{R}$ / $-5 \leq x < 8$} ⇒ [–5 , 8)

b. (–∞ , 4] ∩ (–3 , 9]

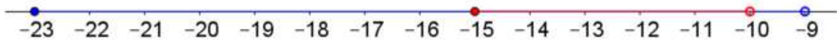
{$x \in \mathbb{R}$ / $-3 < x \leq 4$} ⇒ (–3 , 4]

c. (6 , 12] ∪ [10 , +∞)



{$x \in \mathbb{R}$ / $6 < x < +\infty$} ⇒ (6 , +∞)

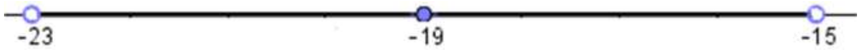
d. [–23 , –9) ∩ [–15 , –10)



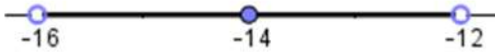
$\{x \in \mathbb{R} \,/\, -15 \leq x < -10\} \Rightarrow [-15 , -10)$

12 Representa en la recta real los entornos y entornos reducidos propuestos y exprésalos como intervalos.

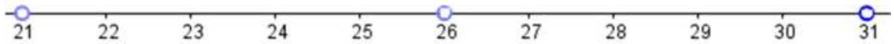
a. E(–19 , 4) = (–19 – 4 , –19 + 4) = (–23 , –15)



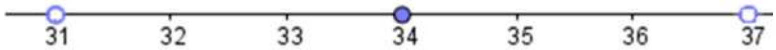
b. E(–14 , 2) = (–14 –2 , –14 + 2) = (–16 , –12)



c. E*(26 , 5) = (26 – 5 , 26) ∪ (26 , 26 + 5) = (21 , 26) ∪ (26 , 31)

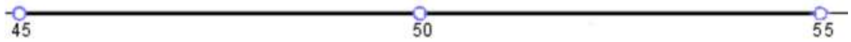


d. E(34 , 3) = (34 –3 , 34 + 3) = (31 , 37)



e. E*(3 , 6) = (3 – 6 , 3) ∪ (3, 3 + 6) = (–3 , 3) ∪ (3 , 9)

f. E*(50 , 5) = (50 – 5 , 50) ∪ (50, 50 + 5) = (45 , 50) ∪ (50 , 55)

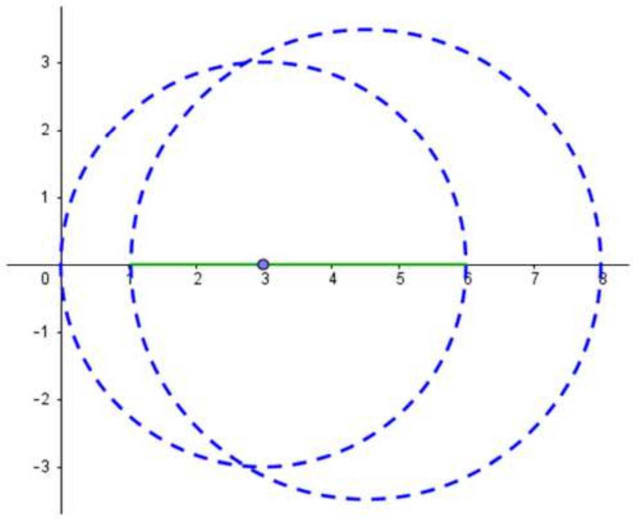


13 Averigua el centro y el radio del entorno E(a , r) = (–4 , 8).

$$E(a , r) = (a - r , a + r) = (-4 , 8) \Rightarrow \left.\begin{matrix} a - r = -4 \\ a + r = 8 \end{matrix}\right\} a = 2; r = 6 \Rightarrow E\,(2 , 6)$$

14 Calcula el radio, *r*, del entorno E(3 , *r*), teniendo en cuenta que E(3 , r) ∩ [1 , 8] = [1 , 6).

E(3, r) ∩ [1 , 8] = (3 – r , 3 + r) ∩ [1 , 8] = [1 , 6) ⟹ 3 + r = 6; r = 3

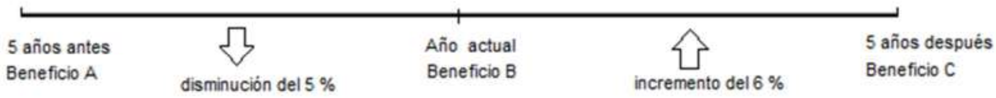


SOLUCIONES PÁG. 25

15 El beneficio de una empresa ha disminuido un 5 % con respecto al beneficio de hace 5 años. Se prevé que, en los siguientes 5 años, este beneficio aumente a los 3 millones de euros, es decir, que se produzca un 6 % de aumento sobre el beneficio actual.

a. ¿Qué beneficio se obtuvo hace 5 años?

Se plantean cuáles son los beneficios de cada año, sus aumentos y sus disminuciones porcentuales:



- El beneficio del año actual, B, es el de hace 5 años, A, con una disminución del 5 %.
- El beneficio de dentro de 5 años, C, es de 3 000 000 €, e iguala al del año actual, B, con un aumento del 6 %:

$$B = A \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

$$C = B \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 3\ 000\ 000\ € \Rightarrow B = \frac{3\ 000\ 000}{1{,}06} = 2\ 830\ 188{,}68\ €$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\ 830\ 188{,}68}{0{,}95} = 2\ 979\ 145{,}98\ €$$

Hace 5 años los beneficios, *A*, eran de 2 979 145,98 €.

b. ¿Y ahora?

Ahora hay beneficios, *B*, de 2 830 188,68 €.

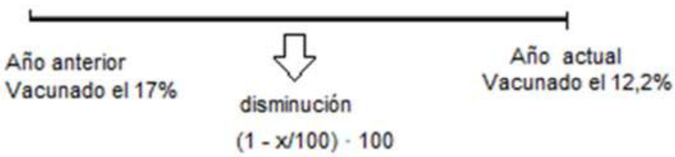
16 En el pueblo de Miguel se han vacunado en lo que va de año 560 de las 4 600 personas que lo habitan.

a. ¿Qué porcentaje representan las personas que no se han vacunado?

$$\left(1 - \frac{560}{4\,600}\right) \cdot 100 = 87{,}8\%$$

No se han vacunado el 87,8 %.

b. Si el año pasado por las mismas fechas se habían vacunado 780 personas, ¿cuánto ha disminuido el porcentaje de personas vacunadas respecto al año anterior?



Se calcula el porcentaje de vacunados el año anterior, A.

$$A = \frac{780}{4600} \cdot 100 = 16{,}9\% \approx 17\%$$

Se calcula el porcentaje de vacunados este año, que es B = 100 – 87,8 = 12,2 %.

Se establece la relación de disminución entre los dos porcentajes:

$$B = A \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \Rightarrow 12,2 = 17 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \Rightarrow x = 28,2\%$$

El porcentaje de disminución es de 28,2 %

17 Un artículo se pone a la venta por 34,50 €. Si dicho precio tenía aplicado un 21 % de IVA y el vendedor quería obtener el 10 % de beneficios, ¿cuál era el precio inicial del artículo?

En primer lugar se calcula cuál es el precio antes de aplicar el porcentaje de aumento del 21 % de IVA:

$$P = P'(\text{sin IVA}) \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right) \Rightarrow P' = \frac{P}{1,21} = \frac{34,5}{1,21} = 28,51\ €$$

Después se calcula el precio inicial, antes de aplicar el porcentaje de aumento de beneficio para el vendedor:

$$P' = P_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \Rightarrow P_{\text{inicial}} = \frac{P'}{1,10} = \frac{28,51}{1,10} = 25,92\ €$$

El precio inicial de artículo era de 25,92 €.

18 Inés pide un crédito de 18 000 € para comprarse un coche. Si tiene que devolver dicho dinero en 36 meses con un interés simple del 7 %, ¿cuánto tendrá que pagar cada mes?

Se plantea la expresión del capital final que presta el banco con un interés simple en meses:

$$C_F = C_I \left(1 + \frac{r \cdot t}{100 \cdot 12}\right) = 18\,000 \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot 36}{1200}\right) = 21780\ €$$

Es decir, tendría que pagar $\frac{21780}{36} = 605\ €\ \text{al mes}$.

19 Halla el capital final y los intereses obtenidos al depositar 3 650 € en una entidad bancaria con estas condiciones:

a. Durante 3 años con un interés del 4,5 % compuesto anual.

Se plantea la ecuación del interés compuesto, con C_I = 3 650 €, r = 4,5 % y t = 3 años:

$$C_T = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 3\ 650 \cdot \left(1 + \frac{4,5}{100}\right)^3 = 4\ 165,26\ €$$

Los intereses se calculan restando al capital final el capital inicial:

I = C_F – C_I = 4 165,26 – 3 650 = 515,26 €.

Es decir, el capital final sería de 4 165,26 € y los intereses serían de 515,26 €.

b. Durante 4 años con un interés del 3,5 % simple anual y luego 2 años con un interés del 4,2 % compuesto anual.

En primer lugar, se plantea la ecuación del capital final con un interés simple en 4 años del 3,5 %:

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r \cdot t}{100}\right) = 3650 \cdot \left(1 + \frac{3{,}5 \cdot 4}{100}\right) = 4161\ €$$

$I = C_F - C_I = 4\,161 - 3\,650 = 511$ €.

En segundo lugar, se plantea la ecuación del interés compuesto, con $C_I = 4\,161$ €, r = 4,2 % y t = 2 años:

$$C_T = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 4161 \cdot \left(1 + \frac{4{,}2}{100}\right)^2 = 4\ 517{,}86\ €$$

$I = C_F - C_I = 4\,517{,}86 - 4\,161 = 356{,}86$ €.

Los primeros cuatro años el interés sería de 511 € y el capital final de 4 161 €. En los dos años siguientes el capital final sería de 4 517,86 €, y los intereses de 356,86 €. Los intereses totales han sido de 511 + 356,86 = 867,86 €.

20 Para que un interés simple anual proporcione idénticos intereses que el mismo interés pero compuesto, ¿durante cuántos años habría que dejar depositado el capital en el banco?

Se comparan las ecuaciones del interés simple y del compuesto:

$\left(\frac{C_I \cdot r}{100}\right)^t = \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100}$, se cumple si t = 1.

Para que los intereses sean los mismos, el valor debe ser t = 1, ya que si t > 1 los intereses serían mayores en el interés compuesto que en el interés simple.

21 Calcula los intereses y el capital final obtenidos tras depositar 2 600 € al 5 % simple anual durante:

a. 3 años.

$$I = \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100} = \frac{2600 \cdot 5 \cdot 3}{100} = 390\ €$$

$C_F = C_I + I = 2600 + 390 = 2\,990$ €.

b. 18 meses.

$$I = \frac{C_I \cdot r \cdot t}{100 \cdot 12} = \frac{2600 \cdot 5 \cdot 18}{100 \cdot 12} = 195\ €$$

$C_F = C_I + I = 2\,600 + 195 = 2\,795$ €.

c. 270 días.

$$I = \frac{C_I \cdot r \cdot 270}{100 \cdot 360} = \frac{2600 \cdot 5 \cdot 270}{100 \cdot 360} = 97{,}5\ €$$

$C_F = C_I + I = 2\,600 + 97{,}5 = 2\,697{,}5$ €.

22 Andrea tiene 5 000 € ahorrados y quiere depositarlos en un banco para que le generen intereses. Tiene dos ofertas de sendos bancos:

- **Oferta 1: el primer banco le ofrece un interés simple anual del 4 %.**
- **Oferta 2: el segundo banco le ofrece un interés compuesto anual del 3,5 %.**

a. Si quiere liquidar el dinero a los 2 años, ¿cuál de las dos ofertas le saldrá más rentable?

Se debe calcular el capital final que se obtiene con cada oferta:

Oferta 1: $C_F = C_I\left(1+\frac{r\cdot t}{100}\right) = 5000\cdot\left(1+\frac{4\cdot 2}{100}\right) = 5\,400$ €

Oferta 2: $C_T = C_I\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 5000\cdot\left(1+\frac{3{,}5}{100}\right)^2 = 5356{,}13$ €

Es más rentable la oferta 1.

b. ¿A partir de qué año le resultará la otra oferta más rentable? (Haz una tabla con 3 años, 4 años… para hallarlo).

Se debe calcular el capital final de cada año, según las expresiones de capital con interés simple o compuesto:

$C_F = 5000\cdot\left(1+\frac{4\cdot t}{100}\right)$, donde t = 2, 3, 4, 5 …es decir, el año en que se calcula el capital.

$C_T = 5\,000\cdot\left(1+\frac{3{,}5}{100}\right)^t$, donde t = 2, 3, 4, 5… es decir, el año en que se calcula el capital.

Años	Oferta 1	Oferta 2
2	5 400	5 356,13
3	5 600	5 543,59
4	5 800	5 737,62
5	6 000	5 938,43
6	6 200	6 146,28
7	6 400	6 361,40
8	6 600	6 584,05
9	6 800	6 814,49

Es más rentable a partir del octavo año la 2.ª oferta.

23 Determina el tiempo durante el cual se han depositado 5 000 € en cierta entidad bancaria a un 6,5 % de interés simple anual si el dinero liquidado asciende a 5 650 €.

Se toma la expresión del capital total con interés simple anual:

$C_F = C_I\cdot\left(1+\frac{r\cdot t}{100}\right)$, donde C_I = 5 000 €, r = 6,5 % y C_F= 5 650 €, y se despeja el tiempo, t:

$$t = \frac{\left(100\cdot\frac{C_F}{C_I}\right)-100}{r} = \frac{\left(100\cdot\frac{5650}{5000}\right)-100}{6{,}5} = 2$$

Durante dos años.

24 Halla el capital que se ha depositado en un banco durante 2 años a un interés del 3 % compuesto anual si al final ha resultado un capital de 4 550 €. ¿Y si en lugar de un interés compuesto fuera un interés simple?

- En el caso de que se haya depositado a un interés compuesto, el capital inicial se halla de este modo:

  $C_T = C_I \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow C_I = C_T \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^{-t}$, donde C_T = 4 550 €, r = 3 %, t = 2, es decir, $C_I = C_T \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^{-t} = 4\ 550 \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)^{-2} = 4\ 288{,}81$ €

- En el caso de que se haya depositado a un interés simple:

  $C_I = \dfrac{C_F}{\left(1+\frac{r \cdot t}{100}\right)}$ donde C_F = 4 550 €, r = 3 % y t = 2 años, es decir,

  $C_I = \dfrac{4\ 550}{\left(1+\frac{3 \cdot 2}{100}\right)} = 4\ 292{,}45$ €

SOLUCIONES PÁG. 27

25 Escribe los siguientes números en notación científica:

- **a. 45 000 000** = $4{,}5 \cdot 10^{7}$
- **b. $0{,}003 \cdot 10^{-8}$** = $3 \cdot 10^{-11}$
- **c. 0,000 042** = $4{,}2 \cdot 10^{-5}$
- **d. $92\ 000 \cdot 10^{-6}$** = $9{,}2 \cdot 10^{-2}$
- **e. $89\ 928 \cdot 10^{4}$** = $8{,}992\ 8 \cdot 10^{8}$
- **f. $0{,}003\ 5 \cdot 10^{6}$** = $3{,}5 \cdot 10^{3}$

26 Expresa los siguientes números, escritos en notación científica, en notación decimal:

- **a. $4{,}561 \cdot 10^{8}$** = 456 100 000
- **b. $7{,}222 \cdot 10^{-6}$** = 0,000 007 222
- **c. $1{,}098\ 562 \cdot 10^{12}$** = 1 098 562 000 000
- **d. $2{,}28 \cdot 10^{-12}$** = 0,000 000 000 002 28
- **e. $9{,}284 \cdot 10^{9}$** = 9 284 000 000
- **f. $5{,}01 \cdot 10^{-9}$** = 0,000 000 005 01

27 Busca en Internet estas medidas de forma aproximada y escríbelas en notación científica. Realiza una comparación entre las medidas que aparecen en cada uno de los apartados.

a. Masa de la Tierra, del Sol y de la Luna, en kilogramos.

$m_T = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, $m_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg, $m_L = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg.
La masa de la Tierra es aproximadamente 81 veces la de la Luna y la del Sol es unas 333 mil veces la de la Tierra.

b. Distancia media del Sol a Mercurio, a la Tierra y a Júpiter, en kilómetros.
$d_{S\text{-}M} = 5{,}791 \cdot 10^{7}$ km, $d_{S\text{-}T} = 1{,}496 \cdot 10^{8}$ km, $d_{S\text{-}J} = 7{,}783 \cdot 10^{8}$ km.
La distancia media de la Tierra al Sol es aproximadamente 2,6 veces la de Mercurio, y la de Júpiter es aproximadamente 5,2 veces la de la Tierra.

c. Masa de un electrón, de un protón y de un neutrón, en kilogramos.
$m_e = 9{,}31 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 1{,}672\ 6 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1{,}674\ 9 \cdot 10^{-27}$ kg.
La masa del protón es unas 1 800 veces mayor que la del electrón y la del neutrón es aproximadamente 1,001 veces mayor que la del protón.

d. Tamaño de un espermatozoide y de un óvulo (diámetro), en metros.
$t_e = 5{,}7 \cdot 10^{-7}$ m, $t_o = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ m.
Un óvulo es aproximadamente 246 veces mayor que un espermatozoide.

e. Velocidad del sonido y velocidad de la luz, en metros por segundo.
$v_s = 3{,}4 \cdot 10^{2}$ m/s, $v_l = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.
La velocidad de la luz es aproximadamente 882 000 veces mayor que la del sonido.

f. Unidad astronómica, años luz y pársec, en kilómetros.
UA = $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km, año luz = $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km, pársec = $3{,}1 \cdot 10^{13}$ km.
El año luz es unas 63 000 veces mayor que la unidad astronómica y el pársec es unas 3,3 veces mayor que el año luz.

28 Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones, expresando el resultado en notación científica:

a. $(7{,}28 \cdot 10^{83}) \cdot (6{,}2 \cdot 10^{-57}) = 4{,}513\ 6 \cdot 10^{27}$

b. $(1{,}985 \cdot 10^{72}) \cdot (9{,}92 \cdot 10^{7}) = 1{,}969\ 12 \cdot 10^{80}$

c. $(6{,}98 \cdot 10^{-13}) : (2{,}5 \cdot 10^{-17}) = 2{,}792 \cdot 10^{4}$

d. $(9{,}27 \cdot 10^{34}) : (1{,}8 \cdot 10^{65}) = 5{,}15 \cdot 10^{-31}$

29 Efectuad las sumas y restas propuestas, expresando el resultado en notación científica; tú realízalas en un orden de magnitud y tu compañero en el otro, y comprobad al final que el resultado coincide.

a. $6{,}76 \cdot 10^{12} + 7{,}28 \cdot 10^{13} = 7{,}956 \cdot 10^{13}$

b. $4{,}562 \cdot 10^{-34} - 5{,}72 \cdot 10^{-33} = -5{,}263\ 8 \cdot 10^{-33}$

c. $8{,}92 \cdot 10^{-25} + 2{,}4 \cdot 10^{-28} = 8{,}922\ 4 \cdot 10^{-25}$

d. $6{,}56 \cdot 10^{56} + 5{,}753 \cdot 10^{55} = 7{,}135\ 3 \cdot 10^{56}$

30 Calcula el valor de las siguientes operaciones combinadas, expresando el resultado en notación científica:

a. $(5{,}1 \cdot 10^{4} + 7{,}2 \cdot 10^{3})^{2} = 3{,}387\ 24 \cdot 10^{9}$

b. $\dfrac{9{,}3 \cdot 10^{-6} + 8{,}1 \cdot 10^{-7}}{1{,}2 \cdot 10^{-4} - 1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 9{,}6 \cdot 10^{-2}$

c. $\dfrac{3{,}8 \cdot 10^{7}}{1{,}6 \cdot 10^{4}} \cdot \dfrac{7{,}02 \cdot 10^{-6}}{1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 1{,}39 \cdot 10^{3}$

SOLUCIONES PÁG. 29

31 Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla, efectuando las aproximaciones por redondeo que se indican:

	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
$\sqrt{2}$	1	1,4	1,41	1,414
π	3	3,1	3,14	3,142
$2,\widehat{6}$	2	2,7	2,67	2,667
34,182	34	34,2	34,18	34,182

32 Halla los errores absoluto y relativo al tomar 2,6 como aproximación de $\frac{8}{3}$.

Mientras, tu compañero realizará la misma actividad, pero tomando 2,7 como aproximación. Comparad los resultados obtenidos.

- En la aproximación a 2,6 el $E_a = 2,\widehat{6} - 2,6 = 0,0\widehat{6}$ y $E_r = \dfrac{0,0\widehat{6}}{2,\widehat{6}} = 2,5\ \%$.
- En la aproximación a 2,7 el $E_a = 2,7 - 2,\widehat{6} = 0,0\widehat{3}$ y $E_r = \dfrac{0,0\widehat{3}}{2,\widehat{6}} = 1,25\ \%$

Se comete menos error con la aproximación a 2,7.

33 Se tienen dos balanzas con una precisión de 0,01 g. Las masas que indican dichas balanzas de un mismo objeto son 34,56 g y 34,58 g, respectivamente. Calcula el error relativo cometido en cada una de las dos balanzas.

Balanza 1: $E_r = \dfrac{0,01}{34,56} = 0,03\%$; balanza 2: $E_r = \dfrac{0,01}{34,58} = 0,03\%$

El error relativo cometido en las dos balanzas es el mismo.

34 Las aproximaciones realizadas mediante truncamiento ¿son por defecto o por exceso? ¿Y las realizadas por redondeo? Justifica tu respuesta e ilústrala con ejemplos.

Como en el truncamiento eliminamos las cifras decimales a partir de un orden dado, el número aproximado por este método siempre va a ser menor o igual que el valor original, con lo que la aproximación realizada por truncamiento siempre será por defecto.

Sin embargo, en una aproximación por redondeo, como dependiendo de la primera cifra eliminada sumamos o no una unidad a la cifra del orden a aproximar, si se realiza dicha suma, la aproximación será por exceso, y si no se realiza, será por defecto (como el truncamiento).

Por ejemplo:

- Por Truncamiento: $4,56 \approx 4,5 < 4,56 \rightarrow$ Por defecto siempre.
- Por redondeo: $4,56 \approx 4,6 > 4,56$ Exceso
  $4,52 \approx 4,5 < 4,52$ Defecto

35 Actividad resuelta.

36 Realiza las siguientes operaciones como la actividad anterior, con una aproximación de tres cifras decimales:

a. $\sqrt{7}-3\sqrt{2}+4,\widehat{5}$

	$\sqrt{7}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4,\widehat{5}$	$\sqrt{7}-3\sqrt{2}+4,\widehat{5}$
Exceso	2,646	1,415	4,245	4,556	2,557
Defecto	2,645	1,414	4,242	4,555	2,958
Redondeo	2,646	1,414	4,242	4,556	2,960

b. $-2\cdot(78,9\widehat{4}-56,8\widehat{96})$

	$78,9\widehat{4}$	$56,8\widehat{96}$	$78,9\widehat{4}-56,8\widehat{96}$	$-2\cdot(78,9\widehat{4}-56,8\widehat{96})$
Exceso	78,945	56,897	22,048	–44,096
Defecto	78,944	56,896	22,048	– 44,096
Redondeo	78,944	56,897	22,047	– 44,094

37 Se quiere medir el largo de una habitación y para ello se toman cuatro medidas: 4,535 m; 4,540 m; 4,537 m y 4,538 m. Calcula el valor real de la medición (considera la media de las medidas tomadas), y obtén los valores absolutos y relativos de cada una de las medidas.

- Se calcula la media de las medidas tomadas:

$$x=\frac{4,535+4,540+4,537+4,538}{4}=4,5375\text{ m}$$

- Se calcula el error absoluto de cada medida como $E_a = |A - A'|$, donde A es el valor real y A' el aproximado.
- Se calcula el error relativo de cada medida como $E_r=\frac{E_a}{A}$.

Considerando como valor real del largo de la habitación de 4,537 m, los errores son:

Medida	E_a	E_r
4,535	0,002 5	0,000 6
4,540	0,002 5	0,000 6
4,537	0,000 5	0,000 1
4,538	0,000 5	0,000 1

SOLUCIONES PÁG. 31

38 Indica, sin resolverlos, cuántas raíces tienen los siguientes radicales y de qué signo:

a. $\sqrt[4]{\mathbf{564}}$ $\rightarrow$ Como *n* es par y *a* es positivo, hay dos raíces reales opuestas.

b. $\sqrt[5]{\mathbf{-750}}$ $\rightarrow$ Como *n* es impar, hay una sola raíz del mismo signo que el radicando.

c. $\sqrt{\mathbf{-428}}$ $\rightarrow$ Como *n* es par y *a* es negativo, no existe ninguna raíz real.

d. $\sqrt[15]{\mathbf{322}}$ $\rightarrow$ Como *n* es impar, hay una sola raíz del mismo signo que el radicando.

39 Escribe los siguientes radicales en forma de potencia y simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a. $\sqrt[9]{\mathbf{5^4}} = 5^{\frac{4}{9}}$

b. $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\mathbf{3^2}}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{5}}} = 3^{-\frac{2}{5}}$

c. $\sqrt[7]{\mathbf{11^3}} = 11^{\frac{3}{7}}$

d. $\sqrt[5]{\mathbf{9^2}} = \sqrt[5]{(3^2)^2} = 3^{2\cdot 2\cdot\frac{1}{5}} = 3^{\frac{4}{5}}$

e. $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[11]{\mathbf{12^4}}} = \frac{1}{12^{\frac{4}{11}}} = 12^{-\frac{4}{11}}$

f. $\frac{\mathbf{2}}{\sqrt[5]{\mathbf{2^3}}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{5}}} = 2\cdot 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{1-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{5}}$

g. $\mathbf{3^2}\sqrt{\mathbf{3^3}} = 3^2\cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{2+\frac{3}{2}} = 3^{\frac{7}{2}}$

h. $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$

i. $\sqrt[12]{\boldsymbol{x}^{\mathbf{9}}} = x^{\frac{9}{12}} = x^{\frac{3}{4}}$

j. $\mathbf{7}\sqrt[3]{\mathbf{7^2}} = 7\cdot 7^{\frac{2}{3}} = 7^{1+\frac{2}{3}} = 7^{\frac{5}{3}}$

k. $\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}} = \frac{x^4}{x^{\frac{2}{3}}} = x^4\cdot x^{-\frac{2}{3}} = x^{4-\frac{2}{3}} = x^{\frac{10}{3}}$

l. $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[10]{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}}} = x^2\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{10}}} = x^2\cdot x^{-\frac{5}{10}} = x^{\frac{3}{2}}$

40 Escribe estas potencias de exponente fraccionario en forma de radical:

a. $\mathbf{6^{\frac{2}{7}}} = \sqrt[7]{6^2}$

b. $\mathbf{22^{-\frac{4}{5}}} = \sqrt[5]{22^{-4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{22^4}}$

c. $\mathbf{17^{\frac{3}{8}}} = \sqrt[8]{17^3}$

d. $\mathbf{15^{\frac{6}{11}}} = \sqrt[11]{15^6}$

e. $\mathbf{17^{-\frac{9}{21}}} = 17^{-\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{17^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[7]{17^3}}$

f. $\mathbf{25^{-\frac{1}{9}}} = \sqrt[9]{25^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[9]{25}} = \frac{1}{\sqrt[9]{5^2}}$

g. $\boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}} = \sqrt[3]{x^2}$

h. $\boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}} = \sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^{5+2}} = \sqrt[5]{x^7}$

i. $\boldsymbol{x}^{-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}} = \sqrt[13]{x^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[13]{x^3}}$

j. $\boldsymbol{x}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

k. $\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}} = x^{3-\frac{3}{4}} = x^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{x^9}$

l. $\boldsymbol{x}^{\mathbf{-7}}\boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}}} = x^{-7+\frac{6}{4}} = x^{-\frac{19}{3}} = \sqrt[3]{x^{-19}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^{19}}}$

41 Calcula las raíces exactas propuestas, expresándolas previamente en forma de potencias de exponente fraccionario como en el ejemplo:

$$\mathbf{\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2}$$

a. $\sqrt[4]{\mathbf{625}} = 625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$

b. $\sqrt[5]{\mathbf{243}} = 243^{\frac{1}{5}} = (3^5)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{5}{5}} = 3^1 = 3$

c. $\sqrt{\mathbf{676}} = 676^{\frac{1}{2}} = (2^2 \cdot 13^2)^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 13)^{\frac{2}{2}} = (2 \cdot 13)^1 = 2 \cdot 13 = 26$

d. $\sqrt[3]{\mathbf{512}} = 512^{\frac{1}{3}} = (2^9)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$

e. $\sqrt{\mathbf{49^3}} = 49^{\frac{3}{2}} = (7^2)^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{6}{2}} = 7^3 = 343$

f. $\sqrt[3]{\mathbf{27^2}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

g. $\sqrt[6]{\mathbf{4096}} = 4096^{\frac{1}{6}} = (2^{12})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2 = 4$

h. $\sqrt[3]{\mathbf{1331^2}} = 1331^{\frac{2}{3}} = (11^3)^{\frac{2}{3}} = 11^{\frac{6}{3}} = 11^2 = 121$

i. $\sqrt[3]{\mathbf{12^6}} = 12^{\frac{6}{3}} = 12^2 = 144$

j. $\sqrt[5]{\mathbf{1024}} = 1024^{\frac{1}{5}} = (2^{10})^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$

k. $\sqrt[4]{\mathbf{6561}} = 6561^{\frac{1}{4}} = (3^8)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

l. $\sqrt[6]{\mathbf{361^3}} = 361^{\frac{3}{6}} = 361^{\frac{1}{2}} = \sqrt{361} = \sqrt{19^2} = 19$

m. $\sqrt[4]{\mathbf{9^2}} = 9^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

n. $\sqrt{\boldsymbol{x^6}} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$

ñ. $\sqrt[3]{\boldsymbol{x^{21}}} = x^{\frac{21}{3}} = x^7$

o. $\sqrt[4]{\boldsymbol{x^{12}y^8}} = \left(x^{12}y^8\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{12}{4}}y^{\frac{8}{4}} = x^3y^2$

42 Efectúa las siguientes operaciones con radicales de radicales o potencias de radicales:

a. $\left(\sqrt[3]{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{4}} = 9^{\frac{4}{3}} = (3^2)^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{2\cdot 4}{3}} = 3^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{3^8}$

b. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{\mathbf{12^3}}}} = \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{12^{\frac{3}{2}}}}\right) = \left(\sqrt[4]{\left(12^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\right) = \left(\sqrt[4]{12^{\frac{3}{2\cdot 3}}}\right) = \left(\sqrt[4]{12^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{12}$

c. $\left(\sqrt[9]{\mathbf{125^2}}\right)^{\mathbf{3}} = \left(125^{\frac{2}{9}}\right)^3 = 125^{\frac{2\cdot 3}{9}} = 125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

d. $\left(\sqrt[6]{\mathbf{27^2}}\right)^{\mathbf{3}} = \left(\sqrt[6]{27^2}\right)^3 = \left(27^{\frac{2}{6}}\right)^3 = 27^{\frac{2\cdot 3}{6}} = 27^{\frac{6}{6}} = 27$

e. $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{\mathbf{144}}}}$

$= \left(\sqrt[5]{\sqrt{(12)^{2\cdot\frac{1}{3}}}}\right) = \left(\sqrt[5]{\sqrt{12^{\frac{2}{3}}}}\right) = \left(\sqrt[5]{12^{\frac{2}{3\cdot 2}}}\right) = \left(\sqrt[5]{12^{\frac{1}{3}}}\right) = \left(12^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 12^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{12}$

f. $\sqrt[5]{\sqrt{\mathbf{81^2}}} = \sqrt[5]{\sqrt{(3^4)^2}} = \sqrt[5]{3^{\frac{4\cdot 2}{2}}} = \sqrt[5]{3^4}$

g. $\left(\sqrt[10]{\mathbf{32^2}}\right)^{\mathbf{3}} = \left(\sqrt[10]{(2^5)^2}\right)^3 = \left(2^{\frac{10}{10}}\right)^3 = 2^3 = 8$

h. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{27^8}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{(3^3)^8}} = \sqrt[3]{3^{\frac{24}{4}}} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

i. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\mathbf{225}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3^2\cdot 5^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3\cdot 5}} = \sqrt[3]{15^{\frac{1}{3}}} = \left(15^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 15^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{15}$

SOLUCIONES PÁG. 32

43 Expresa los siguientes radicales como potencias de exponente fraccionario e indica cuáles son equivalentes entre sí:

a. $\sqrt[3]{\mathbf{5^9}} = 5^{\frac{9}{3}} = 5^3$

b. $\sqrt[6]{\mathbf{2^9}} = 2^{\frac{9}{6}} = 2^{\frac{3}{2}}$

c. $\sqrt[4]{\mathbf{64}} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$

d. $\sqrt[6]{\mathbf{4}} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$

e. $\sqrt[3]{\mathbf{2}} = 2^{\frac{1}{3}}$

f. $\sqrt{\mathbf{125}} = \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$

g. $\sqrt{\mathbf{8}} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$

h. $\sqrt[15]{\mathbf{32}} = \sqrt[15]{2^5} = 2^{\frac{5}{15}} = 2^{\frac{1}{3}}$

Son equivalentes entre sí:

$\sqrt[6]{2^9} = \sqrt[4]{64} = \sqrt{8}$ y $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{32}$

44 Simplifica estos radicales:

a. $\sqrt[35]{\mathbf{17^5}}=17^{\frac{5}{35}}=17^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{17}$

b. $\sqrt[27]{\mathbf{-3^{18}}}=-3^{\frac{18}{27}}=-3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{-3^2}$

c. $\sqrt[18]{\boldsymbol{x^9y^3}}=x^{\frac{9}{18}}y^{\frac{3}{18}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}=\left(x^3y\right)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{x^3y}$

d. $\sqrt[15]{\boldsymbol{x^{10}y^{25}z^5}}=x^{\frac{10}{15}}y^{\frac{25}{15}}z^{\frac{5}{15}}=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}z^{\frac{1}{3}}=\left(x^2y^5z\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2y^5z}$

45 Introduce los factores en los radicales.

a. $\mathbf{2\cdot 3\sqrt{3}}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 27}=\sqrt{108}$

b. $\mathbf{3\boldsymbol{x}\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{(3x)^4\cdot 5}=\sqrt[4]{81x^4\cdot 5}=\sqrt[4]{405x^4}$

c. $\mathbf{4\boldsymbol{x}\sqrt[3]{2\boldsymbol{x}}}=\sqrt[3]{(4x)^3\cdot 2x}=\sqrt[3]{64x^3\cdot 2x}=\sqrt[3]{128x^3\cdot x}=\sqrt[3]{128x^4}$

d. $\mathbf{5\boldsymbol{xy}\sqrt{3\boldsymbol{x}}}=\sqrt{(5xy)^2\cdot 3x}=\sqrt{25x^2y^2\cdot 3x}=\sqrt{75x^3y^2}$

SOLUCIONES PÁG. 33

46 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales, simplificando si es necesario:

a. $\sqrt[3]{\mathbf{2592}}=\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}=2\cdot 3\sqrt[3]{2^2\cdot 3}=6\sqrt[3]{12}$

b. $\sqrt{\mathbf{1323}}=\sqrt{3^3\cdot 7^2}=3\cdot 7\sqrt{3}=21\sqrt{3}$

c. $\sqrt[4]{\mathbf{19440}}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^5\cdot 5}=2\cdot 3\sqrt[4]{3\cdot 5}=6\sqrt[4]{15}$

d. $\sqrt{\mathbf{23040}}=\sqrt{2^9\cdot 3^2\cdot 5}=2^4\cdot 3\sqrt{2\cdot 5}=48\sqrt{10}$

e. $\sqrt[4]{\mathbf{85683}}=\sqrt[4]{3\cdot 13^4}=13\sqrt[4]{3}$

f. $\sqrt{\dfrac{\mathbf{9375}}{\mathbf{27436}}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot 5^5}{2^2\cdot 19^3}}=\dfrac{5^2}{2\cdot 19}\sqrt{\dfrac{3\cdot 5}{19}}=\dfrac{25}{38}\sqrt{\dfrac{15}{19}}$

g. $\sqrt[5]{\mathbf{31104}}=\sqrt[5]{2^7\cdot 3^5}=2\cdot 3\sqrt[5]{2^2}=6\sqrt[5]{4}$

h. $\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{13\,720}}{\mathbf{1331}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^3\cdot 5\cdot 7^3}{11^3}}=\dfrac{2\cdot 7}{11}\sqrt[3]{5}=\dfrac{14}{11}\sqrt[3]{5}$

47 Extrae de estos radicales todos los factores posibles:

a. $\sqrt{\dfrac{2^{23}\cdot 3^{10}}{5^{17}}} = \dfrac{2^{11}\cdot 3^{5}}{5^{8}}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

b. $\sqrt[6]{\dfrac{5^{34}\cdot 2^{2}}{7^{24}}} = \dfrac{5^{5}}{7^{4}}\sqrt[6]{5^{4}\cdot 2^{2}} = \dfrac{5^{5}}{7^{4}}\sqrt[3]{5^{2}\cdot 2}$

c. $\sqrt[7]{\dfrac{12^{58}\cdot 10^{2}}{15^{35}}} = \dfrac{12^{8}}{15^{5}}\sqrt[7]{12^{2}\cdot 10^{2}} = \dfrac{12^{8}}{15^{5}}\sqrt[7]{\left(2^{2}\cdot 3\right)^{2}\cdot\left(2\cdot 5\right)^{2}} = \dfrac{12^{8}}{15^{5}}\sqrt[7]{2^{6}\cdot 3^{2}\cdot 5^{2}}$

d. $\sqrt[3]{\dfrac{27^{12}\cdot 6^{5}}{14^{4}\cdot 28^{3}}} = \sqrt[3]{\dfrac{\left(3^{3}\right)^{12}\cdot\left(2\cdot 3\right)^{5}}{\left(2\cdot 7\right)^{4}\cdot\left(2^{2}\cdot 7\right)^{3}}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^{41}\cdot 2^{5}}{2^{10}\cdot 7^{7}}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^{41}}{2^{5}\cdot 7^{7}}} = \dfrac{3^{13}}{2\cdot 7^{2}}\sqrt[3]{\dfrac{3^{2}}{2^{2}\cdot 7}}$

e. $\sqrt[4]{\dfrac{50^{8}\cdot 60^{7}}{100^{6}}} =$

$= \sqrt[4]{\dfrac{\left(2\cdot 5^{2}\right)^{8}\cdot\left(2^{2}\cdot 3\cdot 5\right)^{7}}{\left(2^{2}\cdot 5^{2}\right)^{6}}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^{22}\cdot 3^{7}\cdot 5^{23}}{2^{12}\cdot 5^{12}}} = \sqrt[4]{2^{10}\cdot 3^{7}\cdot 5^{11}} = 2^{2}\cdot 3\cdot 5^{2}\sqrt[4]{2^{2}\cdot 3^{3}\cdot 5^{3}}$

f. $\sqrt[5]{\dfrac{a^{46}}{b^{60}\cdot c^{24}}} = \dfrac{a^{9}}{b^{12}\cdot c^{4}}\sqrt[5]{\dfrac{a}{c^{4}}}$

g. $\sqrt{\dfrac{a^{17}\cdot b^{14}}{c^{11}}} = \dfrac{a^{8}\cdot b^{7}}{c^{5}}\sqrt{\dfrac{a}{c}}$

h. $\sqrt[9]{\dfrac{a^{30}\cdot b^{24}}{c^{9}\cdot d^{78}}} = \dfrac{a^{3}\cdot b^{2}}{c\cdot d^{8}}\sqrt[9]{\dfrac{a^{3}\cdot b^{6}}{d^{6}}} = \dfrac{a^{3}\cdot b^{2}}{c\cdot d^{8}}\sqrt[3]{\dfrac{a\cdot b^{2}}{d^{2}}}$

i. $\sqrt[3]{\dfrac{a^{5}\cdot b}{c^{4}}} = \dfrac{a}{c}\sqrt[3]{\dfrac{a^{2}\cdot b}{c}}$

48 Copia las siguientes extracciones de factores en tu cuaderno y sustituye las letras por números para que sean correctas:

a. $\sqrt[3]{2^{\boxed{A}}\cdot\boxed{B}^{3}\cdot 7^{\boxed{C}}} = 70\sqrt[3]{98}$

$$\sqrt[3]{2^{\boxed{A}}\cdot\boxed{B}^{3}\cdot 7^{\boxed{C}}} = 2\cdot 5\cdot 7\sqrt[3]{2\cdot 7^{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{2^{\boxed{A}}\cdot\boxed{B}^{3}\cdot 7^{\boxed{C}}} = \sqrt[3]{2^{4}\cdot 5^{3}\cdot 7^{5}} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 5 \\ C = 5 \end{cases}$$

b. $\sqrt[\boxed{A}]{a^{7}\cdot c^{12}} = a^{\boxed{B}}\cdot c^{3}\sqrt[\boxed{C}]{a^{3}}$

$$\sqrt[\boxed{4}]{a^{7}\cdot c^{12}} = a^{\boxed{1}}\cdot c^{3}\sqrt[\boxed{4}]{a^{3}} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 1 \\ C = 4 \end{cases}$$

c. $\sqrt{\dfrac{\mathbf{3^8\cdot 4^{\boxed{A}}}}{\mathbf{10^{\boxed{B}}}}} = \dfrac{\mathbf{3^4}}{\mathbf{5^4}}\sqrt{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3^4}{5^4}\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{\dfrac{3^8\cdot 2}{5^9}} \\ \sqrt{\dfrac{3^8\cdot 4^A}{10^B}} = \sqrt{\dfrac{3^8\cdot\left(2^2\right)^A}{\left(2\cdot 5\right)^B}} = \sqrt{\dfrac{3^8\cdot 2^{2A}}{2^y\cdot 5^B}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A-B=1 \\ B=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=5 \\ B=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{3^8\cdot 4^{\boxed{5}}}{10^{\boxed{9}}}}$$

d. $\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{a^{\boxed{A}}\cdot b^{\boxed{B}}}}{\mathbf{c^{\boxed{C}}\cdot d^9}}} = \dfrac{\mathbf{a\cdot b^2}}{\mathbf{d^{\boxed{D}}}}\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{a^2\cdot b}}{\mathbf{c^2}}}$

$$\dfrac{a\cdot b^2}{d^{\boxed{D}}}\sqrt[3]{\dfrac{a^2\cdot b}{c^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^5\cdot b^7}{d^9\cdot c^2}} \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{a^{\boxed{A}}\cdot b^{\boxed{B}}}{c^{\boxed{C}}\cdot d^9}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^5\cdot b^7}{d^9\cdot c^2}} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=7 \\ C=2 \\ D=3 \end{cases}$$

49 En la siguiente operación de extracción de factores se ha cometido un error. Identifícalo y corrígelo.

$$\mathbf{\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4\cdot 5^2} = 2^3\cdot 3^3\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 5^2}}$$

El error cometido es que al extraer los factores de la raíz no se ha eliminado el exponente 3.

SOLUCIONES PÁG. 35

50 Indica cuáles de los factores propuestos son semejantes. Para ello, extrae factores y/o simplifica resultados. Si no son semejantes, cámbialos para que sí lo sean.

a. $\mathbf{\sqrt[3]{2},\ 5\sqrt[6]{4},\ 2\sqrt[3]{2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{2} \\ 5\sqrt[6]{4} = 5\sqrt[6]{2^2} = 5\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2} \end{array}\right\}$$

Los tres factores son semejantes o equivalentes porque su radical es el mismo.

b. $\mathbf{-8\sqrt[4]{25},\ -3\sqrt{5},\ 2\sqrt[7]{125}}$

$$\left.\begin{array}{l} -8\sqrt[4]{25} = -8\sqrt[4]{5^2} = -8\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5} \\ 2\sqrt[7]{125} = 2\sqrt[7]{5^3} \end{array}\right\}$$

La única que no es semejante es $2\sqrt[7]{5^3}$, si el índice de la raíz fuera 2, sí sería semejante: $2\sqrt{5^3} = 10\sqrt{5}$

c. $\mathbf{6\sqrt{18}, -3\sqrt{2}, -2\sqrt[4]{324}}$

$$\left.\begin{array}{l} 6\sqrt{18} = 6\sqrt{2\cdot 3^2} = 6\cdot 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \\ -2\sqrt[4]{324} = -2\sqrt[4]{2^2\cdot 3^4} = -2\cdot 3\sqrt[4]{2^2} = -6\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Luego son semejantes.

d. $\mathbf{-10\sqrt[5]{3}, -45\sqrt[5]{96}, 2\sqrt[10]{9}}$

$$\left.\begin{array}{l} -10\sqrt[5]{3} \\ -45\sqrt[5]{96} = -45\sqrt[5]{2^5\cdot 3} = -45\cdot 2\sqrt[5]{3} = -90\sqrt[5]{3} \\ 2\sqrt[10]{9} = 2\sqrt[10]{3^2} = 2\sqrt[5]{3} \end{array}\right\}$$

Luego los tres factores son semejantes.

51 Efectúa estas sumas y restas con radicales:

a. $\mathbf{4\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{6}} = 5\sqrt[3]{6}$

b. $\mathbf{\left(\sqrt{12} - 3\sqrt{12}\right) - \left(-5\sqrt{12}\right)} = -2\sqrt{12} + 5\sqrt{12} = 3\sqrt{12}$

c. $\mathbf{\sqrt[5]{x} - 4\sqrt[5]{x} - \left(7\sqrt[5]{x} - 8\sqrt[5]{x}\right)} = -3\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x} = -2\sqrt[5]{x}$

d. $\mathbf{\sqrt[4]{xy^2} - 2\sqrt[4]{xy^2} - 7\sqrt[4]{xy^2}} = -8\sqrt[4]{xy^2}$

52 Calcula las siguientes sumas y restas con radicales, buscando los que sean semejantes:

a. $\mathbf{5\sqrt[3]{2\,000} - 6\sqrt[3]{686} + 2\sqrt[3]{432}} =$

$= 5\sqrt[3]{2^4\cdot 5^3} - 6\sqrt[3]{2\cdot 7^3} + 2\sqrt[3]{2^4\cdot 3^3} = 5\cdot 2\cdot 5\sqrt[3]{2} - 6\cdot 7\sqrt[3]{2} + 2\cdot 2\cdot 3\sqrt[3]{2} =$

$= 50\sqrt[3]{2} - 42\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{2} = 20\sqrt[3]{2}$

b. $\mathbf{3\sqrt[3]{375} - 4\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{1029}} =$

$= 3\sqrt[3]{3\cdot 5^3} - 4\sqrt[3]{3^4} + 5\sqrt[3]{3\cdot 7^3} = 3\cdot 5\sqrt[3]{3} - 4\cdot 3\sqrt[3]{3} + 5\cdot 7\sqrt[3]{3} =$

$= 15\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} + 35\sqrt[3]{3} = 38\sqrt[3]{3}$

c. $\mathbf{6\sqrt{20} + 3\sqrt{405} - 2\sqrt{125}} =$

$6\sqrt{2^2\cdot 5} + 3\sqrt{3^4\cdot 5} - 2\sqrt{5^3} = 6\cdot 2\sqrt{5} + 3\cdot 3^2\sqrt{5} - 2\cdot 5\sqrt{5} =$

$= 12\sqrt{5} + 27\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 29\sqrt{5}$

d. $\mathbf{-6\sqrt{2\,016} - 5\sqrt{1400}}$

$-6\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 7} - 5\sqrt{2^3\cdot 5^2\cdot 7} = -6\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{2\cdot 7} - 5\cdot 2\cdot 5\sqrt{2\cdot 7} =$

$= -72\sqrt{14} - 50\sqrt{14} = -122\sqrt{14}$

53 Reduce los siguientes radicales a índice común:

a. $\sqrt[3]{14}, \sqrt[6]{18}, \sqrt[4]{21}$

Se calcula el m.c.m. de los índices de los radicales, con el fin de obtener el radical equivalente.

$$\text{m.c.m. } (3, 6, 4) = 12 \begin{cases} \sqrt[3]{14} = \sqrt[12]{14^4} \\ \sqrt[6]{18} = \sqrt[12]{18^2} \\ \sqrt[4]{21} = \sqrt[12]{21^3} \end{cases}$$

b. $\sqrt[5]{70}, -\sqrt[3]{45}, \sqrt{15}$

Se calcula el m.c.m. de los índices de los radicales, con el fin de obtener el radical equivalente.

$$\text{m.c.m. } (5, 3, 2) = 30 \begin{cases} \sqrt[5]{70} = \sqrt[30]{70^6} \\ -\sqrt[3]{45} = -\sqrt[30]{45^{10}} \\ \sqrt{15} = \sqrt[30]{15^{15}} \end{cases}$$

c. $\dfrac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a^3b^2c}}, \sqrt[5]{ab^5}, \sqrt[3]{\dfrac{b^5}{c^2}}$

Se calcula el m.c.m. de los índices de los radicales, con el fin de obtener el radical equivalente.

$$\text{m.c.m. } (2, 3, 4, 5) = 60 \begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a^3b^2c}} = \sqrt[60]{\dfrac{\left(b^3\right)^{15}}{\left(a^3b^2c\right)^{30}}} = \sqrt[60]{\dfrac{b^{45}}{a^{90}b^{60}c^{30}}} \\ \sqrt[5]{ab^5} = \sqrt[60]{\left(ab^5\right)^{12}} = \sqrt[60]{a^{12}b^{60}} \\ \sqrt[3]{\dfrac{b^5}{c^2}} = \sqrt[60]{\left(\dfrac{b^5}{c^2}\right)^{20}} = \sqrt[60]{\dfrac{b^{100}}{c^{40}}} \end{cases}$$

d. $\sqrt[5]{\dfrac{a^2}{b^3c^4}}, \dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[6]{b^3}}, \sqrt[10]{c^4}$

Se calcula el m.c.m. de los índices de los radicales, con el fin de obtener el radical equivalente.

$$\text{m.c.m. } (5, 6, 10) = 30 \begin{cases} \sqrt[5]{\dfrac{a^2}{b^3c^4}} = \sqrt[30]{\left(\dfrac{a^2}{b^3c^4}\right)^6} = \sqrt[30]{\dfrac{a^{12}}{b^{18}c^{24}}} \\ \dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[6]{b^3}} = \sqrt[30]{\dfrac{a^6}{\left(b^3\right)^5}} = \sqrt[30]{\dfrac{a^6}{b^{15}}} \\ \sqrt[10]{c^4} = \sqrt[30]{\left(c^4\right)^3} = \sqrt[30]{c^{12}} \end{cases}$$

54 Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones con radicales:

a. $\mathbf{3\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}} = 3\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{27} = 3\sqrt{2^3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3} = 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} =$

$= 6\sqrt{2}\cdot 6\left(\sqrt{3}\right)^2 = 36\cdot 3\sqrt{2} = 108\sqrt{2}$

b. $\dfrac{\mathbf{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt{125}}}{\mathbf{\sqrt[6]{50}}} = \dfrac{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt{125}}{\sqrt[6]{50}} = \dfrac{\sqrt[3]{2\cdot 5}\cdot\sqrt{5^3}}{\sqrt[6]{2\cdot 5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5\sqrt{5}}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{2}\cdot 5\sqrt{5} =$

$= 5\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{5} = 5\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{5^3} = 5\sqrt[6]{250}$

c. $\mathbf{\sqrt[4]{12}\cdot 4\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[5]{8}} = \sqrt[4]{2^2\cdot 3}\cdot 4\sqrt[3]{2\cdot 5}\cdot\sqrt[5]{2^3} = 4\sqrt[60]{\left(2^2\cdot 3\right)^{15}\cdot\left(2\cdot 5\right)^{20}\cdot\left(2^3\right)^{12}} =$

$= 4\sqrt[60]{2^{30}\cdot 3^{15}\cdot 2^{20}\cdot 5^{20}\cdot 2^{36}} = 4\sqrt[60]{2^{30+20+36}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}} =$

$= 4\sqrt[60]{2^{86}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}} = 4\sqrt[60]{2^{60+26}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}} = 4\cdot 2\sqrt[60]{2^{26}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}} =$

$= 8\sqrt[60]{2^{26}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}}$

d. $\dfrac{\mathbf{\sqrt[6]{36}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{4}}}{\mathbf{\sqrt[3]{45}\cdot\sqrt{18}}} = \dfrac{\sqrt[6]{6^2}\cdot\sqrt{2\cdot 5^2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2\cdot 5}\cdot\sqrt{3^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\dfrac{6\cdot 2^2}{3^2\cdot 5}}\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot 5^2}{3^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 2\cdot 2^2}{3^2\cdot 5}}\cdot\dfrac{5}{3} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{3\cdot 5}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3\cdot 5^3}{5\cdot 3^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3\cdot 5^2}{3^4}}$

55 Efectúa estas operaciones combinadas en las que aparecen radicales:

a. $\mathbf{\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{432}\right)} =$

$= \left(\sqrt{2^2\cdot 5}-\sqrt{3^2\cdot 5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2\cdot 5^3}-\sqrt[3]{2^4\cdot 3^3}\right) = \left(2\sqrt{5}-3\sqrt{5}\right)\cdot\left(5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2}\right) =$

$= -\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[6]{5^3\cdot 2^2} = \sqrt[6]{500}$

b. $\dfrac{\mathbf{\sqrt[3]{2160}-\sqrt[3]{1250}+\sqrt{6400}}}{\mathbf{\left(\sqrt[5]{4}\right)^3}} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{2^4\cdot 3^3\cdot 5}-\sqrt[3]{2\cdot 5^4}+\sqrt{2^8\cdot 5^2}}{\left(\sqrt[5]{2^2}\right)^3} = \dfrac{2\cdot 3\sqrt[3]{2\cdot 5}-5\sqrt[3]{2\cdot 5}+2^4\cdot 5}{\sqrt[5]{2^6}} =$

$= \dfrac{6\sqrt[3]{10}-5\sqrt[3]{10}+2^4\cdot 5}{\sqrt[5]{2^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{10}+80}{2\sqrt[5]{2}}$

c. $\dfrac{\mathbf{\sqrt[3]{1125}\cdot\sqrt[4]{243}}}{\mathbf{\sqrt{675}}} + \mathbf{\sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{27}}}} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{5^3\cdot 3^2}\cdot\sqrt[4]{3^5}}{\sqrt{3^3\cdot 5^2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{3^3}}} = \dfrac{5\sqrt[3]{3^2}\cdot 3\sqrt[4]{3}}{3\cdot 5\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt{3\cdot 3\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^2}\cdot 3\sqrt[4]{3}}{3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{3\sqrt{\sqrt{3}}} =$

$= \dfrac{\sqrt[12]{\left(3^2\right)^4}\cdot 3\sqrt[12]{3^3}}{3\sqrt[12]{3^6}} + \sqrt[12]{\left(3\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4} = \sqrt[12]{\dfrac{\left(3^2\right)^4\cdot 3^3}{3^6}} + \sqrt[12]{3^4\cdot 3} = \sqrt[12]{3^5} + \sqrt[12]{3^5} = 2\sqrt[12]{3^5}$

d. $\dfrac{\mathbf{\sqrt{363}-4\sqrt{432}}}{\mathbf{3\sqrt[4]{80}+2\sqrt[4]{405}}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3\cdot 11^2}-4\sqrt{2^4\cdot 3^3}}{3\sqrt[4]{2^4\cdot 5}+2\sqrt[4]{3^4\cdot 5}}=\dfrac{11\sqrt{3}-4\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{3}}{3\cdot 2\sqrt[4]{5}+2\cdot 3\sqrt[4]{5}}=\dfrac{11\sqrt{3}-48\sqrt{3}}{6\sqrt[4]{5}+6\sqrt[4]{5}}=\dfrac{-37\sqrt{3}}{12\sqrt[4]{5}}=$

$=\dfrac{-37\sqrt[4]{3^2}}{12\sqrt[4]{5}}=\dfrac{-37}{12}\sqrt[4]{\dfrac{3^2}{5}}$

e. $\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{\sqrt[5]{8}}}{\mathbf{\sqrt{2}}}}\cdot\sqrt{\mathbf{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}}=$

$=\sqrt[120]{\left(\dfrac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt{2}}\right)^{40}}\cdot\sqrt[120]{\left(2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}\right)^{60}}=\sqrt[120]{\dfrac{8^8}{2^{20}}}\cdot\sqrt[120]{2^{60}\cdot\left(2\sqrt[4]{2}\right)^{20}}=\sqrt[120]{\dfrac{(2^3)^8}{2^{20}}\cdot 2^{60}\cdot 2^{20}\cdot 2^5}=$

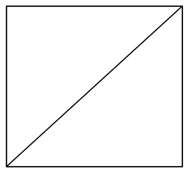
$=\sqrt[120]{\dfrac{2^{24}}{2^{20}}\cdot 2^{60}\cdot 2^{20}\cdot 2^5}=\sqrt[120]{2^{24+60+20+5-20}}=\sqrt[120]{2^{89}}$

f. $\dfrac{\mathbf{\sqrt[3]{10}}}{\mathbf{\sqrt[6]{4}}}+\left(\mathbf{2\sqrt[9]{5}}\right)^{\mathbf{3}}=$

$=\sqrt[6]{\dfrac{(2\cdot 5)^2}{\left(2^2\right)}}+8\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}+8\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{5}=9\sqrt[3]{5}$

56 Si el área de un cuadrado mide 30 mm^2, ¿cuál es el área del cuadrado construido sobre su diagonal?

Como el cuadrado tiene un área de 30 mm^2, se halla el valor del lado de dicho cuadrado:


a

$A = a^2 = 30 \Longrightarrow a=\sqrt{30}$ mm

Se calcula el valor de la diagonal, según el teorema de Pitágoras:

$a^2 + a^2 = d^2$; $30 + 30 = d^2 \Longrightarrow d=\sqrt{60}=2\sqrt{15} \Rightarrow d=2\sqrt{15}$ mm

El área del cuadrado sobre la diagonal es: $A = d^2 = (2\sqrt{15})^2 = 60$ mm^2.

57 Una finca rectangular tiene $\mathbf{\sqrt[3]{100}}$ hm de largo y $\mathbf{\sqrt[6]{100}}$ hm de ancho. ¿Cuántas hectáreas tiene de área?

Se reducen las dimensiones de la finca a radicales de índice igual:

$A=\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[6]{100}=\sqrt[3]{10^2}\cdot\sqrt[6]{10^2}=\sqrt[3]{10^2}\cdot\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{10^2\cdot 10}=\sqrt[3]{10^3}=10$

$A=10$ ha

SOLUCIONES PÁG. 37

58 Racionaliza las siguientes expresiones con raíces cuadradas en el denominador:

a. $-\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{15}}} = -\frac{5\sqrt{15}}{\left(\sqrt{15}\right)^2} = -\frac{5\sqrt{15}}{15} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$

b. $-\frac{\mathbf{20}}{\sqrt{\mathbf{18}}} = -\frac{20}{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = -\frac{20}{3\sqrt{2}} = -\frac{20\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{20\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = -\frac{10}{3}\sqrt{2}$

c. $\frac{\mathbf{18}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{18\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{18}{2}\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

d. $\frac{\mathbf{65}}{\sqrt{\mathbf{13}}} = \frac{65\sqrt{13}}{\left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{65\sqrt{13}}{13} = 5\sqrt{13}$

e. $\frac{\mathbf{6} - \sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{\left(6 - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left(6 - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3} - 3}{3} = 2\sqrt{3} - 1$

f. $\frac{\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{20}}{\sqrt{\mathbf{10}}} = \frac{\left(\sqrt{5} - 20\right) \cdot \sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} - 20 \cdot \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 5} - 20\sqrt{10}}{10} =$

$= \frac{5\sqrt{2} - 20\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{10}$

g. $\frac{\sqrt{\mathbf{2}} - \sqrt{\mathbf{8}}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = 1 - 2 = -1$

h. $\frac{\mathbf{3} + \sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{11}}} = \frac{\left(3 + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{11}}{\left(\sqrt{11}\right)^2} = \frac{\left(3\sqrt{11} + \sqrt{22}\right)}{11}$

59 Racionaliza las siguientes expresiones:

a. $\frac{\mathbf{15}}{\sqrt[3]{\mathbf{10}}} = \frac{15\left(\sqrt[3]{10}\right)^2}{\sqrt[3]{10} \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^2} = \frac{15\sqrt[3]{100}}{10} = \frac{3\sqrt[3]{100}}{2}$

b. $-\frac{\mathbf{55}}{\sqrt[4]{\mathbf{11}}} = -\frac{55 \cdot \left(\sqrt[4]{11}\right)^3}{\sqrt[4]{11} \cdot \left(\sqrt[4]{11}\right)^3} = -\frac{55 \cdot \left(\sqrt[4]{11}\right)^3}{11} = -5\sqrt[4]{11^3} = -5\sqrt[4]{1331}$

c. $-\frac{\mathbf{69}}{\sqrt[5]{\mathbf{13}}} = -\frac{69}{\sqrt[5]{13}} \cdot \frac{\left(\sqrt[5]{13}\right)^4}{\left(\sqrt[5]{13}\right)^4} = -\frac{69\sqrt[5]{13^4}}{13}$

d. $$\frac{\mathbf{28}}{\sqrt[3]{\mathbf{12}}}=\frac{28}{\sqrt[3]{12}}\cdot\frac{\sqrt[3]{12}^{2}}{\sqrt[3]{12}^{2}}=\frac{28}{12}\cdot\sqrt[3]{12^2}=\frac{14}{6}\cdot\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^2}=\frac{14}{6}\cdot\sqrt[3]{2^4\cdot 3^2}=$$
$$=\frac{14\cdot 2}{6}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3^2}=\frac{14}{3}\cdot\sqrt[3]{18}$$

e. $$\frac{\mathbf{7-\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{\mathbf{12}}}=\frac{\left(7-\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{12}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}=\frac{7\sqrt[3]{12^2}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{12^2}}{12}=\frac{7\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^2}-\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^2}}{12}=$$
$$=\frac{7\sqrt[3]{2^4\cdot 3^2}-\sqrt[3]{2^2\cdot 2^4\cdot 3^2}}{12}=\frac{7\cdot 2\sqrt[3]{2\cdot 3^2}-2^2\sqrt[3]{3^2}}{12}=\frac{14\sqrt[3]{18}-4\sqrt[3]{9}}{12}=$$
$$=\frac{7\sqrt[3]{18}-2\sqrt[3]{9}}{6}$$

f. $$\frac{\sqrt[5]{\mathbf{5}}+\mathbf{2}}{\sqrt[5]{\mathbf{30}}}=\frac{\sqrt[5]{5}+2}{\sqrt[5]{30}}\cdot\frac{\sqrt[5]{30}^{4}}{\sqrt[5]{30}^{4}}=\frac{\left(\sqrt[5]{5}+2\right)\cdot\sqrt[5]{30}^{4}}{30}=\frac{\sqrt[5]{5\cdot 30^4}+2\sqrt[5]{30}^{4}}{30}=$$
$$=\frac{\sqrt[5]{5\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 5^4}+2\sqrt[5]{30^4}}{30}=\frac{\sqrt[5]{2^4\cdot 3^4\cdot 5^5}+2\sqrt[5]{30^4}}{30}=\frac{5\sqrt[5]{2^4\cdot 3^4}+2\sqrt[5]{30^4}}{30}=$$
$$=\frac{\sqrt[5]{6^4}}{6}+\frac{\sqrt[5]{30^4}}{15}$$

g. $$\frac{\sqrt[4]{\mathbf{12}}-\sqrt[4]{\mathbf{6}}}{\sqrt[4]{\mathbf{36}}}=\frac{\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{36}}\cdot\frac{\sqrt[4]{36}^{3}}{\sqrt[4]{36}^{3}}=\frac{\left(\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{6}\right)\cdot\sqrt[4]{36}^{3}}{36}=\frac{\sqrt[4]{12\cdot 36^3}-\sqrt[4]{6\cdot 36^3}}{36}=$$
$$=\frac{\sqrt[4]{12^4\cdot 3^3}-\sqrt[4]{6^7}}{36}=\frac{12\sqrt[4]{27}-6\sqrt[4]{6^3}}{36}=\frac{\sqrt[4]{27}}{3}-\frac{\sqrt[4]{216}}{6}$$

h. $$\frac{\mathbf{5-\sqrt[3]{15}}}{\sqrt[3]{\mathbf{45}}}=\frac{5-\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{45}}\cdot\frac{\sqrt[3]{45^2}}{\sqrt[3]{45^2}}=\frac{5-\sqrt[3]{15}}{45}\cdot\sqrt[3]{45^2}=\frac{\left(5-\sqrt[3]{15}\right)\cdot\sqrt[3]{45^2}}{45}=$$
$$=\frac{5\cdot\sqrt[3]{45^2}-\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{45^2}}{45}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{\left(3^2\cdot 5\right)^2}-\sqrt[3]{3\cdot 5\cdot\left(3^2\cdot 5\right)^2}}{45}=$$
$$=\frac{5\cdot\sqrt[3]{3^4\cdot 5^2}-\sqrt[3]{3^5\cdot 5^3}}{45}=\frac{5\cdot 3\sqrt[3]{3\cdot 5^2}-3\cdot 5\sqrt[3]{3^2}}{45}=\frac{15\sqrt[3]{75}-15\sqrt[3]{9}}{45}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{75}-\sqrt[3]{9}}{3}$$

60 Copia en tu cuaderno y une cada fracción con su expresión racionalizada.

a. $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **1.** $-2\sqrt{2}$

b. $\dfrac{-4}{2-\sqrt{8}}$ **2.** $\sqrt{2}$

c. $\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}$ **3.** $2+2\sqrt{2}$

a. $\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{4}{\sqrt{8}}\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\dfrac{4\cdot 2\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}$, luego le corresponde la respuesta 2.

b. $\dfrac{-4}{2-\sqrt{8}}=\dfrac{-4\cdot\left(2+\sqrt{8}\right)}{\left(2-\sqrt{8}\right)\cdot\left(2+\sqrt{8}\right)}=\dfrac{-8+4\cdot 2\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{8^2}}=\dfrac{-8+8\sqrt{2}}{4-8}=-\dfrac{-8+8\sqrt{2}}{4}=2-2\sqrt{2}$, luego le corresponde la respuesta 3.

c. $\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}=\dfrac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}^2-\sqrt{8}^2}=\dfrac{4\sqrt{2}+4\cdot 2\sqrt{2}}{2-8}=-\dfrac{4\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{4}=-2\sqrt{2}$ **,** luego le corresponde la respuesta 1.

61 Racionaliza las siguientes expresiones con binomios con radicales en el denominador:

a. $\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{6-\sqrt{15}}}=\dfrac{9}{6-\sqrt{15}}\cdot\dfrac{6+\sqrt{15}}{6+\sqrt{15}}=\dfrac{54+9\sqrt{15}}{6^2-\sqrt{15}^2}=\dfrac{54+9\sqrt{15}}{36-15}=\dfrac{54+9\sqrt{15}}{21}=\dfrac{18+3\sqrt{15}}{7}$

b. $\dfrac{\mathbf{-5}}{\mathbf{21+\sqrt{2}}}=\dfrac{-5}{21+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{21-\sqrt{2}}{21-\sqrt{2}}=\dfrac{-105+5\sqrt{2}}{21^2-\sqrt{2}^2}=\dfrac{-105+5\sqrt{2}}{441-2}=\dfrac{-105+5\sqrt{2}}{439}$

c. $\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{4+\sqrt{8}}}=\dfrac{12}{4+\sqrt{8}}\cdot\dfrac{4-\sqrt{8}}{4-\sqrt{8}}=\dfrac{48-12\sqrt{8}}{4^2-\sqrt{8}^2}=\dfrac{48-12\sqrt{8}}{16-8}=\dfrac{48-12\sqrt{8}}{8}=$

$=6-\dfrac{3\cdot 2\sqrt{2}}{2}=6-3\sqrt{2}$

d. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{18}+\sqrt{14}}}=\dfrac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{14}}\cdot\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{14}}{\sqrt{18}-\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{14}}{\sqrt{18}^2-\sqrt{14}^2}=\dfrac{\sqrt{3^2\cdot 2}-\sqrt{14}}{18-14}=$

$=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{4}$

e. $\dfrac{\mathbf{\sqrt{13}+\sqrt{2}}}{\mathbf{\sqrt{13}-\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{2}}{\sqrt{13}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{2}}{\sqrt{13}+\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{13}^2-\sqrt{2}^2}=\dfrac{\sqrt{13}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{13\cdot 2}}{13-2}=$

$=\dfrac{13+2+2\sqrt{26}}{11}=\dfrac{15+2\sqrt{26}}{11}$

f. $$\frac{\sqrt{\mathbf{45}}+\sqrt{\mathbf{18}}}{\sqrt{\mathbf{5}}+\sqrt{\mathbf{2}}}=\frac{\sqrt{45}+\sqrt{18}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{3^2\cdot 2}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{5-2}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2=5-3=3$$

62 Efectúa las siguientes operaciones:

a. $$\frac{\mathbf{10}}{\sqrt{\mathbf{10}}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}+\sqrt{\mathbf{5}}}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt[3]{\mathbf{2}}}=$$

$$=\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{10}^2}-\left(\frac{3}{7+\sqrt{5}}\cdot\frac{7-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}^2}{\sqrt[3]{2}^2}=\frac{10\sqrt{10}}{10}-\frac{21-3\sqrt{5}}{7^2+\sqrt{5}^2}+\frac{\sqrt[6]{2^3\cdot\left(2^2\right)^2}}{2}=$$

$$=\sqrt{10}-\frac{21-3\sqrt{5}}{49-5}+\frac{\sqrt[6]{2^3\cdot 2^4}}{2}=\sqrt{10}-\frac{21-3\sqrt{5}}{44}+\frac{2\sqrt[6]{2}}{2}=\sqrt{10}-\frac{21-3\sqrt{5}}{44}+\sqrt[6]{2}$$

b. $$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{3}}-\sqrt{\mathbf{5}}}-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{32}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{2}+8}{\sqrt{32}}\cdot\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}}==\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{5}^2}-\frac{\sqrt{2\cdot 32}+8\sqrt{32}}{32}=$$

$$=\frac{3+5+2\sqrt{3\cdot 5}}{3-5}-\frac{\sqrt{64}+8\sqrt{16\cdot 2}}{32}=\frac{8+2\sqrt{15}}{-2}-\frac{8+32\sqrt{2}}{32}=-4-\sqrt{15}-\frac{1}{4}-\sqrt{2}=$$

$$=-\frac{17}{4}-\sqrt{15}-\sqrt{2}$$

c. $$\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{8}}}{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{8}}}-\frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt[4]{\mathbf{9}}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{8}}{1+\sqrt{8}}\cdot\frac{1-\sqrt{8}}{1-\sqrt{8}}-\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9}}\cdot\frac{\sqrt[4]{9}^3}{\sqrt[4]{9}^3}=\frac{\left(1-\sqrt{8}\right)^2}{1-8}-\frac{3\sqrt[4]{9}^3-\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{9}^3}{9}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{8}^2-2\sqrt{8}}{-7}-\frac{3\sqrt[4]{3^6}-\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3^6}}{9}=\frac{1+8-2\sqrt{8}}{-7}-\frac{3\cdot 3\sqrt[4]{3^2}}{9}+\frac{3\sqrt[4]{3^2}\cdot\sqrt{3}}{9}=$$

$$-\frac{9}{7}+\frac{4\sqrt{2}}{7}-\sqrt{3}+\frac{3\cdot\sqrt{3}^2}{9}=-\frac{9}{7}+\frac{4\sqrt{2}}{7}-\sqrt{3}+1=-\frac{2}{7}+\frac{4\sqrt{2}}{7}-\sqrt{3}$$

d. $\mathbf{\dfrac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{3}}=}$

$=\dfrac{\left(2+\sqrt{6}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{6}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=$

$=\dfrac{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6\cdot 3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{6\cdot 3}}{2^2-\sqrt{3}^2}=\dfrac{8+2\sqrt{18}}{4-3}=$

$=8+2\cdot 3\sqrt{2}=8+6\sqrt{2}$

63 Halla el número resultante de sumar la inversa de la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 4 cm y la inversa de la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 2 cm y 6 cm.

La diagonal del cuadrado se calcula mediante el Teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + a^2 \Longrightarrow d = a\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

La diagonal del rectángulo es:

$d'^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow d' = \sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

La suma de las inversas es:

$\dfrac{1}{4\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\sqrt{10}}{20}=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{40}$

64 En la siguiente página web puedes encontrar distintas actividades con las que practicar tanto las operaciones con radicales como la racionalización: <u>http://conteni2.educarex.es/mats/12052/contenido/</u>

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 39

65 Utilizando la definición, calcula los siguientes logaritmos:

a. $\mathbf{log_2}$ (32) = 5 $\Longrightarrow 2^5 = 32$

b. $\mathbf{log_3}$ (27) = 3 $\Longrightarrow 3^3 = 27$

c. $\mathbf{log_4}$ (0,062 5) = $\log_4\dfrac{625}{10\,000}=\log_4\dfrac{1}{16}=\log_4 4^{-2}=-2\Rightarrow 4^{-2}=\dfrac{1}{16}$

d. $\mathbf{log_5}$ (0,04) $=\log_5\dfrac{4}{100}=\log_5\dfrac{1}{25}=\log_5 5^{-2}=-2\Rightarrow 5^{-2}=\dfrac{1}{25}$

e. $\mathbf{log_5}$ (625) = 4 $\Longrightarrow 5^4 = 625$

f. $\mathbf{log_{\frac{1}{2}}}$(128) $=\log_{\frac{1}{2}}2^7=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-7}=-7\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-7}=128$

g. log (10 000) = log (10^4) = 4 · log (10) = 4 · 1 = 4

h. log (0,000 1) = log (10^{-4}) = –4 · log (10) = –4 · 1 = –4

i. log₂ (0,062 5) $= \log_2 \dfrac{625}{10000} = \log_2 \dfrac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4 \Rightarrow 2^{-4} = \dfrac{1}{16}$

66 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para completar las siguientes igualdades:

a. $\log_5$ (A) = 3 ⟹ 5^3 = A ⟹ A = 125

b. $\log_3$ (B) = 5 ⟹ 3^5 = B ⟹ B = 243

c. $\log_4$ (C) = –2 ⟹ 4^{-2} = C ⟹ C = 0,062 5

d. $\log_D$ (49) = 2 ⟹ D^2 = 49 ⟹ D = 7

e. $\log_E$ (1 296) = 4 ⟹ E^4 = 1 296 ⟹ E = 6

f. log (F) = –5 ⟹ 10^{-5} = F ⟹ F = 0,000 01

g. log (G) = 3 ⟹ 10^3 = G ⟹ G = 1 000

h. $\log_5$ (H) = –3 ⟹ 5^{-3} = H ⟹ H = 0,008

i. $\log_I$ (0,5) = –1 ⟹ I^{-1} = 0,5 ⟹ I = 2

67 Calcula, con ayuda de la calculadora, estos logaritmos, realizando previamente un cambio de base:

a. $\log_2$ (7) $= \dfrac{\log 7}{\log 2} = 2{,}807$

b. $\log_3$ (0,5) $= \dfrac{\log 0{,}5}{\log 3} = -0{,}631$

c. $\log_5$ (350) $= \dfrac{\log 350}{\log 5} = 3{,}640$

d. $\log_6$ (120) $= \dfrac{\log 120}{\log 6} = 2{,}672$

e. $\log_4$ (1 000) $= \dfrac{\log 1000}{\log 4} = 4{,}983$

f. $\log_3$ (0,001) $= \dfrac{\log 0{,}001}{\log 3} = -6{,}288$

68 Sabiendo que log (2) = 0,301 y que log (3) = 0,477, calcula estas expresiones, utilizando las propiedades de los logaritmos:

a. log (9) = log (3^2) = 2 · log (3) = 2 · 0,477 = 0,954

b. log $\sqrt[3]{2}$ $= \log\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{1}{3}\cdot \log 2 = \dfrac{1}{3}\cdot 0{,}301 = 0{,}1003$

c. log (18) = log (2 · 3^2) = log (2) + 2 · log (3) = 0,301 + 2 · 0,477 = 1,255

d. log (250) = log (2 · 5^3) = log (2) + 3 · log (5) = 0,301 + 3 · log $\dfrac{10}{2}$ = 0,301 +

+ 3 · (log 10 – log 2) = 0,301 + 3 · (1 – 0,301) = 2,398

e. log (3,2) = log (32 · 10^{-1}) = log (2^5 · 10^{-1}) = 5 · log (2) – log (10) = 5 · 0,301 –1 = = 0,505

f. log (30) = log (3 · 10) = log (3) + log (10) = 0,477 + 1 = 1,477

g. log (3,6) = log (3,6) = log ($36 \cdot 10^{-1}$) = log ($3^2 \cdot 2^2 \cdot 10^{-1}$) = 2 · log (3) + + 2· log (2) – 1 = 2 · 0,477 + 2 · 0,301 – 1 = 0,556

i. log $\left(\sqrt[5]{9}\right) = \log\left(9^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\cdot\log(9) = \frac{1}{5}\cdot\log\left(3^2\right) = \frac{2}{5}\cdot\log(3) = \frac{2}{5}\cdot 0,477 = 0,191$

h. log $\left(\sqrt[6]{12}\right) = \log\left(12^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{6}\cdot\log(12) = \frac{1}{6}\cdot\log\left(2^2\cdot 3\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(2\cdot\log(2)+\log(3)\right) =$

$= \frac{1}{6}\cdot\left(2\cdot 0,301 + 0,477\right) = 0,180$

69 Sabiendo que $\log_2$ (6) = 2,585, halla los siguientes logaritmos, haciendo uso de sus propiedades:

a. $\log_4$ (6) $= \frac{\log_2(6)}{\log_2(4)} = \frac{2,585}{2} = 1,2925$

b. $\log_6$ (8) $= \frac{\log_2(8)}{\log_2(6)} = \frac{3}{2,585} = 1,1605$

c. $\log_2$ (3) $= \log_2\left(\frac{6}{2}\right) = \log_2(6) - \log_2(2) = 2,585 - 1 = 1,585$

d. $\log_2$ (36) = $\log_2$ (6^2) = 2 · $\log_2$ (6) = 2 · 2,585 = 5,17

e. $\log_{16}$ (24) $= \log_{16}(6\cdot 4) = \log_{16}(6) + \log_{16}(4) = \frac{\log_2(6)}{\log_2(16)} + \log_{16}(4) =$

$= \frac{2,585}{4} + \frac{1}{2} = 1,146\ 25$

f. $\log_6$ (4) $= \frac{\log_2(4)}{\log_2(6)} = \frac{2}{2,585} = 0,774$

70 Investiga en Internet qué son los logaritmos neperianos y a quién deben su nombre. Realiza una presentación en PowerPoint o programa similar acerca de la historia de los logaritmos.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 41

1 ¿Son todos los radicales números irracionales? ¿Y son todos números reales?

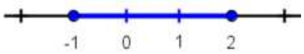
No todos los radicales son números irracionales, porque las raíces exactas son números enteros. Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$

Todos los radicales son números reales siempre y cuando no se trate de radicandos negativos con índice de la raíz par. Por ejemplo, $\sqrt{-3}$ no es un número real.

2 ¿Mediante qué subconjuntos es posible representar números reales en la recta real? Explícalos.

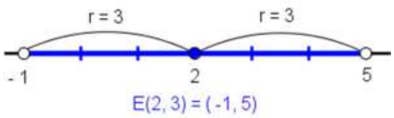
Podemos representar números reales en la recta real mediante intervalos, semirrectas y entornos:

- Un **intervalo** es un segmento de la recta que contiene todos los números comprendidos entre dos números llamados extremos.
  Por ejemplo: $[1\ ,\ 2] \Rightarrow \{x \in \Re\ /\ -1 \leq x \leq 2\}$



- Una **semirrecta** es la parte de la recta que contiene todos los números mayores o menores que un número dado.
  Por ejemplo: $(-1\ ,\ +\infty) \Rightarrow \{x \in \Re\ /\ x > -1\ \}$

- Un **entorno de centro *a* y radio *r*,** E(*a*, *r*), es el conjunto de los números reales cuya distancia al centro *a* es menor que el radio *r*.
  Por ejemplo: E(2, 3) = {x∈ □ / d(2, x) < 3} = (2 – 3, 2 + 3) = (– 1, 5)



3 ¿Qué es la notación científica? ¿Por qué es útil a la hora de expresar las cifras significativas?

La notación científica es un formato de notación matemática, en la que se escribe una única cifra entera distinta de cero seguida o no de decimales y la potencia de 10 adecuada.
La notación científica es útil a la hora de expresar las cifras significativas.

4 Define error absoluto y error relativo. Ilustra las definiciones con ejemplos.

- El error absoluto es la diferencia en valor absoluto entre el valor real y el valor aproximado.
- El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

Por ejemplo, si aproximamos 5,38 a 5,4, el error absoluto sería:
Ea = |5,38 – 5,4| = 0,02
Y el error relativo sería:

$$\text{Er} = \frac{0{,}02}{5{,}38} = 0{,}004$$

5 ¿Qué es un radical? ¿Cómo se puede expresar un radical en forma de potencia?

Se llama radical de un número a la raíz indicada de dicho número.
Un radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\text{, con } a > 0$$

6 Explica con ejemplos el modo de introducir factores en un radical y de extraerlos.

Para introducir factores en un radical, elevamos dichos factores al índice de dicho radical. Por ejemplo: $5\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7}$

Para extraer factores de un radical, se realizará de la siguiente forma $\sqrt[m]{a^{x \cdot m + y}} = a^x \cdot \sqrt[m]{a^y}$. Por ejemplo: $\sqrt[3]{7^8} = \sqrt[3]{7^{2 \cdot 3+2}} = 7^2 \cdot \sqrt[3]{7^2}$

7 Explica mediante ejemplos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir radicales.

- Para sumar y restar radicales, han de ser semejantes, es decir, que el radicando y el índice sea el mismo. Por ejemplo: $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- Para multiplicar y dividir radicales, estos han de tener el mismo índice. Se realizará de la siguiente forma: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$ y $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$

  En el caso de que el índice no sea el mismo, se hallan radicales equivalentes para que sí lo sean.

8 ¿En qué consiste la racionalización? Pon ejemplos.

La racionalización consiste en la eliminación de radicales en el denominador de una fracción. Por ejemplo: $\dfrac{8}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{7}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7 \cdot 7^2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \dfrac{8\sqrt[3]{7^2}}{7}$

9 ¿Qué es un logaritmo? ¿Por qué no existen logaritmos de números negativos?

El logaritmo en base *a,* de un número positivo *b* es otro número *x* tal que la base *a* elevada a dicho número *x* es igual al número *b*, siendo *a* un número positivo distinto de la unidad: $\log_a (b) = x \Leftrightarrow ax = b$; $a \in (0 , 1) \cup (1 , +\infty)$

Fijándonos en la definición de logaritmo, la base tiene que ser siempre un número mayor estrictamente que cero. Una base positiva, al elevarla a un exponente cualquiera siempre resulta un número positivo, por lo que no se pueden realizar logaritmos de números negativos porque no existen.

10 Prepara una presentación sobre los números reales para tus compañeros. Puedes hacer un documento Power- Point, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 42

EL NÚMERO REAL

1 Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla, indicando a qué conjuntos numéricos pertenece cada número:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
$\sqrt[7]{-128} = -2$	No	Sí	Sí	No
$\frac{4}{6} = \frac{2}{6} = 0,\widehat{6}$	No	No	Sí	No
$\sqrt[6]{3} = 1{,}200\,937\ldots$	No	No	No	Sí
$\sqrt[3]{1331} = 11$	Sí	Sí	Sí	No
$0{,}006\,66\ldots$	No	No	Sí	No

2 Representa en la recta real los números irracionales propuestos. ¿Qué teorema has utilizado para ello?

Para representar números irracionales, se deben seguir estos pasos:

1.º Se expresa la raíz como suma de cuadrados.

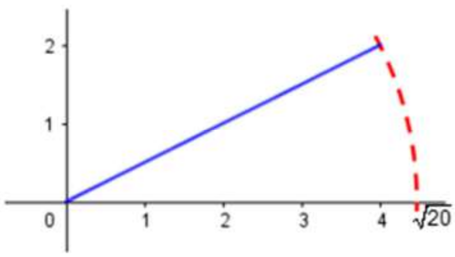
2.º Se construye un rectángulo cuyos lados tengan el valor de los cuadrados hallados en el paso anterior, y se traza la diagonal.

3.º La diagonal del rectángulo coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los cuadrados ya conocidos.

4º Con el compás se traza un arco de circunferencia hasta cortar la recta con centro en el punto 0 y con el radio del valor de la hipotenusa calculada en el paso anterior.

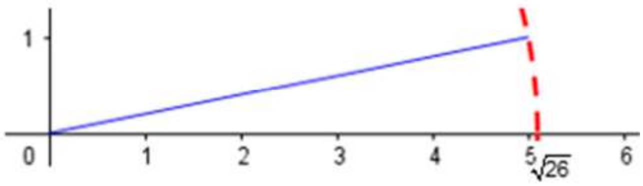
a. $\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$

Es decir, el número propuesto, $\sqrt{20}$, tiene la misma longitud que la diagonal de un rectángulo de lados de longitud 4 y 2 unidades:



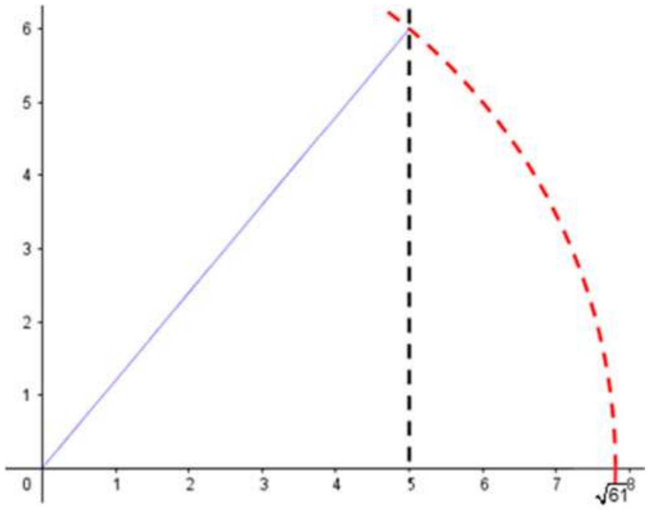
b. $\sqrt{26} = \sqrt{5^2 + 1^2}$

Es decir, el número propuesto, $\sqrt{26}$, tiene la misma longitud que la diagonal de un rectángulo de lados de longitud 1 y 5 unidades.



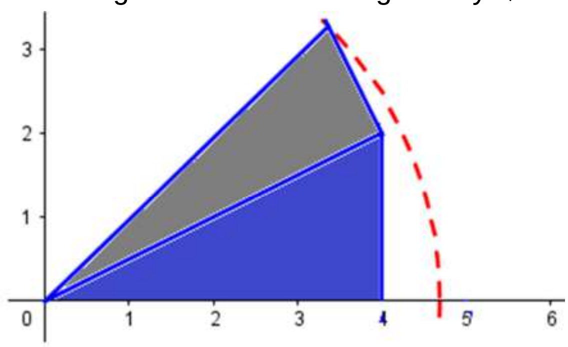
c. $\sqrt{\mathbf{61}} = \sqrt{6^2 + 5^2}$

Es decir, el número propuesto, $\sqrt{61}$, tiene la misma longitud que la diagonal de un rectángulo de lados de longitud 5 y 6 unidades:



d. $\sqrt{\mathbf{24}} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{4+4}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{2^2+2^2}\right)^2}$

Es decir, el número propuesto, $\sqrt{24}$, tiene la misma longitud que la diagonal de un rectángulo de lados de longitud 4 y $\sqrt{2^2+2^2}$ unidades:



3 Halla las distancias entre los siguientes números reales:

a. 0,333… y 0,666…

d $(0,\overset{\frown}{3};0,\overset{\frown}{6})$ = $\left|0,\overset{\frown}{6} - 0,\overset{\frown}{3}\right| = 0,\overset{\frown}{3} = 0,333...$

b. 9,622 2… y 11,244…

d $(9,6\overset{\frown}{2};11,2\overset{\frown}{4})$ = $\left|9,6\overset{\frown}{2} - 11,2\overset{\frown}{4}\right| = 1,6\overset{\frown}{2} = 1,622...$

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

4 Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla en la que aparecen intervalos y semirrectas:

Intervalo o semirrecta	Representación	Desigualdad
[6 , 10)		$6 \leq x < 10$
(10 , +∞)		$x > 10$
(–∞ , 4)		$x < 4$
[0 , +∞)		$x \geq 0$
(–5 , –2]		$-5 < x \leq -2$
(–∞ , –5]		$x \leq -5$
[–20 , –18]		$-20 \leq x \leq -18$
(19 , 24)		$19 < x < 24$

5 Efectúa estas operaciones con intervalos:

a. (–8 , 3) ∪ (2 , 10)

(–8 , 10)

b. (6 , 12) ∩ (7 , 14)

(7 , 12)

6 Escribe en forma de intervalos los siguientes entornos:

a. E(8 , 6) = (8 – 6 , 8 + 6) = (2 , 14)

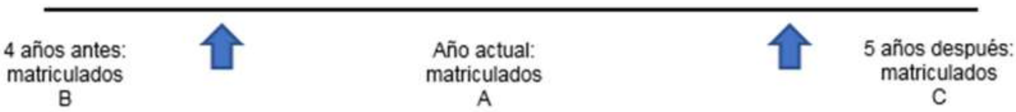
b. E(–3 , 4) = (–3 – 4 , –3 + 4) = (–7 , 1)

c. E*(–5 , 8) = (–5 – 8 , –5) ∪ (–5 , –5 + 8) = (–13 , –5) ∪ (–5 , 3)

APLICACIONES DE LOS NÚMEROS REALES

7 El número de alumnos matriculados en un centro ha aumentado un 30 % en los últimos 4 años. Se prevé que en los siguientes 5 años dicho número aumente en un 20 %. Si actualmente hay 390 alumnos matriculados, ¿cuántos había hace 4 años? ¿Y cuántos habrá dentro de 5 años?

Se plantean cuáles son los matriculados de cada año, sus aumentos y sus disminuciones porcentuales:



- Los matriculados en el año actual (A) son 390, lo que significa que, si ha habido un aumento del 30 %, hace 4 años el alumnado (B) era de:

  $$A = B \cdot \left(1 + \frac{30}{100}\right) \Rightarrow B = \frac{A}{1{,}3} = \frac{390}{1{,}3} = 300$$

  Eran 300 alumnos hace 4 años.
- Los matriculados en el año actual (A) son 390, lo que significa que, si va a haber un aumento del 20 %, dentro de 5 años el alumnado (C) será de:

  $$C = A \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \Rightarrow C = 390 \cdot 1{,}2 = 468$$

  En 5 años habrá 468 alumnos.

8 Calcula los intereses producidos al depositar en un banco 6 000 € a los siguientes intereses:

a. A un 5 % simple anual durante 10 meses.

$$C_F = C_I\left(1 + \frac{r \cdot t}{100 \cdot 12}\right) = 6000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 10}{1200}\right) = 6250\ €$$

$I = C_F – C_I = 6\,250 – 6\,000 = 250$ €

b. A un 3 % simple anual durante 200 días.

$$C_F = C_I\left(1 + \frac{r \cdot t}{100 \cdot 360}\right) = 6000 \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 200}{36000}\right) = 6100\ €$$

$I = C_F – C_I = 6\,100 – 6\,000 = 100$ €

c. A un 2,5 % compuesto anual durante 5 años.

$$C_T = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 6000 \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)^5 = 6\,788{,}45\ €$$

$I = C_F – C_I = 6\,788{,}45 – 6\,000 = 788{,}45$ €

9 Los beneficios de una empresa aumentan un 3 % por año. Si el año pasado obtuvieron 3 000 000 € de beneficios, ¿cuánto habrán obtenido este año? ¿Y cuáles serán los beneficios dentro de 10 años si sus ingresos siguen manteniendo este ritmo de crecimiento?

Si se llama A a los beneficios del año pasado, B a los beneficios de este año y C a los beneficios de dentro de 10 años, la relación de aumentos y disminuciones es:

$$B = A \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 3\ 000\ 000 \cdot 1{,}03 = 3{,}09 \cdot 10^6\ €$$

$$C = A \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^t = 3\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10} = 4\ 031\,749{,}14\ €$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA. OPERACIONES

10 Realiza las siguientes operaciones con números en notación científica:

a. $\mathbf{2{,}25 \cdot 10^{34} + 9{,}35 \cdot 10^{35}} = (0{,}225 + 9{,}35) \cdot 10^{35} = 9{,}575 \cdot 10^{35}$

b. $\mathbf{1{,}78 \cdot 10^{-15} - 3{,}67 \cdot 10^{-16}} = (1{,}78 - 0{,}367) \cdot 10^{-15} = 1{,}413 \cdot 10^{-15}$

c. $\mathbf{(9{,}8 \cdot 10^{12}) \cdot (6{,}8 \cdot 10^{-21})} = 9{,}8 \cdot 6{,}8 \cdot 10^{12-21} = 6{,}664 \cdot 10^{-8}$

d. $\mathbf{(4{,}2 \cdot 10^{9}) : (1{,}2 \cdot 10^{-2})} = \dfrac{4{,}2}{1{,}2} \cdot 10^{9-(-2)} = 3{,}5 \cdot 10^{11}$

11 Efectúa estas operaciones, expresando el resultado en notación científica:

a. $$\frac{\left(\mathbf{8{,}9 \cdot 10^{-5} + 7{,}6 \cdot 10^{-6}}\right)^2}{\mathbf{5{,}3 \cdot 10^{-8} + 3{,}3 \cdot 10^{-6}}} = \frac{\left((89+7{,}6)\cdot 10^{-6}\right)^2}{(5{,}3+330)\cdot 10^{-8}} = \frac{96{,}6^2 \cdot 10^{-6\cdot 2}}{335{,}3 \cdot 10^{-8}} = \frac{96{,}6^2 \cdot 10^{-12}}{335{,}3 \cdot 10^{-8}} =$$
$$= \frac{9331{,}56}{335{,}3} \cdot 10^{-4} = 2{,}78 \cdot 10^{-3}$$

b. $$\frac{\mathbf{9{,}21 \cdot 10^{-7} - 7{,}81 \cdot 10^{-6}}}{\mathbf{3{,}88 \cdot 10^{-4} - 6{,}23 \cdot 10^{-5}}} = \frac{(0{,}921 - 7{,}81)\cdot 10^{-6}}{(3{,}88 - 0{,}623)\cdot 10^{-4}} = -2{,}11 \cdot 10^{-6-(-4)} = -2{,}11 \cdot 10^{-2}$$

c. $$\frac{\mathbf{4{,}6 \cdot 10^{2}}}{\mathbf{9{,}2 \cdot 10^{-4}}} - \frac{\mathbf{10{,}8 \cdot 10^{-7}}}{\mathbf{3{,}6 \cdot 10^{-13}}} = 0{,}5 \cdot 10^{2-(-4)} - 3 \cdot 10^{-7-(-13)} = 5 \cdot 10^{5} - 3 \cdot 10^{6} = -2{,}5 \cdot 10^{6}$$

d. $$\frac{\mathbf{5{,}7 \cdot 10^{3}}}{\mathbf{1{,}9 \cdot 10^{11}}} + \mathbf{(1{,}7 \cdot 10^{-4})^2} = 3 \cdot 10^{3-11} + 2{,}89 \cdot 10^{-4\cdot 2} = 3 \cdot 10^{-8} + 2{,}89 \cdot 10^{-8} =$$
$$= (3 + 2{,}89) \cdot 10^{-8} = 5{,}89 \cdot 10^{-8}$$

ESTIMACIONES, APROXIMACIONES Y ERRORES

12 Efectúa la operación $\mathbf{5\sqrt{6} - \sqrt{10}}$ con dos cifras decimales por exceso, por defecto y por redondeo, sabiendo que $\mathbf{\sqrt{6} = 2{,}449\ 49...}$ y $\mathbf{\sqrt{10} = 3{,}162\ 278...}$

	$\sqrt{6}$	$5\sqrt{6}$	$\sqrt{10}$	$5\sqrt{6} - \sqrt{10}$
Exceso	2,45	12,25	3,17	9,08
Defecto	2,44	12,20	3,16	9,04
Redondeo	2,45	12,25	3,16	9,09

13 Halla los errores absoluto y relativo cometidos al aproximar el número 3,266 6… con 3 cifras decimales por truncamiento y por redondeo.

Por truncamiento:

$E_a = \left|3{,}266\ 6\ldots - 3{,}266\right| = 0{,}000\ 7$; $E_r = \dfrac{E_a}{A} = \dfrac{0{,}000\ 7}{3{,}2\widehat{6}} = 0{,}02\ \%$.

Por redondeo:

$E_a = \left|3{,}266\ 6\ldots - 3{,}267\right| = 0{,}000\ 4$; $E_r = \dfrac{E_a}{A} = \dfrac{0{,}000\ 3}{3{,}2\widehat{6}} = 0{,}01\ \%$.

SOLUCIONES PÁG. 43

RADICALES Y OPERACIONES CON RADICALES

14 Introduce los siguientes factores en los radicales:

a. $\mathbf{3\cdot 5\cdot 2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{3^4\cdot 5^4\cdot 2\cdot 2^4} = \sqrt[4]{3^4\cdot 5^4\cdot 2^5}$

b. $\mathbf{6\cdot 10\sqrt[15]{24}} = \sqrt[15]{6^{15}\cdot 10^{15}\cdot 2^3\cdot 3} = \sqrt[15]{2^{15}\cdot 3^{15}\cdot 2^{15}\cdot 5^{15}\cdot 2^3\cdot 3} = \sqrt[15]{2^{33}\cdot 3^{16}\cdot 5^{15}}$

c. $\boldsymbol{x^2y^3\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[6]{\left(x^2y^3\right)^6 x^5} = \sqrt[6]{x^{12}y^{18}x^5} = \sqrt[6]{x^{17}y^{18}}$

15 Extrae todos los factores posibles de estos radicales:

a. $\mathbf{\sqrt[6]{3\,840}} = \sqrt[6]{2^8\cdot 3\cdot 5} = 2\sqrt[6]{2^2\cdot 3\cdot 5} = 2\sqrt[6]{60}$

b. $\mathbf{\sqrt[4]{6\,875}} = \sqrt[4]{5^4\cdot 11} = 5\sqrt[4]{11}$

c. $\mathbf{\sqrt[3]{71344}} = \sqrt[3]{2^4\cdot 7^3\cdot 13} = 7\cdot 2\sqrt[3]{2\cdot 13} = 14\sqrt[3]{26}$

d. $\mathbf{\sqrt{722\,000}} = \sqrt{2^4\cdot 5^3\cdot 19^2} = 2^2\cdot 5\cdot 19\sqrt{5} = 380\sqrt{5}$

16 Efectúa las operaciones con radicales propuestas, simplificando el resultado si es posible. Comprueba luego el resultado con la herramienta Wiris.

a. $\mathbf{3\sqrt{175} - 2\sqrt{343} + 5\sqrt{567}} =$

$= 3\sqrt{5^2\cdot 7} - 2\sqrt{7^3} + 5\sqrt{3^4\cdot 7} = 3\cdot 5\sqrt{7} - 2\cdot 7\sqrt{7} + 5\cdot 3^2\sqrt{7} = 15\sqrt{7} - 14\sqrt{7} + 45\sqrt{7} =$

$= 46\sqrt{7}$

b. $\mathbf{\dfrac{\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{6\,655}}{\sqrt{490} + 2\sqrt{1\,440}}} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{2^6\cdot 5} - \sqrt[3]{3^3\cdot 5} + \sqrt[3]{5\cdot 11^3}}{\sqrt{2\cdot 5\cdot 7^2} + 2\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 5}} = \dfrac{4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5}}{7\sqrt{2\cdot 5} + 2\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{2\cdot 5}} = \dfrac{12\sqrt[3]{5}}{7\sqrt{10} + 24\sqrt{10}} = \dfrac{12\sqrt[3]{5}}{31\sqrt{10}} =$

$= \dfrac{12}{31}\sqrt[6]{\dfrac{5^2}{10^3}} = \dfrac{12}{31}\sqrt[6]{\dfrac{5^2}{2^3\cdot 5^3}} = \dfrac{12}{31}\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^3\cdot 5}} = \dfrac{12}{31}\sqrt[6]{\dfrac{1}{40}}$

c. $\mathbf{\left(\sqrt{\sqrt[3]{72}}\right)^3\cdot\left(\sqrt[6]{320}\right)^2\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{24}}}} =$

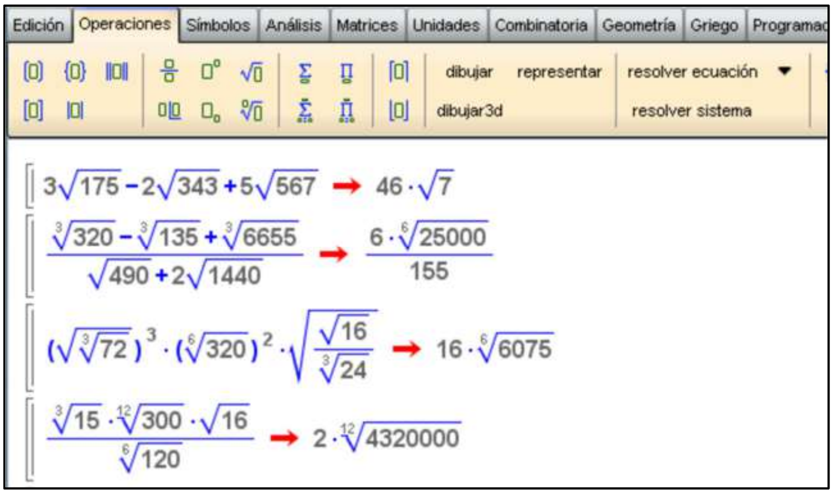
$= \sqrt{72}\cdot\sqrt[3]{320}\cdot\dfrac{2}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt{2^3\cdot 3^2}\cdot\sqrt[3]{2^6\cdot 5}\cdot\dfrac{2}{\sqrt[6]{2^3\cdot 3}} = 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2^2\sqrt[3]{\cdot 5}\cdot\dfrac{2}{\sqrt[6]{2^3\cdot 3}} =$

$= 2^4\cdot 3\sqrt[6]{\dfrac{2^3\cdot 5^2}{2^3\cdot 3}} = 2^4\sqrt[6]{\dfrac{5^2\cdot 3^6}{3}} = 2^4\sqrt[6]{5^2\cdot 3^5} = 2^4\sqrt[6]{5^2\cdot 3^5}$

d. $\dfrac{\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[12]{300}\cdot\sqrt{16}}{\sqrt[6]{120}} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{3\cdot5}\cdot\sqrt[12]{2^2\cdot3\cdot5^2}\cdot4}{\sqrt[6]{2^3\cdot3\cdot5}} = 4\cdot\frac{\sqrt[12]{3^4\cdot5^4}\cdot\sqrt[12]{2^2\cdot3\cdot5^2}}{\sqrt[12]{2^6\cdot3^2\cdot5^2}} == 4\cdot\sqrt[12]{\frac{3^4\cdot5^4\cdot2^2\cdot3\cdot5^2}{2^6\cdot3^2\cdot5^2}} =$$

$$= 4\cdot\sqrt[12]{\frac{3^3\cdot5^4}{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{2^{24}\cdot3^3\cdot5^4}{2^4}} = \sqrt[12]{2^{20}\cdot3^3\cdot5^4} = 2\sqrt[12]{2^8\cdot3^3\cdot5^4}$$



RACIONALIZACIÓN

17 Racionaliza estas expresiones:

a. $\dfrac{\sqrt{5}-10}{\sqrt{125}} = \dfrac{\sqrt{5}-10}{\sqrt{125}}\cdot\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{125}} = \dfrac{\sqrt{5\cdot125}-10\sqrt{125}}{125} = \dfrac{\sqrt{625}-10\sqrt{5^3}}{125} =$

$$= \frac{25-10\cdot5\sqrt{5}}{125} = \frac{1-2\sqrt{5}}{5}$$

b. $\dfrac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{8}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{2\cdot8^3}-\sqrt[4]{4\cdot8^3}}{8} = \dfrac{\sqrt[4]{2\cdot\left(2^3\right)^3}-\sqrt[4]{2^2\cdot\left(2^3\right)^3}}{8} =$

$$= \frac{\sqrt[4]{2\cdot2^9}-\sqrt[4]{2^2\cdot2^9}}{8} = \frac{\sqrt[4]{2^{10}}-\sqrt[4]{2^{11}}}{8} = \frac{2^2\sqrt{2}-2^2\sqrt[4]{2^3}}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2^3}}{2}$$

c. $\dfrac{7-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{35}} = \dfrac{7-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{35}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{35}^2}{\sqrt[3]{35}^2} = \dfrac{7\sqrt[3]{35}^2-\sqrt[3]{5\cdot35^2}}{35} = \dfrac{7\sqrt[3]{35^2}-5\sqrt[3]{7^2}}{35} = \dfrac{\sqrt[3]{35^2}}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$

d. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{5+\sqrt{75}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{5+\sqrt{75}}\cdot\dfrac{5-\sqrt{75}}{5-\sqrt{75}} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(5-\sqrt{75}\right)}{5^2-75} = -\dfrac{10-2\sqrt{75}-5\sqrt{3}+15}{50} =$

$$= -\frac{25-2\cdot5\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{50} = -\frac{25-15\sqrt{3}}{50} = \frac{3\sqrt{3}-5}{10}$$

e. $\mathbf{\dfrac{7-\sqrt{2}}{\sqrt{28}+\sqrt{36}}} = \dfrac{7-\sqrt{2}}{\sqrt{28}+\sqrt{36}} \cdot \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{36}}{\sqrt{28}-\sqrt{36}} = \dfrac{\left(7-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{28}-\sqrt{36}\right)}{28-36} =$

$$= -\frac{\left(7\sqrt{28}-7\sqrt{36}-\sqrt{2\cdot 28}+\sqrt{2\cdot 36}\right)}{8} =$$

$$= -\frac{7\cdot 2\sqrt{7}-7\cdot 6-2\sqrt{14}+6\sqrt{2}}{8} = \frac{-7\sqrt{7}+21+\sqrt{14}-3\sqrt{2}}{4}$$

f. $\mathbf{\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{\sqrt{15}-\sqrt{20}}} = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{\sqrt{15}-\sqrt{20}} \cdot \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{20}}{\sqrt{15}+\sqrt{20}} = \dfrac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{20}\right)}{15-20} =$

$$= -\frac{\left(\sqrt{8\cdot 15}+\sqrt{8\cdot 20}-\sqrt{10\cdot 15}-\sqrt{10\cdot 20}\right)}{5} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{30}+2^2\sqrt{10}-5\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{5} = -\frac{2\sqrt{30}+4\sqrt{10}-5\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{5}$$

LOGARITMOS

18 Calcula, mediante su definición, los siguientes logaritmos y comprueba los resultados con Wiris:

a. $\log_2$ (1 024) = $\log_2 (2^{10}) = 10 \cdot \log_2 (2) = 10 \cdot 1 = 10$

b. $\log_3$ (729) = $\log_3 (3^6) = 6 \cdot \log_3 (3) = 6 \cdot 1 = 6$

c. log (0,000 01) = $\log (1 \cdot 10^{-5}) = -5 \cdot \log (10) = -5 \cdot 1 = -5$

d. $\mathbf{\log_2\left(\dfrac{1}{256}\right)} = \log_2\left(\dfrac{1}{2^8}\right) = \log_2(1) - \log_2\left(2^8\right) = 0 - 8\cdot\log_2(2) = -8\cdot 1 = -8$

e. log (1 000 000) = $\log (1 \cdot 10^6) = 6 \cdot \log (10) = 6 \cdot 1 = 6$

f. $\log_5$ (0,001 6) = $\log_5 \dfrac{16}{10000} = \log_5 \dfrac{2^4}{10^4} = \log_5 \left(\dfrac{1}{5}\right)^4 = \log_5 5^{-4} = -4$

19 Sabiendo que log (5) = 0,699 y log (3) = 0,477, calcula los logaritmos propuestos aplicando sus propiedades. Puedes comprobar los resultados con Wiris.

a. log (30) = $\log (3 \cdot 10) = \log (3) + \log (10) = 0{,}477 + 1 = 1{,}477$

b. log (20) $= \log\left(\dfrac{100}{5}\right) = \log(100) - \log(5) = \log(10^2) - \log(5) = 2\cdot 1 - 0{,}699 = 1{,}301$

c. $\mathbf{\log_5 (0{,}81)} = \dfrac{\log(0{,}81)}{\log(5)} = \dfrac{\log\left(\dfrac{81}{100}\right)}{\log(5)} = \dfrac{\log(81)-\log(100)}{\log(5)} = \dfrac{\log(3^4)-\log(100)}{\log(5)} =$

$$= \frac{4\cdot\log(3)-2}{\log(5)} = \frac{4\cdot 0{,}477-2}{0{,}699} = -0{,}131$$

d. $\log_3 (6{,}25) = \dfrac{\log(6{,}25)}{\log(3)} = \dfrac{\log\left(\dfrac{625}{100}\right)}{\log(3)} = \dfrac{\log(625)-\log(100)}{\log(3)} = \dfrac{\log(5^4)-\log(100)}{\log(3)} =$

$$= \frac{4\cdot\log(5)-\log(100)}{\log(3)} = \frac{4\cdot 0{,}699-2}{0{,}477} = 1{,}669$$

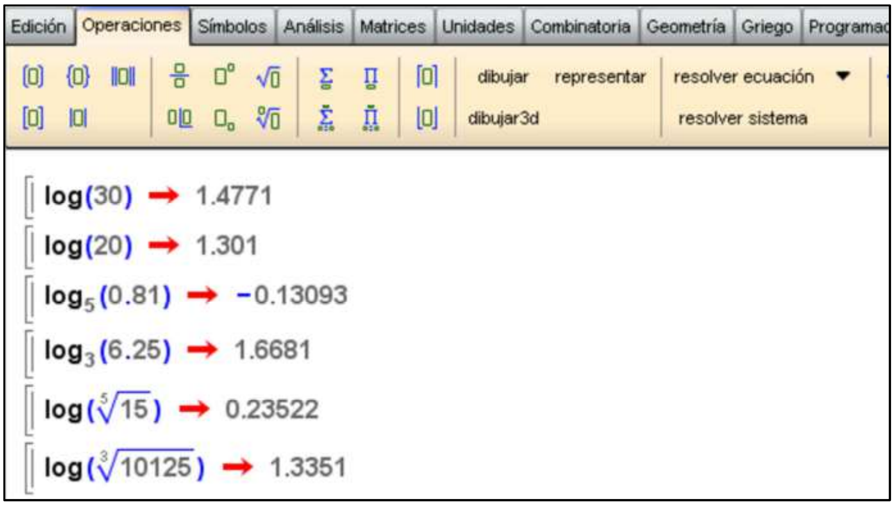
e. $\log(\sqrt[5]{15}) = \log\left(15^{\frac{1}{5}}\right) = \dfrac{1}{5}\cdot\log(15) = \dfrac{1}{5}\cdot\log(3\cdot 5) = \dfrac{1}{5}\cdot(\log(3)+\log(5)) =$

$$= \frac{0{,}477+0{,}699}{5} = 0{,}235\ 2$$

f. $\log(\sqrt[3]{10\,125}) = \log(\sqrt[3]{3^4\cdot 5^3}) = \log(3\cdot 5\sqrt[3]{3}) = \log(15\sqrt[3]{3}) = \log(15)+\log(\sqrt[3]{3}) =$

$$= \log(5)+\log(3)+\log(\sqrt[3]{3}) = \log(5)+\log(3)+\frac{1}{3}\cdot\log(3) =$$

$$= 0{,}699+0{,}477+\frac{1}{3}\cdot 0{,}477 = 1{,}335$$



EVALUACIÓN

1 La intersección de los siguientes intervalos: [–6 , 12), (–2 , 15] y [–10 , 10), es el intervalo:

a. (–2 , 10) **b. [–6 , 15]** **c. [–2 , 10]** **d. [–6 , 10]**

[–6 , 12) ∩ (–2 , 15] ∩ [–10 , 10) = (–2 , 12) ∩ (–10 , 10) = (–2 , 10)

2 Los intereses que producen 4 500 € depositados a un interés compuesto anual del 2 % durante 5 años son:

a. 468,36 € **c. 3 197,44 €**

b. 4 968,36 € **d. 6 697,44 €**

$I = C_T - C_I$ = 4 968,36 –4 500 = 468,36 €.

3 El resultado de la siguiente operación con números en notación científica con una aproximación de 3 cifras significativas es:

$(8{,}9 \cdot 10^{-5} + 9{,}7 \cdot 10^{-4}) \cdot 6 \cdot 10^{5}$

a. $63{,}5 \cdot 10$ b. $6{,}35 \cdot 10^{2}$ **c. $1{,}11 \cdot 10^{-1}$** **d. $1{,}11 \cdot 10^{2}$**

$(8{,}9 \cdot 10^{-5} + 9{,}7 \cdot 10^{-4}) \cdot 6 \cdot 10^{5} = (0{,}89 \cdot 10^{-4} + 9{,}7 \cdot 10^{-4})\, 6 \cdot 10^{5} =$
$= 6 \cdot 10{,}59 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{5} = 63{,}54 \cdot 10 = 635{,}4 = 6{,}35 \cdot 10^{2}$

4 El error relativo cometido al aproximar $\frac{19}{6}$ a 3,17 es:

a. 0,003 **b. 0,004** c. 0,001 **d. 0,002**

$$E_r = \frac{E_a}{A} = \frac{\left|\frac{19}{6} - 3{,}17\right|}{\frac{19}{6}} = 0{,}001$$

5 El resultado simplificado de la expresión $\frac{\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[10]{20}}{\sqrt[6]{180}}$ es:

a. $\sqrt[60]{2^{16} \cdot 5^{8}}$

b. $\sqrt[15]{2^{8} \cdot 5^{4}}$

c. $\sqrt[15]{\frac{3}{2^{8} \cdot 5^{4}}}$

d. $\sqrt[30]{\frac{2^{16} \cdot 5^{8}}{3^{2}}}$

$$\frac{\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[10]{20}}{\sqrt[6]{180}} = \sqrt[30]{\frac{60^{10} \cdot 20^{3}}{180^{5}}} = \sqrt[30]{\frac{(2^{2} \cdot 3 \cdot 5)^{10} \cdot (2^{2} \cdot 5)^{3}}{(2^{2} \cdot 3^{2} \cdot 5)^{5}}} = \sqrt[30]{\frac{2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{6} \cdot 5^{3}}{2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{5}}} =$$
$$= \sqrt[30]{2^{16} \cdot 5^{8}} = \sqrt[15]{2^{8} \cdot 5^{4}}$$

6 El valor de la expresión $4\sqrt[3]{17\,280} - 5\sqrt[3]{33\,750}$ es:

a. $-51\sqrt[3]{10}$ **c. $123\sqrt[3]{10}$**

b. $-27\sqrt[3]{10}$ **d. $-3\sqrt[3]{10}$**

$$4\sqrt[3]{17\,280} - 5\sqrt[3]{33\,750} = 4\sqrt[3]{2^{7} \cdot 3^{3} \cdot 5} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^{3} \cdot 5^{4}} = 4 \cdot 2^{2} \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 5} - 5 \cdot 3 \cdot 5\sqrt[3]{2 \cdot 5} =$$
$$= 48\sqrt[3]{10} - 75\sqrt[3]{10} = -27\sqrt[3]{10}$$

7 La expresión racionalizada de $\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{15}}$ es:

a. $-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$ c. $-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$

b. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{7}$ **d. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6}$**

$$\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{15}}\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{3+\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(3+\sqrt{15}\right)}{3^2-15}=-\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3\cdot15}}{6}=-\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{6}=$$
$$=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$$

8 Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos, el resultado de $\log_4$ (32) es:

a. 2,5 **b. 5** **c. 2** **d. 10**

$\log_4 (32) = \log_4 (2^5) = 5 \cdot \log_4 (2) = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$