MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 4. Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones

UNIDAD 4. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES

SOLUCIONES PÁG. 95

1 Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante los métodos de sustitución, igualación y reducción:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y = 2} \\ \boldsymbol{2x + 4y = 14} \end{cases}$

Si utilizamos el método de sustitución, por ejemplo, se puede despejar la incógnita *x* de la primera ecuación:

$x = 2 + 3y$

$2 \quad (2 + 3y) + 4y = 14 \Rightarrow 4 + 6y + 4y = 14 \Rightarrow 4 + 10y = 14 \Rightarrow 10y = 14 - 4 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{10}{10} = 1$

$x = 2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$

La solución es: $x = 5$, $y = 1$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 11} \\ \boldsymbol{x - 5y = 17} \end{cases}$

Si utilizamos el método de igualación:

$\begin{cases} x + 2y = 11 \Rightarrow x = 11 - 2y \\ x - 5y = -17 \Rightarrow x = -17 + 5y \end{cases}$

$11 - 2y = -17 + 5y \Rightarrow -2y - 5y = -17 - 11 \Rightarrow -7y = -28 \Rightarrow y = \frac{-28}{-7} = 4$

$x = 11 - 2 \cdot 4 = 11 - 8 = 3$

La solución es: $x = 3$, $y = 4$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{-6x + 2y = 0} \\ \boldsymbol{5x - y = -8} \end{cases}$

Si utilizamos el método de reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2:

$5x - y = -8 \Rightarrow 10x - 2y = -16$

Entonces,

$$\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 10x - 2y = -16 \end{cases}$$

$$\overline{4x \qquad = -16}$$

$x = \dfrac{-16}{4} = -4$

$5 \cdot (-4) - y = -8 \Rightarrow -20 - y = -8 \Rightarrow -y = -8 + 20 = 12 \Rightarrow y = -12$

La solución es: $x = -4$, $y = -12$

d. $\begin{cases} \boldsymbol{4x - 5y = -1} \\ \boldsymbol{-3x - y = -4} \end{cases}$

Si utilizamos el método de sustitución, por ejemplo, se puede despejar la incógnita *y* de la segunda ecuación:

$-y = -4 + 3x \Rightarrow y = 4 - 3x$

$4x - 5 \quad (4 - 3x) = -1 \Rightarrow 4x - 20 + 15x = -1 \Rightarrow 19x = -1 + 20 = +19 \Rightarrow x = \dfrac{19}{19} =$

1

$y = 4 - 3x = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$

La solución es: $x = 1$, $y = 1$

e. $\begin{cases} \boldsymbol{-3x + 4y = 2} \\ \boldsymbol{5x - 3y = 4} \end{cases}$

Si utilizamos el método de igualación:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2 - 4y}{-3} \\ x = \dfrac{4 + 3y}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2 - 4y}{-3} = \dfrac{4 + 3y}{5}$$

$5 \cdot (2 - 4y) = (4 + 3y) \cdot (-3) \Rightarrow 10 - 20y = -12 - 9y \Rightarrow -20y + 9y = -12 - 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow -11y = -22 \Rightarrow y = \dfrac{-22}{-11} = 2$

$x = \dfrac{2 - 4y}{-3} = \dfrac{2 - 4 \cdot 2}{-3} = \dfrac{2 - 8}{-3} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

La solución es: $x = 2$, $y = 2$

f. $\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{11} \\ \mathbf{–7}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{–1} \end{cases}$

Si utilizamos el método de reducción, por ejemplo, se pueden multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por (–3):

$\begin{cases} 4x + 6y = 22 \\ 21x - 6y = 3 \end{cases}$

$25x = 25$

$x = \frac{25}{25} = 1$

$2 \cdot 1 + 3y = 11 \Rightarrow 2 + 3y = 11 \Rightarrow 3y = 11 - 2 = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$

La solución es: $x = 1$, $y = 3$

2 Encuentra la solución de los siguientes sistemas utilizando el método más adecuado:

a. $\begin{cases} \mathbf{4}\boldsymbol{x} \mathbf{- 8 + 3 \cdot (}\boldsymbol{y} \mathbf{+ 5) = 4} \\ \mathbf{6}\boldsymbol{x} \mathbf{+ 2 - 5}\boldsymbol{y} \mathbf{+ 15 = 22} \end{cases}$

$\begin{cases} 4x - 8 + 3y + 15 = 4 \Rightarrow 4x + 3y = 4 + 8 - 15 \Rightarrow 4x + 3y = -3 \\ 6x - 5y = 22 - 2 - 15 \Rightarrow 6x - 5y = 5 \end{cases}$

Se puede resolver por el método de reducción, por ejemplo, multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 3:

$4x + 3y = -3 \Rightarrow 20x + 15y = -15$

$6x - 5y = 5 \Rightarrow 18x - 15y = 15$

$20x + 15y = -15$

$18x - 15y = 15$

$38x = 0$

$x = \frac{0}{38} = 0$

$4 \cdot 0 + 3y = -3 \Rightarrow 0 + 3y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{3} = -1$

La solución es: $x = 0$, $y = -1$

b. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{y+1}{4} = 0 \\ \dfrac{5x+2}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{19}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 6 - y - 1 = 0 \Rightarrow 2x - y - 7 = 0 \Rightarrow 2x - y = 7 \\ 10x + 4 + y = 57 \Rightarrow 10x + y = 57 - 4 \Rightarrow\Rightarrow 10x + y = 53 \end{cases}$$

Se puede resolver por el método de reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 10x + y = 53 \end{cases}$$

$12x \quad = 60$

$x = \dfrac{60}{12} = 5$

$2 \cdot 5 - y = 7 \Rightarrow 10 - y = 7 \Rightarrow -y = 7 - 10 = -3 \Rightarrow y = 3$

La solución es: $x = 5$, $y = 3$

SOLUCIONES PÁG. 97

3 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a. $\begin{cases} \mathbf{2x + y - 3z = -1} \\ \mathbf{-4x + 5z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + z = 2} \end{cases}$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita x de la tercera ecuación y se sustituye en las otras ecuaciones para resolverlas:

$x = 2 - 2y - z$

$2 \cdot (2 - 2y - z) + y - 3z = -1 \Rightarrow 4 - 4y - 2z + y - 3z = -1 \Rightarrow -3y - 5z = -1 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3y - 5z = -5$

$-4 \cdot (2 - 2y - z) + 5z = 1 \Rightarrow -8 + 8y + 4z + 5z = 1 \Rightarrow 8y + 9z = 1 + 8 \Rightarrow 8y + 9z = 9$

La ecuación $-3y - 5z = -5$ se multiplica por 8 y la ecuación $8y + 9z = 9$ por 3:

$$\begin{cases} -24y - 40z = -40 \\ 24y + 27z = 27 \end{cases}$$

$-13z = -13$

$z = 1$

$-3y - 5 \cdot 1 = -5 \Rightarrow -3y - 5 = -5 \Rightarrow -3y = -5 + 5 = 0 \Rightarrow y = 0$

$x + 2y + z = 2 \Rightarrow x + 2 \cdot 0 + 1 = 2 \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$

La solución es: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

b. $\begin{cases} \mathbf{-7x + 2y + 4z = -6} \\ \mathbf{x - 2y - 3z = -3} \\ \mathbf{5x + y - 6z = -10} \end{cases}$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita x de la segunda ecuación y se sustituye en las otras ecuaciones para resolverlas:

$x = -3 + 2y + 3z$

$-7 \cdot (-3 + 2y + 3z) + 2y + 4z = -6 \Rightarrow 21 - 14y - 21z + 2y + 4z = 6 \Rightarrow -12y - 17z = -27$

$5 \cdot (-3 + 2y + 3z) + y - 6z = -10 \Rightarrow -15 - 10y + 15z + y - 6z = -10 \Rightarrow 11y + 9z = 5$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-27 + 17z}{-12} \\ y = \dfrac{5 - 9z}{11} \end{cases} \Rightarrow \frac{-27 + 17z}{-12} = \frac{5 - 9z}{11} \Rightarrow 11 \cdot (-27 + 17z) = -12 \cdot (5 - 9z)$$

$\Rightarrow -297 + 187z = -60 + 297 \Rightarrow 79z = 237 \Rightarrow z = 3$

$y = \dfrac{5 - 9z}{11} = \dfrac{5 - 9 \cdot 3}{11} = \dfrac{5 - 27}{11} = \dfrac{-22}{11} = -2$

$x = -3 + 2y + 3z = -3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = -3 - 4 + 9 = -7 + 9 = 2$

La solución es: $x = 2$, $y = -2$, $z = 3$

c. $\begin{cases} \mathbf{3x - 2y - z = 11} \\ \mathbf{2x - 3z = -4} \\ \mathbf{4x + y + z = 1} \end{cases}$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita z de la tercera ecuación y se sustituye en las otras ecuaciones para resolverlas:

$z = 1 - 4x - y$

$3x - 2y - (1 - 4x - y) = 11 \Rightarrow 3x - 2y - 1 + 4x + y = 11 \Rightarrow 7x - y = 12$

$2x - 3 \cdot (1 - 4x - y) = -4 \Rightarrow 2x - 3 + 12x + 3y = -4 \Rightarrow 14x + 3y = -1$

Se multiplica la ecuación $7x - y = 12$ por 3:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 21x - 3y = 36 \\ 14x + 3y = -1 \end{cases} \\ \hline 35x \qquad = 35 \end{array}$$

$x = 1$

$2x - 3z = -4 \Rightarrow 2 - 3z = -4 \Rightarrow -3z = -6 \Rightarrow z = 2$

$4x + y + z = 1 \Rightarrow 4 + y + 2 = 1 \Rightarrow y + 6 = 1 \Rightarrow y = -5$

La solución es: $x = 1$, $y = -5$, $z = 2$

d. $\begin{cases} \boldsymbol{-x + 3y - 5z = 0} \\ \boldsymbol{6x - y + 2z = 0} \\ \boldsymbol{4x - 4y + z = 0} \end{cases}$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita *z* de la tercera ecuación y se sustituye en las otras ecuaciones para resolverlas:

$z = -4x + 4y$

$-x + 3y - 5 \cdot (-4x + 4y) = 0 \Rightarrow -x + 3y + 20x - 20y = 0 \Rightarrow -19x - 17y = 0$

$6x - y + 2 \cdot (-4x + 4y) = 0 \Rightarrow 6x - y - 8x + 8y = 0 \Rightarrow -2x + 7y = 0$

Se multiplica la ecuación $-19x - 17y = 0$ por 2 y la ecuación $-2x + 7y = 0$ por 19:

$$\begin{cases} -38x - 34y = 0 \\ 38x + 133y = 0 \end{cases}$$

$$99x = 0$$

$x = 0$

$-2 \cdot 0 + 7y = 0 \Rightarrow 7y = 0 \Rightarrow y = 0$

$z = -4x + 4y \Rightarrow z = -4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \Rightarrow z = 0$

La solución es: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

4 Halla la solución de los siguientes sistemas aplicando el método de igualación:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y - 8z = -2} \\ \boldsymbol{5x - y - z = 13} \\ \boldsymbol{2x - 5y + 4z = 5} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3y + 8z - 2 \\ x = \dfrac{y + z + 13}{5} \\ x = \dfrac{5y - 4z + 5}{2} \end{cases}$$

$-3y + 8z - 2 = \dfrac{y + z + 13}{5} \Rightarrow -15y + 40z - 10 = y + z + 13 \Rightarrow -16y + 39z = 23$

$-3y + 8z - 2 = \dfrac{5y - 4z + 5}{2} \Rightarrow -6y + 16z - 4 = 5y - 4z + 5 \Rightarrow -11y + 20z = 9$

Se multiplica la ecuación $-16y + 39z = 23$ por (-11) y la ecuación $-11y + 20z =$
$= 9$ por 16:

$$\begin{cases} 176y - 429z = -253 \\ -176y + 320z = 144 \end{cases}$$

$$-109z = -109$$

$z = 1$

$-11y + 20z = 9 \Rightarrow -11y + 20 = 9 \Rightarrow -11y = 9 - 20 \Rightarrow -11y = -11 \Rightarrow y = 1$

$x = -3y + 8z - 2 \Rightarrow x = -3 + 8 - 2 = 3$

La solución es: $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{-x + 4y + z = 10} \\ \boldsymbol{3x - 5y - z = -16} \\ \boldsymbol{-2x + y + 2z = 6} \end{cases}$

$$\begin{cases} z = x - 4y + 10 \\ z = 3x - 5y + 16 \\ z = \dfrac{2x - y + 6}{2} \end{cases}$$

$x - 4y + 10 = 3x - 5y + 16 \Rightarrow -2x + y = 6$

$x - 4y + 10 = \dfrac{2x - y + 6}{2} \Rightarrow 2x - 8y + 20 = 2x - y + 6 \Rightarrow -7y = -14 \Rightarrow y = 2$

$-2x + y = 6 \Rightarrow -2x + 2 = 6 \Rightarrow -2x = 6 - 2 = 4 \Rightarrow x = -2$

$z = x - 4y + 10 \Rightarrow z = -2 - 4 \cdot 2 + 10 = -2 - 8 + 10 = 0$

La solución es: $x = -2$, $y = 2$, $z = 0$

c. $\begin{cases} \mathbf{5}y - \mathbf{3}z = -\mathbf{4} \\ \mathbf{4}x + \mathbf{9}z = -\mathbf{1} \\ \mathbf{2}x - \mathbf{3}y = -\mathbf{17} \end{cases}$

$$\begin{cases} z = \dfrac{-5y - 4}{-3} \\ z = \dfrac{-4x - 1}{9} \end{cases} \Rightarrow 9 \cdot (-5y - 4) = -3 \cdot (-4x - 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow -45y - 36 = 12x + 3 \Rightarrow -12x - 45y = 3 + 36 \Rightarrow -12x - 45y = 39$

Resolvemos ahora estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -17 \\ -12x - 45y = 39 \end{cases}$$

Se multiplica la primera ecuación por 6:

$$\begin{cases} 12x - 18y = -102 \\ -12x - 45y = 39 \end{cases}$$

$$-63y = -63$$

$y = 1$

$2x - 3y = -17 \Rightarrow 2x - 3 = -17 \Rightarrow 2x = -17 + 3 \Rightarrow 2x = -14 \Rightarrow x = -7$

$z = \dfrac{-5y-4}{-3} \Rightarrow z = \dfrac{-5-4}{-3} = \dfrac{-9}{-3} = 3$

La solución es: $x = -7$, $y = 1$, $z = 3$

d. $$\begin{cases} \mathbf{2x - 6y + z = 10} \\ \mathbf{x + 2y + 4z = 9} \\ \mathbf{x - 3y + 5z = 23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{6y - z + 10}{2} \\ x = -2y - 4z + 9 \\ x = 3y - 5z + 23 \end{cases}$$

$-2y - 4z + 9 = \dfrac{6y - z + 10}{2} \Rightarrow -4y - 8z + 18 = 6y - z + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4y - 6y - 8z + z = 10 - 18 \Rightarrow -10y - 7z = -8$

$-2y - 4z + 9 = 3y - 5z + 23 \Rightarrow -2y - 3y - 4z + 5z = 23 - 9 \Rightarrow -5y + z = 14$

Se resuelven estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -10y - 7z = -8 \\ -5y + z = 14 \end{cases}$$

Se multiplica la segunda ecuación por (–2):

$-10y - 7z = -8$

$10y - 2z = -28$

$$-9z = -36$$

$z = 4$

$-5y + z = 14 \Rightarrow -5y + 4 = 14 \Rightarrow -5y = 14 - 4 \Rightarrow -5y = 10 \Rightarrow y = -2$

$x = -2y - 4z + 9 \Rightarrow x = -2 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 + 9 \Rightarrow x = 4 - 16 + 9 \Rightarrow x = -3$

La solución es: $x = -3$, $y = -2$, $z = 4$

5 ¿Tienen todos los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas homogéneos como solución la terna (0, 0, 0)? En caso afirmativo, ¿es siempre única esta solución? Justifica tu respuesta y pon un ejemplo.

Sí, todos los sistemas homogéneos tienen como solución (0, 0, 0). Esta solución no es única cuando las ecuaciones son proporcionales; en este caso el sistema tiene infinitas soluciones.

6 Determina la solución de estos sistemas por el método de reducción:

a. $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y - 2z = 5} \\ \mathbf{x - 4y + z = -3} \\ \mathbf{x + 5y + 3z = 6} \end{cases}$

Formamos dos sistemas de ecuaciones y aplicamos el método de reducción:

$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 4y + z = -3 \end{cases}$

↓ Se multiplica la segunda ecuación por (–3)

$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ -3x + 12y - 3z = 9 \end{cases}$

$14y - 5z = 14$

$\begin{cases} x - 4y + z = -3 \\ x + 5y + 3z = 6 \end{cases}$

↓ Se multiplica la primera ecuación por (–1)

$\begin{cases} -x + 4y - z = 3 \\ x + 5y + 3z = 6 \end{cases}$

$9y + 2z = 9$

Se resuelve el sistema con estas dos ecuaciones:

$\begin{cases} 14y - 5z = 14 \\ 9y + 2z = 9 \end{cases}$

La primera ecuación se multiplica por 2 y la segunda ecuación por 5:

$\begin{cases} 28y - 10z = 28 \\ 45y + 10z = 45 \end{cases}$

$73y = 73$

$y = 1$

$9y + 2z = 9 \Rightarrow 9 + 2z = 9 \Rightarrow 2z = 9 - 9 \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$

$x - 4y + z = -3 \Rightarrow x = 4y - z - 3 \Rightarrow x = 4 - 0 - 3 \Rightarrow x = 1$

La solución es: $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$

b. $\begin{cases} \mathbf{2x + y - 7z = -4} \\ \mathbf{4x - y - 3z = 12} \\ \mathbf{-3x + y + 4z = -8} \end{cases}$

Formamos dos sistemas de ecuaciones:

$\begin{cases} 2x + y - 7z = -4 \\ 4x - y - 3z = 12 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 4x - y - 3z = 12 \\ -3x + y + 4z = -8 \end{cases}$

$\downarrow$ Se aplica el método de reducción: $\qquad$ $\downarrow$ Se aplica el método de reducción:

$\begin{cases} 2x + y - 7z = -4 \\ 4x - y - 3z = 12 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 4x - y - 3z = 12 \\ -3x + y + 4z = -8 \end{cases}$

$6x \quad - 10z = 8$ $\qquad$ $x \quad + z = 4$

Se resuelve el sistema con estas dos ecuaciones:

$\begin{cases} 6x - 10z = 8 \\ x + z = 4 \Rightarrow x = -z + 4 \end{cases}$

$6 \cdot (-z + 4) - 10z = 8 \Rightarrow -6z + 24 - 10z = 8 \Rightarrow -16z = 8 - 24 \Rightarrow -16z = -16 \Rightarrow z = 1$

$x = -z + 4 \Rightarrow x = -1 + 4 = 3$

$2x + y - 7z = -4 \Rightarrow 2 \cdot 3 + y - 7 = -4 \Rightarrow \Rightarrow 6 + y - 7 = -4 \Rightarrow y = -4 - 6 + 7 = -3$

La solución es: $x = 3$, $y = -3$, $z = 1$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x + y - 5z = 3} \\ \boldsymbol{-2x + 3z = -7} \\ \boldsymbol{4x - 8y = 40} \end{cases}$

Formamos dos sistemas de ecuaciones:

$\begin{cases} x + y - 5z = 3 \\ -2x + 3z = -7 \end{cases}$

↓ Se multiplica la primera ecuación por 2

$\begin{cases} 2x + 2y - 10z = 6 \\ -2x \quad + 3z = -7 \end{cases}$

$2y – 7z = –1$

$\begin{cases} x + y - 5z = 3 \\ 4x - 8y = 40 \end{cases}$

↓ Se multiplica la primera ecuación por (–4)

$\begin{cases} -4x - 4y + 20z = -12 \\ 4x - 8y \quad = 40 \end{cases}$

$–12y + 20z = 28$

Se resuelve el sistema con estas dos ecuaciones:

$\begin{cases} 2y - 7z = -1 \\ -12y + 20z = 28 \end{cases}$

La primera ecuación se multiplica por 6:

$\begin{cases} 12y - 42z = -6 \\ -12y + 20z = 28 \end{cases}$

$–22z = 22$

$z = –1$

$2y – 7z = –1 \Rightarrow 2y – 7 \cdot (–1) = –1 \Rightarrow 2y + 7 = –1 \Rightarrow 2y = –1 – 7 \Rightarrow 2y = –8 \Rightarrow y = –4$

$x + y – 5z = 3 \Rightarrow x = –y + 5z + 3 \Rightarrow x = – (–4) + 5 \cdot (–1) + 3 \Rightarrow 4 – 5 + 3 = 2$

La solución es: $x = 2$, $y = –4$, $z = –1$

d. $\begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - 3y + z = 1} \\ \boldsymbol{-x + 4y - 5z = 5} \end{cases}$

Formamos dos sistemas de ecuaciones:

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$

↓ Se multiplica la primera ecuación por (–2)

$\begin{cases} -2x + 2y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$

$-y - z = -5$

↓ Se multiplica por (–1)

$y + z = 5$

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 4y - 5z = 5 \end{cases}$

↓ Se suman las dos ecuaciones

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 4y - 5z = 5 \end{cases}$

$3y - 4z = 8$

Se resuelve el sistema con estas dos ecuaciones:

$y + z = 15 \Rightarrow y = 5 - z$

$3y - 4z = 8 \Rightarrow 3 \cdot (5 - z) - 4z = 8 \Rightarrow 15 - 3z - 4z = 8 \Rightarrow 15 - 7z = 8 \Rightarrow -7z = 8 - 15$

$\Rightarrow -7z = -7 \Rightarrow z = 1$

$y = 5 - z \Rightarrow y = 5 - 1 \Rightarrow y = 4$

$x - y + z = 3 \Rightarrow x = y - z + 3 \Rightarrow x = 4 - 1 + 3 \Rightarrow x = 6$

La solución es: $x = 6$, $y = 4$, z = 1

7 Encuentra la solución de los siguientes sistemas aplicando, en cada caso, el método más adecuado:

a. $\begin{cases} \mathbf{6 \cdot (x - y) = 3 \cdot (z - 1)} \\ \mathbf{2x + 4 \cdot (y + 3) = 6z - 4} \\ \mathbf{-x + 5y = -(-2 + z)} \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x - 6y = 3z - 3 \Rightarrow 6x - 6y - 3z = -3 \Rightarrow 2x - 2y - z = -1 \\ 2x + 4y + 12 = 6z - 4 \Rightarrow 2x + 4y - 6z = -16 \Rightarrow x + 2y - 3z = -8 \\ -x + 5y = 2 - z \Rightarrow -x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de reducción. Formamos dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ x + 2y - 3z = -8 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la segunda ecuación por (–2)

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ -2x - 4y + 6z = 16 \end{cases}$$

$-6y + 5z = 15$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -8 \\ -x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

$7y - 2z = -6$

Se resuelve el sistema con estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -6y + 5z = 15 \\ 7y - 2z = -6 \end{cases}$$

La primera ecuación se multiplica por 2 y la segunda ecuación por 5:

$$\begin{cases} -12y + 10z = 30 \\ 35y - 10z = -30 \end{cases}$$

$23y \quad = 0$

$y = 0$

$-6y + 5z = 15 \Rightarrow -6 \cdot 0y + 5z = 15 \Rightarrow 5z = 15 \Rightarrow z = 3$

$x + 2y - 3z = -8 \Rightarrow x = -2y + 3z - 8 \Rightarrow x = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 8 \Rightarrow x = 9 - 8 \Rightarrow x = 1$

La solución es: $x = 1$, $y = 0$, z = 3

b. $\begin{cases} \mathbf{3 \cdot (x + 2) - 4 \cdot (y + 1) - 2 \cdot (z + 3) = 0} \\ \mathbf{-(x + 4) + 2 \cdot (y - 2) + 5 \cdot (z + 2) = 0} \\ \mathbf{2 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (y + 2) - (z - 5) = 0} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 6 - 4y - 4 - 2z - 6 = 0 \Rightarrow 3x - 4y - 2z = 4 \\ -x - 4 + 2y - 4 + 5z + 10 = 0 \Rightarrow -x + 2y + 5z = -2 \\ 2x - 2 - 3y - 6 - z + 5 = 0 \Rightarrow 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de sustitución. Despejamos la incógnita x en la segunda ecuación y sustituimos su valor en las otras dos ecuaciones:

$x = 2y + 5z + 2$

$$\begin{cases} 3 \cdot (2y + 5z + 2) - 4y - 2z = 4 \Rightarrow 6y + 15z + 6 - 4y - 2z = 4 \Rightarrow 2y + 13z = -2 \\ 2 \cdot (2y + 5z + 2) - 3y - z = 3 \Rightarrow 4y + 10z + 4 - 3y - z = 3 \Rightarrow y = -1 - 9z \end{cases}$$

$2y + 13z = -2 \Rightarrow 2 \cdot (-1 - 9z) + 13z = -2 \Rightarrow -2 - 18z + 13z = -2 \Rightarrow -5z = 0 \Rightarrow z = 0$

$y = -1 - 9z \Rightarrow y = -1 - 9 \cdot 0 \Rightarrow y = -1$

$x = 2y + 5z + 2 \Rightarrow x = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 2 \Rightarrow x = 0$

La solución es: $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$

c. $\begin{cases} \mathbf{2 \cdot (x + 3y) - 5 \cdot (2y + 1) = -4z - 1} \\ \mathbf{x - 3y - (y + 2z) = -4} \\ \mathbf{z + y = x} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 6y - 10y - 5 = -4z - 1 \Rightarrow 2x - 4y + 4z = 4 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ x - 3y - y - 2z = -4 \Rightarrow x - 4y - 2z = -4 \end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de igualación. Despejamos la incógnita x en todas las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2y - 2z + 2 \\ x = 4y + 2z - 4 \\ x = y + z \end{cases}$$

$2y - 2z + 2 = y + z \Rightarrow 2y - 2z - y - z = -2 \Rightarrow y - 3z = -2 \Rightarrow y = -2 + 3z$

$4y + 2z - 4 = y + z \Rightarrow 4y + 2z - y - z = 4 \Rightarrow 3y + z = 4 \Rightarrow 3 \cdot (-2 + 3z) + z = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6 + 9z + z = 4 \Rightarrow -6 + 10z = 4 \Rightarrow 10z = 4 + 6 \Rightarrow 10z = 10 \Rightarrow z = 1$

$y = -2 + 3z = -2 + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1$

$x = y + z = 1 + 1 = 2$

La solución es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$

SOLUCIONES PÁG. 99

8 Resuelve estos sistemas por el método de Gauss:

a. $$\begin{cases} \boldsymbol{x+3y+4z=6} \\ \boldsymbol{2x-y-7z=-1} \\ \boldsymbol{5x+2y-z=-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+4z=6 \\ 2x-y-7z=-1 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por (–2)

$$\begin{cases} -2x-6y-8z=-12 \\ 2x-y-7z=-1 \end{cases}$$

$$-7y-15z=-13$$

$$\begin{cases} x+3y+4z=6 \\ 5x+2y-z=-1 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por (–5)

$$\begin{cases} -5x-15y-20z=-30 \\ 5x+2y-z=-1 \end{cases}$$

$$-13y-21z=-31$$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+3y+4z=6 \\ -7y-15z=-13 \\ -13y-21z=-31 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita *y.*

$$\begin{cases} -7y-15z=-13 \\ -13y-21z=-31 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por 13 y la segunda por (–7)

$$\begin{cases} -91y-195z=-169 \\ 91y+147z=+217 \end{cases}$$

$$-48z=48$$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 6 \\ -7y - 15z = -13 \\ -48z = 48 \end{cases}$$

Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$-48z = 48 \Rightarrow z = -1$

$-7y - 15z = -13 \Rightarrow -7y - 15 \cdot (-1) = -13 \Rightarrow -7y + 15 = -13 \Rightarrow -7y = -28 \Rightarrow y = 4$

$x + 3y + 4z = 6 \Rightarrow x = 6 - 3y - 4z \Rightarrow x = 6 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) \Rightarrow x = 6 - 12 + 4 \Rightarrow x = -2$

La solución es: $x = -2$, $y = 4$, $z = -1$

b. $$\begin{cases} \mathbf{6x - 2y - 3z = -9} \\ \mathbf{-3x + 4y + z = -7} \\ \mathbf{x - 5y - 2z = 5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 2z = 5 \\ -3x + 4y + z = -7 \\ 6x - 2y - 3z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y - 2z = 5 \\ -3x + 4y + z = -7 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por 3

$$\begin{cases} 3x - 15y - 6z = 15 \\ -3x + 4y + z = -7 \end{cases}$$

$-11y - 5z = 8$

$$\begin{cases} x - 5y - 2z = 5 \\ 6x - 2y - 3z = -9 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por (–6)

$$\begin{cases} -6x - 30y - 12z = -30 \\ 6x - 2y - 3z = -9 \end{cases}$$

$28y + 9z = -39$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 5y - 2z = 5 \\ -11y - 5z = 8 \\ 28y + 9z = -39 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita *y.*

$$\begin{cases} -11y - 5z = 8 \\ 28y + 9z = -39 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la primera ecuación por 28 y la segunda por 11

$$\begin{cases} -308y - 140z = 224 \\ 308y + 99z = -429 \end{cases}$$

$$-41z = -205$$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 5y - 2z = 5 \\ -11y - 5z = 8 \\ -41z = -205 \end{cases}$$ Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$-41z = -205 \Rightarrow z = 5$

$-11y - 5z = 8 \Rightarrow -11y - 5 \cdot 5 = 8 \Rightarrow -11y - 25 = 8 \Rightarrow -11y = 33 \Rightarrow y = -3$

$x - 5y - 2z = 5 \Rightarrow x = 5y + 2z + 5 \Rightarrow x = 5 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + 5 \Rightarrow x = -15 + 10 + 5 \Rightarrow x = 0$

La solución es: $x = 0$, $y = -3$, z = 5

9 El método de Gauss recibe su nombre del matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Busca información biográfica sobre él en Internet y averigua cuáles han sido algunas de sus numerosas contribuciones a las matemáticas.

Respuesta abierta.

10 Halla las soluciones de los siguientes sistemas utilizando la representación matricial:

a. $$\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y + 3z = 12} \\ \boldsymbol{-x + 4y - z = -10} \\ \boldsymbol{3x + 5y + 2z = 11} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ -1 & 4 & -1 & -10 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = E_3 - 3 \cdot E_1]{E_2 = E_2 + E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & -25 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = 2E_3 - 11 \cdot E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -36 & -72 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 12 \\ 2y + 2z = 2 \\ -36z = -72 \end{cases} \Rightarrow z = 2, y = -1, x = 4$$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{x-2y-3z=0} \\ \boldsymbol{-2x-5z=-5} \\ \boldsymbol{4x-y-8z=11} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -5 \\ 4 & -1 & -8 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=E_3-4\cdot E_1]{E_2=E_2+2\cdot E_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=4\cdot E_3+7\cdot E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y-3z=0 \\ -4y-z=-5 \\ 9z=9 \end{array}\right\} \Rightarrow z=1, y=1, x=5$$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{4x-5y+z=0} \\ \boldsymbol{-7x+2y+3z=-2} \\ \boldsymbol{3x-2y+4z=5} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & -5 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=4\cdot E_3-3\cdot E_1]{E_2=4\cdot E_2+7\cdot E_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -27 & 19 & -8 \\ 0 & 7 & 13 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=27\cdot E_3+7\cdot E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -27 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 484 & 484 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x-5y+z=0 \\ -27y+19z=-8 \\ 484z=484 \end{array}\right\} \Rightarrow z=1, y=1, x=1$$

d. $\begin{cases} \boldsymbol{2x-5y-3z=-1} \\ \boldsymbol{4x+2y+z=19} \\ \boldsymbol{-2x-3y=-5} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 19 \\ -2 & -3 & 0 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=E_3+E_1]{E_2=E_2-2\cdot E_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 7 & 21 \\ 0 & -8 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=12\cdot E_3+8\cdot E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 20 & 60 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-5y-3z=-1 \\ 12y+7z=21 \\ 20z=60 \end{array}\right\} \Rightarrow z=3, y=0, x=4$$

SOLUCIONES PÁG. 101

11 Resuelve los siguientes sistemas no lineales por el método de sustitución:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - y^2 = -3} \\ \boldsymbol{-2x + y = 0} \end{cases}$

Se despeja la incógnita y en la segunda ecuación: $y = 2x$, y se sustituye en la primera:

$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - (2x)^2 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x^2 = -3 \Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm 1$

- Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 \Rightarrow y = 2$
- Si $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) \Rightarrow y = -2$

Las soluciones obtenidas son: (1 , 2), (–1 , –2)

b. $\begin{cases} \boldsymbol{5x - 3y = -8} \\ \boldsymbol{x \cdot y = 12} \end{cases}$

Se despeja la incógnita y en la segunda ecuación: $y = \dfrac{12}{x}$, y se sustituye en la primera:

$5x - 3 \cdot \dfrac{12}{x} = -8 \Rightarrow 5x - \dfrac{36}{x} = -8 \Rightarrow 5x^2 - 36 = -8x \Rightarrow 5x^2 + 8x - 36 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 5 \cdot (-36)}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{10} = \frac{-8 \pm 28}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8+28}{10} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-8-28}{10} = \dfrac{-18}{5} \end{cases}$$

- Si $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \dfrac{12}{2} = 6$
- Si $x_2 = \dfrac{-18}{5} \Rightarrow y_2 = \dfrac{12}{\frac{-18}{5}} = \dfrac{12 \cdot 5}{-18} = -\dfrac{60}{18} = -\dfrac{10}{3}$

Las soluciones obtenidas son: (2 , 6), $\left(-\dfrac{18}{5}, -\dfrac{10}{3}\right)$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = -1} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 + 3x = 4} \end{cases}$

Se despeja la incógnita y en la primera ecuación: $y = -1 - x$, y se sustituye en la segunda:

$x^2 + (-1 - x)^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 1^2 + x^2 + 2x + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-5-7}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

- Si $x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$
- Si $x_2 = -3 \Rightarrow y_1 = -1 - (-3) = 2$

Las soluciones obtenidas son: $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $(-3, 2)$

d. $\begin{cases} \boldsymbol{4x - 5y = 1} \\ \boldsymbol{x - y^2 = -5} \end{cases}$

Se despeja la incógnita x en la segunda ecuación: $x = -5 + y^2$, y se sustituye en la primera:

$4 \cdot (-5 + y^2) - 5y = 1 \Rightarrow -20 + 4y^2 - 5y - 1 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 21 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot (-21)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{5 \pm 19}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{5+19}{8} = \dfrac{24}{8} = 3 \\ y_2 = \dfrac{5-19}{8} = \dfrac{-14}{8} = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

- Si $y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = -5 + 3^2 = 4$
- Si $y_2 = -\frac{7}{4} \Rightarrow x_2 = -5 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = -5 + \frac{49}{16} = \frac{-80 + 49}{16} = \frac{-31}{16}$

Las soluciones obtenidas son: $(4, 3)$, $(-\frac{31}{16}, -\frac{7}{4})$

12 Halla las soluciones de estos sistemas utilizando el método de igualación:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y = 2} \\ \boldsymbol{3x + y = 4} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = 4 - 3x$$

$2 - x^2 = 4 - 3x \Rightarrow 4 - 3x - 2 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$; $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

- Si $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$
- Si $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$

Las soluciones obtenidas son: (2 , –2), (1 , 1)

b. $\begin{cases} \boldsymbol{y^2 = 4x - 3} \\ \boldsymbol{y^2 = 3 + 2x} \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 = 4x - 3 \\ y^2 = 3 + 2x \end{cases} \Rightarrow 4x - 3 = 3 + 2x \Rightarrow 4x - 2x = 3 + 3 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$y^2 = 3 + 2x \Rightarrow y^2 = 3 + 2 \cdot 3 \Rightarrow y^2 = 3 + 6 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9} = \pm 3$

Las soluciones obtenidas son: (3 , 3), (3 , –3)

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 5y = 1} \\ \boldsymbol{4x + 5y^2 = 4} \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 4x + 5y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 5y \\ x = \dfrac{4 - 5y^2}{4} \end{cases}$$

$$1 - 5y = \frac{4 - 5y^2}{4} \Rightarrow 4 - 20y = 4 - 5y^2 \Rightarrow 5y^2 - 20y = 0 \Rightarrow y(5y - 20) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ 5y_2 = 20 \Rightarrow y_2 = 4 \end{cases}$$

- Si $y_1 = 0 \Rightarrow x = 1 - 5y \Rightarrow x = 1$
- Si $y_2 = 4 \Rightarrow x = 1 - 5 \cdot 4 \Rightarrow x = 1 - 20 = -19$

Las soluciones obtenidas son: (1 , 0), (–19 , 4)

13 Encuentra la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de reducción:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - y^2 = 9} \\ \boldsymbol{3x^2 - 4y^2 = 11} \end{cases}$

Se multiplica por –3 a la primera ecuación ⇒ $-3x^2 + 3y^2 = -27$ y se suman:

$$\begin{cases} -3x^2 + 3y^2 = -27 \\ 3x^2 - 4y^2 = 11 \end{cases}$$

$-y^2 = -16$

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16} = \pm 4$

- Si $y_1 = 4 \Rightarrow x^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5$
- Si $y_2 = -4 \Rightarrow x^2 - (-4)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 16 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5$

Las soluciones obtenidas son: (5 , 4), (–5 , 4), (5 , –4), (–5 , –4)

b. $\begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{x} - \sqrt{y} = -5} \\ \boldsymbol{2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 17} \end{cases}$

Se multiplica por –2 a la primera ecuación y se suman:

$$\begin{cases} -2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 17 \end{cases}$$

$3\sqrt{y} = 27$

Si $y = 81 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{81} = -5 \Rightarrow \sqrt{x} = -5 + \sqrt{81} \Rightarrow \sqrt{x} = -5 + 9 = 4 \Rightarrow x = 4^2 = 16$

La solución obtenida es: (16 , 81)

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 3y^2 + 2xy = 17} \\ \boldsymbol{x^2 - 3y^2 - 2xy = -15} \end{cases}$

Se suman las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 2xy = 17 \\ x^2 - 3y^2 - 2xy = -15 \end{cases}$$

$$\overline{2x^2 \qquad\qquad = 2}$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

- Si $x_1 = 1 \Rightarrow 1^2 + 3y^2 + 2y = 17 \Rightarrow 3y^2 + 2y - 16 = 0$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-2+14}{6} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ y_2 = \dfrac{-2-14}{6} = \dfrac{-16}{6} = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

- Si $x_1 = -1 \Rightarrow (-1)^2 + 3y^2 - 2y = 17 \Rightarrow 1 + 3y^2 - 2y = 17 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 16 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{2 \pm 14}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = \dfrac{2+14}{6} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3} \\ y_4 = \dfrac{2-14}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son: $(1, 2)$, $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$, $\left(-1, \frac{8}{3}\right)$, $(-1, -2)$

d. $\begin{cases} \mathbf{4x^2 + y^2 = 1} \\ \mathbf{-x^2 + 3y = 5} \end{cases}$

Se multiplica la segunda ecuación por 4 y se suman las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ -4x^2 + 12y = 20 \end{cases}$$

$$y^2 + 12y = 21$$

$y^2 + 12y - 21 = 0$

$$y = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 84}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{228}}{2} =$$

$$= \frac{-12 \pm 2\sqrt{57}}{2} = -6 \pm \sqrt{57} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -6 + \sqrt{57} \\ y_2 = -6 - \sqrt{57} \end{cases}$$

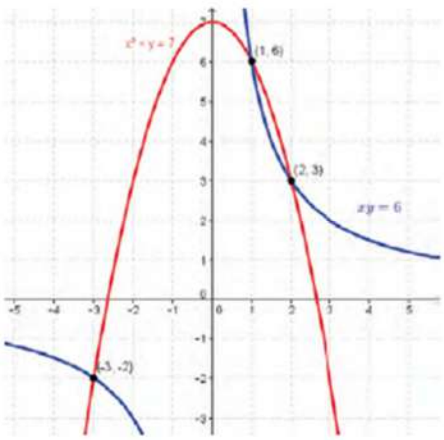
- Si $y_1 = -6 + \sqrt{57} \Rightarrow -x^2 + 3 \cdot (-6 + \sqrt{57}) = 5 \Rightarrow -x^2 - 18 + 3\sqrt{57} = 5 \Rightarrow$

  $\Rightarrow -x^2 = 23 - 3\sqrt{57} \Rightarrow x = \sqrt{-23 + 3\sqrt{57}} = 0{,}59i$

No tiene solución en los números reales.

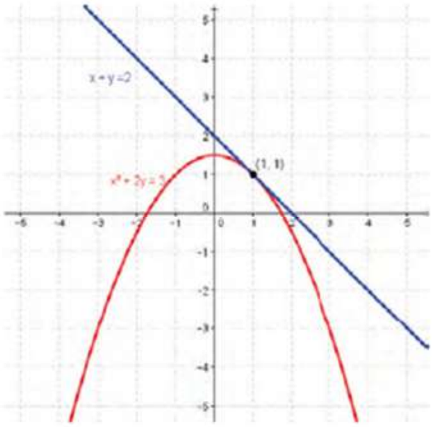
14 Representa gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales e indica su solución:

a. $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y = 7} \\ \mathbf{x \cdot y = 6} \end{cases}$



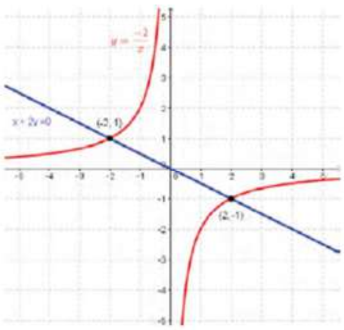
$x_1 = -3$, $y_1 = -2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 6$; $x_3 = 2$, $y_3 = 3$

b. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + 2y = 3 \end{cases}$



$x = 1$, $y = 1$

c. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = \dfrac{-2}{x} \end{cases}$



$x_1 = -2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = -1$

15 Resuelve estos sistemas utilizando el método más adecuado:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 4xy = -35} \\ \boldsymbol{x - y = 2} \end{cases}$

Vamos a resolver el sistema por el método de sustitución.

Se despeja la x de la segunda ecuación, $x = 2 + y$, y se sustituye en la primera:

$x^2 - 4xy = -35 \Rightarrow (2 + y)^2 - 4 \cdot (2 + y) \cdot y = -35 \Rightarrow 4 + y^2 + 4y - 8y - 4y^2 = -35 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3y^2 - 4y + 39 = 0 \Rightarrow 3y^2 + 4y - 39 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-39)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 468}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-4 \pm 22}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-4 + 22}{6} = \dfrac{18}{6} = 3 \\ y_2 = \dfrac{-4 - 22}{6} = \dfrac{-26}{6} = -\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

- Si $y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2 + y_1 = 2 + 3 = 5$
- Si $y_2 = -\dfrac{13}{3} \Rightarrow x_2 = 2 + y_2 = 2 - \dfrac{13}{3} = \dfrac{6 - 13}{3} = \dfrac{-7}{3}$

Las soluciones obtenidas son: $(5 , 3)$, $\left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{13}{3}\right)$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{x + 1} + y = 1} \\ \boldsymbol{2x + y = 5} \end{cases}$

Se va a resolver por reducción.

Se multiplica por –1 a la segunda ecuación, $-2x - y = -5$, y se suman:

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} + y = 1 \\ -2x - y = -5 \end{cases}$$

$\sqrt{x+1} - 2x = -4$

$\sqrt{x+1} = 2x - 4$

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (2x - 4)^2$

$x + 1 = 4x^2 + 16 - 2 \cdot 2x \cdot 4$

$x + 1 = 4x^2 + 16 - 16x$

$4x^2 + 16 - 16x - x - 1 = 0$

$4x^2 - 17x + 15 = 0$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot4\cdot15}}{2\cdot4}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{8}=\frac{17\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{17\pm7}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{24}{8}=3\\ x_2=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

$-2x - y = -5 \Rightarrow y = 5 - 2x$

- Si $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$
- Si $x_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow y_1 = 5 - 2 \cdot \frac{5}{4} = 5 - \frac{10}{4} = \frac{20-10}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Se comprueba en el sistema inicial:

- $(3\ ,\ -1) \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}+y=1\Rightarrow\sqrt{3+1}-1=1\Rightarrow 2-1=1\Rightarrow 1=1\\ 2x+y=5\Rightarrow 2\cdot3-1=5\Rightarrow 6-1=5\Rightarrow 5=5\end{cases}$
- $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}+y=1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{5}{4}+1}+\dfrac{5}{2}=1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{5+4}{4}}+\dfrac{5}{2}=1\Rightarrow\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=1\Rightarrow 4\neq1\\ 2x+y=5\Rightarrow 2\cdot\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{2}=5\Rightarrow\dfrac{10}{4}+\dfrac{5}{2}=5\Rightarrow\dfrac{20}{4}=5\Rightarrow 5=5\end{cases}$

Por tanto, la solución es: (3 , –1)

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 26} \\ \boldsymbol{(x - y)^2 = 16} \end{cases}$

Se desarrolla el cuadrado perfecto de la segunda ecuación y se multiplica por –1, $-x^2 - y^2 + 2xy = -16$. Luego se resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ -x^2 - y^2 + 2xy = -16 \end{cases}$$

$$2xy = 10$$

$xy = \dfrac{10}{2} = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{y}$

Se sustituye en la segunda ecuación del sistema inicial:

$(x - y)^2 = 16 \Rightarrow \left(\dfrac{5}{y} - y\right)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{\left(\dfrac{5}{y} - y\right)^2} = \sqrt{16} \Rightarrow \dfrac{5}{y} - y = \pm 4$

- Si $\dfrac{5}{y} - y = 4 \Rightarrow \dfrac{5 - y^2}{y} = 4 \Rightarrow 5 - y^2 = 4y \Rightarrow y^2 + 4y - 5 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-4 + 6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_2 = \dfrac{-4 - 6}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

- Si $\dfrac{5}{y} - y = -4 \Rightarrow \dfrac{5 - y^2}{y} = -4 \Rightarrow 5 - y^2 = -4y \Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_3 = \dfrac{4 + 6}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ y_4 = \dfrac{4 - 6}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

- Si $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{5}{y} = \dfrac{5}{1} = 5$
- Si $y_2 = –5 \Rightarrow x_2 = \dfrac{5}{–5} = –1$
- Si $y_3 = 5 \Rightarrow x_3 = \dfrac{5}{5} = 1$
- Si $y_4 = –1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{5}{–1} = –5$

Las soluciones obtenidas son: (5 , 1), (–1 , –5), (1 , 5), (–5 , –1)

d. $\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}} \\ \boldsymbol{x\cdot y=12} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3} \\ x\cdot y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x\cdot y}=\dfrac{10}{3} \\ x=\dfrac{12}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x\cdot y}=\dfrac{10}{3} \\ x=\dfrac{12}{y} \end{cases}$$

Se sustituye la segunda ecuación en la primera:

$$\frac{x^2+y^2}{\frac{12}{y}\cdot y}=\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{12}=\frac{10}{3} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{120}{3} \Rightarrow x^2+y^2=40$$

$$\left(\frac{12}{y}\right)^2 + y^2 = 40$$

$$\frac{144}{y^2} + y^2 = 40$$

$y^4 – 40y^2 + 144 = 0$

Se hace un cambio de variable al ser una bicuadrada: $y^2 = t$

$t^2 – 40t + 144 = 0$

$$t=\frac{40\pm\sqrt{40^2-4\cdot1\cdot144}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-576}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{1024}}{2}=\frac{40\pm32}{2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1=\dfrac{40+32}{2}=\dfrac{72}{2}=36 \\ t_2=\dfrac{40-32}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \end{cases}$$

Se deshace el cambio:

- $y^2 = t_1 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36} \Rightarrow y = \pm 6$
- $y^2 = t_2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} \Rightarrow y = \pm 2$

Se calcula la otra incógnita:

- Si $y_1 = +6 \Rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2$
- Si $y_2 = -6 \Rightarrow x_2 = \frac{12}{-6} = -2$
- Si $y_3 = +2 \Rightarrow x_3 = \frac{12}{2} = 6$
- Si $y_4 = -2 \Rightarrow x_4 = \frac{12}{-2} = -6$

Se comprueba en el sistema inicial:

- (2 , 6) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{6} + \frac{6}{2} = \frac{10}{3} \\ 2 \cdot 6 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+18}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Solución válida.

- (–2 , –6)

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2}{-6} + \frac{-6}{-2} = \frac{10}{3} \\ (-2) \cdot (-6) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+18}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Solución válida.

- (6 , 2)

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{2} + \frac{2}{6} = \frac{10}{3} \\ 6 \cdot 2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{18+2}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Solución válida.

- (–6 , –2)

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(-6)}{(-2)} + \frac{(-2)}{(-6)} = \frac{10}{3} \\ (-6) \cdot (-2) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{18+2}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Solución válida.

e. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2-4x-3y+3=0} \\ \boldsymbol{x^2+y^2+6x-3y+7=0} \end{cases}$

Se multiplica la primera ecuación por –1, $-x^2 - y^2 + 4x + 3y - 3 = 0$, y se suman:

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + 4x + 3y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$$

$10x + 4 = 0$

$10x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$

$\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + y^2 - 4 \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) - 3y + 3 = 0 \Rightarrow \frac{4}{25} + y^2 + \frac{8}{5} - 3y + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 3y + \frac{119}{25} = 0 \Rightarrow 25y^2 - 75y + 119 = 0$

$$y = \frac{75 \pm \sqrt{75^2 - 4 \cdot 25 \cdot 119}}{2 \cdot 25} = \frac{75 \pm \sqrt{5625 - 11900}}{50} = \frac{75 \pm \sqrt{-6275}}{50}$$

No tiene solución en los números reales.

f. $\begin{cases} \sqrt{\boldsymbol{x}} + \sqrt{\boldsymbol{y}} = \mathbf{9} \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{41} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ x + y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 9^2 \\ x = 41 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 81 \\ x = 41 - y \end{cases}$$

Se sustituye la segunda ecuación en la primera:

$$41 - y + y + 2\sqrt{41 - y}\,\sqrt{y} = 81 \Rightarrow \sqrt{(41 - y)\,y} = \frac{81 - 41}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(41 - y)\,y}\right)^2 = 20^2 \Rightarrow 41y - y^2 = 400 \Rightarrow y^2 - 41y + 400 = 0$$

$$y = \frac{41 \pm \sqrt{41^2 - 4 \cdot 400}}{2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1600}}{2} = \frac{41 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{41 \pm 9}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{41 + 9}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \\ y_2 = \dfrac{41 - 9}{2} = \dfrac{32}{2} = 16 \end{cases}$$

- Si $y_1 = 25 \Rightarrow x_1 = 41 - y_1 = 41 - 25 = 16$
- Si $y_2 = 16 \Rightarrow x_2 = 41 - y_2 = 41 - 16 = 25$

Se comprueban en el sistema inicial:

- (16 , 25)

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ x + y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{16} + \sqrt{25} = 9 \\ 16 + 25 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 5 = 9 \\ 41 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ 41 = 41 \end{cases}$$

Solución válida.

- (25 , 16)

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ x + y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{25} + \sqrt{16} = 9 \\ 25 + 16 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 4 = 9 \\ 41 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ 41 = 41 \end{cases}$$

Solución válida.

g. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-8 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=10-\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{x^2}=-8+\dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

Se igualan ambas ecuaciones:

$$10-\frac{1}{y^2}=-8+\frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{10y^2-1}{y^2}=\frac{-8y^2+1}{y^2} \Rightarrow 10y^2-1=-8y^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y^2+8y^2-1-1=0 \Rightarrow 18y^2-2=0 \Rightarrow y^2=\frac{2}{18}=\frac{1}{9} \Rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$$

- Si $y=\frac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}=10-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=10-\dfrac{1}{\frac{1}{9}}=10-9=1 \Rightarrow 1=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1$

- Si $y=-\frac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}=10-\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=10-\dfrac{1}{\frac{1}{9}}=10-9=1 \Rightarrow 1=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1$

Se comprueban en el sistema inicial:

- $\left(1,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=10 \\ \dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+9=10 \\ 1-9=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10=10 \\ -8=-8 \end{cases}$

  Solución válida.

- $\left(-1,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(-1)^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=10 \\ \dfrac{1}{(-1)^2}-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+9=10 \\ 1-9=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10=10 \\ -8=-8 \end{cases}$

  Solución válida.

- $\left(1,-\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=10 \\ \dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+9=10 \\ 1-9=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10=10 \\ -8=-8 \end{cases}$

  Solución válida.

- $\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow$

  $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(-1)^2}+\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=10 \\ \dfrac{1}{(-1)^2}-\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+9=10 \\ 1-9=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10=10 \\ -8=-8 \end{cases}$

  Solución válida.

h. $\begin{cases} \boldsymbol{x=1-4y} \\ \boldsymbol{x^2+y=10} \end{cases}$

Se sustituye la primera ecuación en la segunda:

$(1-4y)^2+y=10 \Rightarrow 1+16y^2-2\cdot 4y+y-10=0 \Rightarrow 1+16y^2-2\cdot 4y+y-10=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16y^2-7y-9=0$

$$y=\frac{7\pm\sqrt{7^2+4\cdot16\cdot9}}{2\cdot16}=\frac{7\pm\sqrt{49+576}}{32}=\frac{7\pm\sqrt{625}}{32}=\frac{7\pm 25}{32}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{7+25}{32}=\dfrac{32}{32}=1 \\ y_2=\dfrac{7-25}{32}=\dfrac{-18}{32}=-\dfrac{9}{16} \end{cases}$$

- Si $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1-4y = 1-4\cdot 1 = -3$
- Si $y_2 = -\dfrac{9}{16} \Rightarrow x_2 = 1-4y = 1-4\cdot\left(-\dfrac{9}{16}\right) = 1+\dfrac{36}{16} = \dfrac{16+36}{16} = \dfrac{52}{16} = \dfrac{13}{4}$

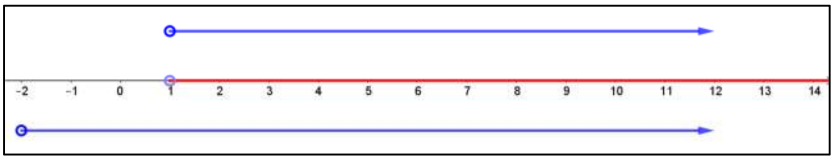
Las soluciones obtenidas son: $(-3, 1)$, $\left(\dfrac{13}{4}, -\dfrac{9}{16}\right)$

SOLUCIONES PÁG. 103

16 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} \mathbf{3-2x<5x-4} \\ \mathbf{6x+2-x>2x-4} \end{cases}$

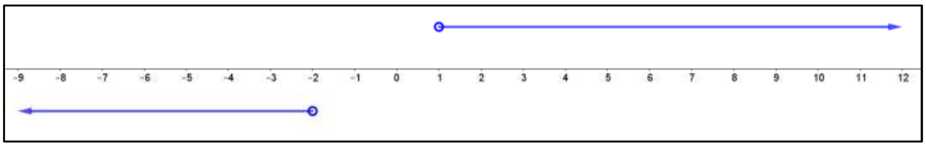
$$\begin{cases} 3-2x<5x-4 \\ 6x+2-x>2x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-5x<-4-3 \Rightarrow -\ 7x<-7 \Rightarrow x>1 \\ 6x-x-2x>-4-2 \Rightarrow 3x>-6 \Rightarrow x>-2 \end{cases}$$



La solución del sistema es: (1 , +∞)

b. $\begin{cases} \mathbf{4x-1\geq -2x+5} \\ \mathbf{-2-5x>12+2x} \end{cases}$

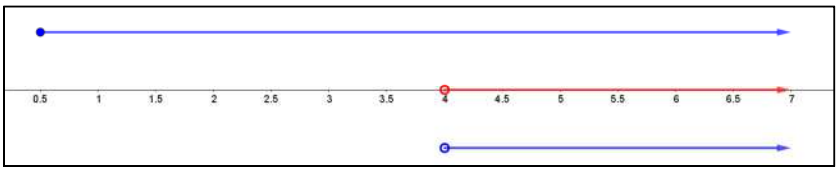
$$\begin{cases} 4x-1\geq -2x+5 \\ -2-5x>12+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2x\geq 5+1 \Rightarrow 6x\geq 6 \Rightarrow x\geq 1 \\ -5x-2x>12+2 \Rightarrow -7x>14 \Rightarrow x<-2 \end{cases}$$



Este sistema no tiene solución: no hay intersección entre las dos soluciones anteriores.

c. $\begin{cases} \mathbf{x+3\leq 9x+2-3} \\ \mathbf{-2x+4<x-8} \end{cases}$

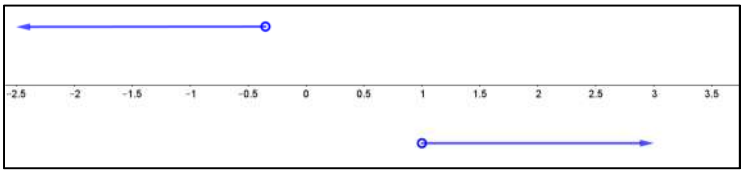
$$\begin{cases} x+3\leq 9x+2-3 \\ -2x+4<x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-9x\leq 2-3-3 \Rightarrow -8x\leq -4 \Rightarrow x\geq \dfrac{-4}{-8} \Rightarrow x\geq \dfrac{1}{2} \\ -2x-x<-8-4 \Rightarrow -3x<-12 \Rightarrow x>\dfrac{-12}{-3} \Rightarrow x>4 \end{cases}$$



La solución del sistema es: (4 , +∞)

d. $\begin{cases} \boldsymbol{x+5x-3>2x+1} \\ \boldsymbol{-5x-3>1+4x} \end{cases}$

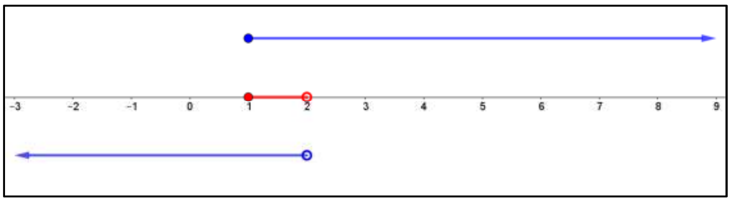
$$\begin{cases} x+5x-3>2x+1 \Rightarrow x+5x-2x>1+3 \Rightarrow 4x>4 \Rightarrow x>1 \\ -5x-3>1+4x \Rightarrow -5x-4x>1+3 \Rightarrow -9x>4 \Rightarrow x<-\dfrac{4}{9} \end{cases}$$



Este sistema no tiene solución: no hay intersección entre las dos soluciones anteriores.

e. $\begin{cases} \boldsymbol{4x+3-7 \geq 2-2x} \\ \boldsymbol{-7x+2>-3x-6} \end{cases}$

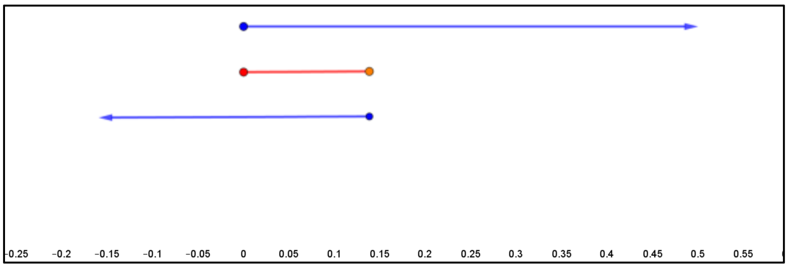
$$\begin{cases} 4x+3-7 \geq 2-2x \Rightarrow 4x+2x \geq 2-3+7 \Rightarrow 6x \geq 6 \Rightarrow x \geq 1 \\ -7x+2>-3x-6 \Rightarrow -7x+3x>-6-2 \Rightarrow -4x>-8 \Rightarrow x<2 \end{cases}$$



La solución del sistema es: [1 , 2)

f. $\begin{cases} \boldsymbol{8x-5-3x \leq -5+6x} \\ \boldsymbol{-3x-1 \geq 4x-2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 8x-5-3x \leq -5+6x \Rightarrow 8x-3x-6x \leq -5+5 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ -3x-1 \geq 4x-2 \Rightarrow -3x-4x \geq -2+1 \Rightarrow -7x \geq -1 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

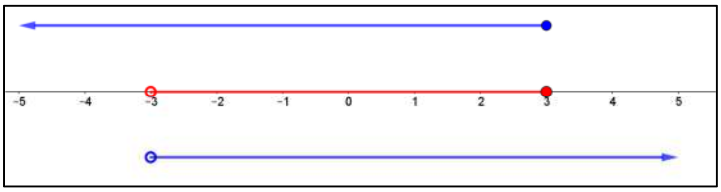


La solución del sistema es: $\left[0, \dfrac{1}{7}\right]$

17 Determina las soluciones de estos sistemas de inecuaciones:

a. $$\begin{cases} 7-(4x-5)\geq 0 \\ 0<3\cdot(2-x)+5x \end{cases}$$

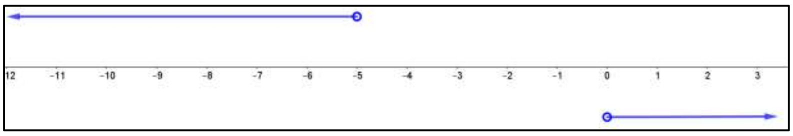
$$\begin{cases} 7-(4x-5)\geq 0 \Rightarrow 7-4x+5\geq 0 \Rightarrow -4x\geq -12 \Rightarrow x\leq 3 \\ 0<3\cdot(2-x)+5x \Rightarrow 0<6-3x+5x \Rightarrow -6<2x \Rightarrow x>-3 \end{cases}$$



La solución del sistema es: (–3 , 3]

b. $$\begin{cases} 3\cdot(x+4)<x+2 \\ 5x>2\cdot(1-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\cdot(x+4)<x+2 \Rightarrow 3x+12<x+2 \Rightarrow 3x-x<2-12 \Rightarrow 2x<-10 \Rightarrow x<-5 \\ 5x>2\cdot(1-x) \Rightarrow 5x>2-2x \Rightarrow 5x+2x>2 \Rightarrow 7x>2 \Rightarrow x>\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

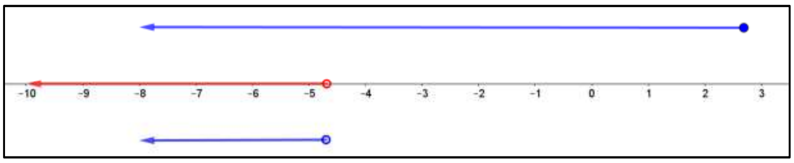


Este sistema no tiene solución: no hay intersección entre las dos soluciones anteriores.

c. $$\begin{cases} 6\cdot(2x+3)<4\cdot(x-5) \\ -2\cdot(x-1)\geq 3\cdot(x-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\cdot(2x+3)<4\cdot(x-5) \Rightarrow 12x+18<4x-20 \Rightarrow 12x-4x<-20-18 \\ -2\cdot(x-1)\geq 3\cdot(x-4) \Rightarrow -2x+2\geq 3x-12 \Rightarrow -2x-3x\geq -12-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x<-38 \Rightarrow x<-\dfrac{19}{4} \\ -5x\geq -14 \Rightarrow x\leq \dfrac{14}{5} \end{cases}$$

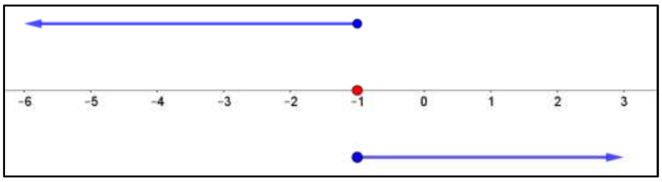


La solución del sistema es: $\left(-\infty, -\dfrac{19}{4}\right)$

d. $\begin{cases} -(4x+5)+(x-6) \geq 2\cdot(x-3) \\ 3\cdot(5x+1) \geq -4\cdot(2-x) \end{cases}$

$$\begin{cases} -(4x+5)+(x-6) \geq 2\cdot(x-3) \Rightarrow -4x-5+x-6 \geq 2x-6 \\ 3\cdot(5x+1) \geq -4\cdot(2-x) \Rightarrow 15x+3 \geq -8+4x \Rightarrow 15x-4x \geq -8-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x+x-2x \geq -6+5+6 \Rightarrow -5x \geq 5 \Rightarrow x \leq -1 \\ 11x \geq -11 \Rightarrow x \geq -1 \end{cases}$$



La solución del sistema es: $x = -1$

18 Halla la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - 1 > \dfrac{2x}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - 1 > \dfrac{2x}{5} \Rightarrow \dfrac{x-3}{3} > \dfrac{2x}{5} \Rightarrow 5\cdot(x-3) > 6x \Rightarrow 5x-15 > 6x \Rightarrow 5x-6x > 15 \\ \dfrac{3x}{2} < \dfrac{-4x}{3} + \dfrac{17}{6} \Rightarrow \dfrac{3x}{2} < \dfrac{-8x+17}{6} \Rightarrow 18x < -16x+34 \Rightarrow 18x+16x < 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x > 15 \Rightarrow x < -15 \\ 34x < 34 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $(-\infty, -15)$

b. $\begin{cases} \dfrac{-5x-3}{9} \geq 3 \\ \dfrac{3\cdot(x+1)}{5} > \dfrac{x}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{-5x-3}{9} \geq 3 \Rightarrow -5x-3 \geq 27 \Rightarrow -5x \geq 27+3 \Rightarrow x \leq -\dfrac{30}{5} \Rightarrow x \leq -6 \\ \dfrac{3\cdot(x+1)}{5} > \dfrac{x}{2} \Rightarrow 6x+6 > 5x \Rightarrow 6x-5x > -6 \Rightarrow x > -6 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución.

c. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} \geq \dfrac{x-1}{6} \Rightarrow \\ \dfrac{5\cdot(x-2)}{3} > 2x+1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} \geq \dfrac{x-1}{6} \Rightarrow 6x+18 \geq 4x-4 \Rightarrow 6x-4x \geq -4-18 \\ \dfrac{5\cdot(x-2)}{3} > 2x+1 \Rightarrow 5\cdot(x-2) > 6x+3 \Rightarrow 5x-10 > 6x+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \geq -22 \Rightarrow x \geq -11 \\ 5x-6x > 3+10 \Rightarrow -x > 13 \Rightarrow x < -13 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución.

d. $\begin{cases} \dfrac{2\cdot(3x-4)}{5} \leq \dfrac{3\cdot(x+7)}{10} \\ 2x-(5x-3) > 4\cdot(1-2x) \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot(3x-4)}{5} \leq \dfrac{3\cdot(x+7)}{10} \Rightarrow 20\cdot(3x-4) \leq 15\cdot(x+7) \Rightarrow 60x-80 \leq 15x+105 \\ 2x-(5x-3) > 4\cdot(1-2x) \Rightarrow 2x-5x+3 > 4-8x \Rightarrow 2x-5x+8x > 4-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 60x-15x \leq 105+80 \Rightarrow 45x \leq 185 \Rightarrow x \leq \dfrac{185}{45} \Rightarrow x \leq \dfrac{37}{9} \\ 5x > 1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{37}{9}\right]$

19 Actividad resuelta.

20 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. |*x* + 4| < 9

$-9 < (x+4) < 9$

$$\begin{cases} x+4 < 9 \Rightarrow x < 9-4 \Rightarrow x < 5 \\ -9 < x+4 \Rightarrow -9-4 < x \Rightarrow x > -13 \end{cases}$$

La solución es: (–13 , 5)

b. |2*x* + 6| ≤ 4

$-4 \le (2x + 6) \le 4$

$$\begin{cases} 2x+6 \le 4 \Rightarrow 2x \le 4-6 \Rightarrow 2x \le -2 \Rightarrow x \le -1 \\ -4 \le 2x+6 \Rightarrow -4-6 \le 2x \Rightarrow -10 \le 2x \Rightarrow x \ge -5 \end{cases}$$

La solución es: [–5 , –1]

c. |*x* – 2| < 8

$-8 < (x - 2) < 8$

$$\begin{cases} (x-2) < 8 \Rightarrow x < 8+2 \Rightarrow x < 10 \\ -8 < (x-2) \Rightarrow -8+2 < x \Rightarrow x > -6 \end{cases}$$

La solución es: (–6 , 10)

21 Actividad resuelta.

22 Encuentra el valor de la solución de las siguientes inecuaciones:

a. |*x* – 6| ≥ 10

$-10 \ge (x - 6) \ge 10$

$$\begin{cases} (x-6) \ge 10 \Rightarrow x \ge 10+6 \Rightarrow x \ge 16 \Rightarrow [16,+\infty) \\ -10 \ge (x-6) \Rightarrow -10+6 \ge x \Rightarrow x \le -4 \Rightarrow (-\infty\ ,-4] \end{cases}$$

La solución es: (–∞ , –4] U [16 , +∞)

b. |–3*x* + 12| > 7

$-7 > (-3x + 12) > 7$

$$\begin{cases} -3x+12 > 7 \Rightarrow -3x > 7-12 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \dfrac{5}{3} \\ -7 > -3x+12 \Rightarrow -7-12 > -3x \Rightarrow -19 > -3x \Rightarrow \dfrac{19}{3} < x \end{cases}$$

La solución es: $\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right) \text{U} \left(\dfrac{19}{3}, +\infty\right)$

c. |4*x* – 14| ≥ 2

$-2 \ge (4x - 14) \ge 2$

$$\begin{cases} 4x-14 \ge 2 \Rightarrow 4x \ge 2+14 \Rightarrow 4x \ge 16 \Rightarrow x \ge 4 \Rightarrow [4,+\infty) \\ -2 \ge 4x-14 \Rightarrow -2+14 \ge 4x \Rightarrow 12 \ge 4x \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 3] \end{cases}$$

La solución es: (–∞ , 3] U [4 , +∞)

23 Actividad resuelta.

24 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $\dfrac{-x+4}{3x-9} < 0$

Para que una fracción sea negativa, puede ocurrir que:

- El numerador sea negativo y el denominador positivo.

$$\begin{cases} -x+4<0 \Rightarrow -x<-4 \Rightarrow x>4 \Rightarrow (4\ ,+\infty) \\ 3x-9>0 \Rightarrow 3x>9 \Rightarrow x>3 \Rightarrow (3\ ,+\infty) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (4 , +∞)

- El numerador sea positivo y el denominador negativo.

$$\begin{cases} -x+4>0 \Rightarrow -x>-4 \Rightarrow x<4 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 4) \\ 3x-9<0 \Rightarrow 3x<9 \Rightarrow x<3 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 3) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (–∞ , 3)

Por tanto, la solución es (–∞ , 3) U (4 , +∞).

b. $\dfrac{5x+10}{2x-8} \geq 0$

Para que una fracción sea positiva, puede ocurrir que:

- El numerador y el denominador sean positivos y el denominador distinto de 0.

$$\begin{cases} 5x+10\geq 0 \Rightarrow 5x\geq -10 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow [-2\ ,+\infty) \\ 2x-8>0 \Rightarrow 2x>8 \Rightarrow x>4 \Rightarrow (4\ ,+\infty) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (4 , +∞)

- El numerador y el denominador sean negativos y el denominador distinto de 0.

$$\begin{cases} 5x+10\leq 0 \Rightarrow 5x\leq -10 \Rightarrow x\leq -2 \Rightarrow (-\infty\ ,-2] \\ 2x-8<0 \Rightarrow 2x<8 \Rightarrow x<4 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 4) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (–∞ , –2]

Por tanto, la solución es (–∞ , –2] U (4 , +∞)

c. $\dfrac{-7x-14}{3x+6} \le 0$

Para que una fracción sea negativa, puede ocurrir que:

- El numerador sea negativo y el denominador positivo y distinto de 0.

$$\begin{cases} -7x-14 \le 0 \Rightarrow -7x \le 14 \Rightarrow x \ge -2 \Rightarrow [-2\ ,+\infty) \\ 3x+6>0 \Rightarrow 3x>-6 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow (-2\ ,+\infty) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (–2 , +∞)

- El numerador sea positivo y el denominador negativo y distinto de 0.

$$\begin{cases} -7x-14 \ge 0 \Rightarrow -7x \ge 14 \Rightarrow x \le -2 \Rightarrow (-\infty\ ,-2] \\ 3x+6<0 \Rightarrow 3x<-6 \Rightarrow x<-2 \Rightarrow (-\infty\ ,-2) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (–∞ , –2)

Por tanto, la solución es (–∞ , –2) U (–2 , +∞)

d. $\dfrac{1-3x}{4x+8} > 0$

Para que una fracción sea positiva, puede ocurrir que:

- El numerador y el denominador sean positivos.

$$\begin{cases} 1-3x>0 \Rightarrow -3x>-1 \Rightarrow x<\dfrac{1}{3} \Rightarrow \left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right) \\ 4x+8>0 \Rightarrow 4x>-8 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow (-2\ ,+\infty) \end{cases}$$

Es decir, *x* es un número del intervalo (–2 , $\frac{1}{3}$)

- El numerador y el denominador sean negativos.

$$\begin{cases} 1-3x<0 \Rightarrow -3x<-1 \Rightarrow x>\dfrac{1}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3},+\infty\right) \\ 4x+8<0 \Rightarrow 4x<-8 \Rightarrow x<-2 \Rightarrow (-\infty\ ,-2) \end{cases}$$

En este caso no hay intersección en las soluciones.

Por tanto, la solución es (–2 , $\frac{1}{3}$)

SOLUCIONES PÁG. 105

25 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x+y \geq 5} \\ \boldsymbol{x-y<2} \end{cases}$

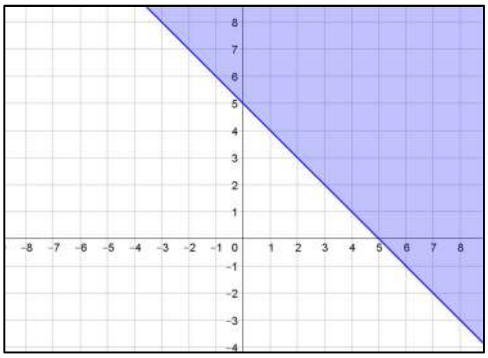
- Para representar la inecuación $x + y \geq 5$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $x + y \geq 5 \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow y = 5 + x$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $x + y \geq 5 \Rightarrow 0 + 0 \not\geq 5$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\geq$.

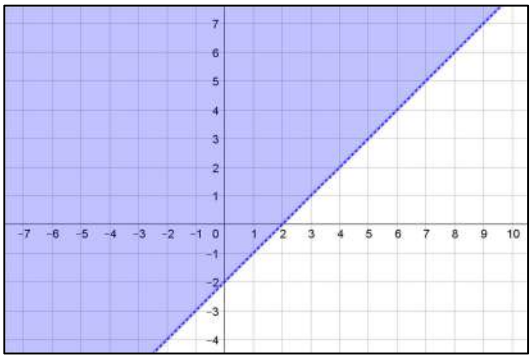
- Para representar la inecuación $x - y < 2$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $x - y < 2 \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$

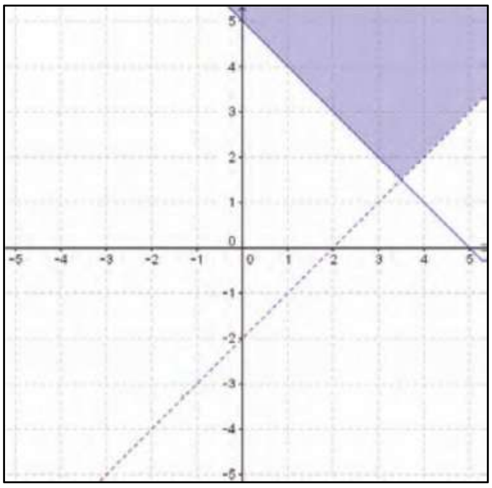
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$x - y < 2 \Rightarrow 0 - 0 < 2$

Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



b. $\begin{cases} \mathbf{5x + 2y \le 1} \\ \mathbf{x + 3y \le 0} \end{cases}$

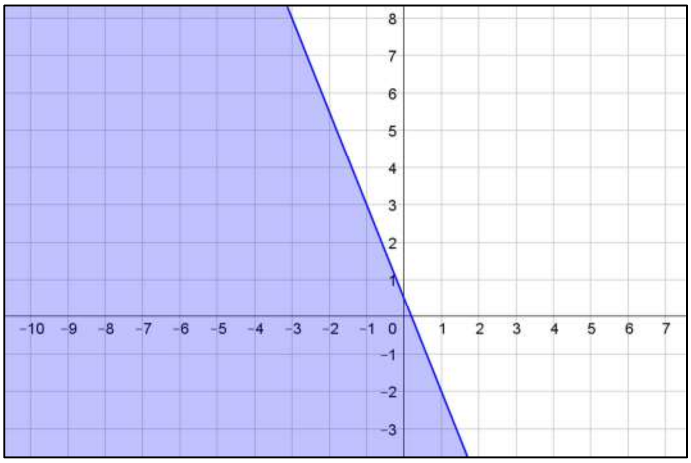
- Para representar la inecuación $5x + 2y \le 1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $5x + 2y \le 1 \Rightarrow 5x + 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1-5x}{2}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $5x + 2y \le 1 \Rightarrow 0 + 0 \le 1$

  Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\le$.



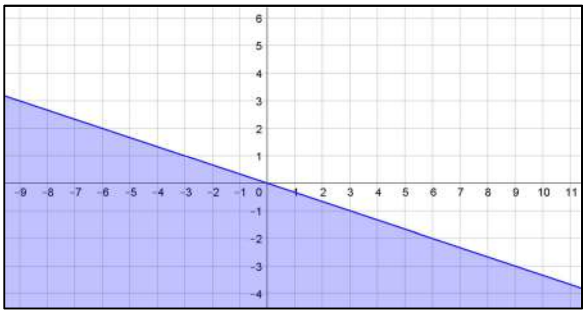
- Para representar la inecuación $x + 3y \leq 0$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $x + 3y \leq 0 \Rightarrow x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{x}{3}$

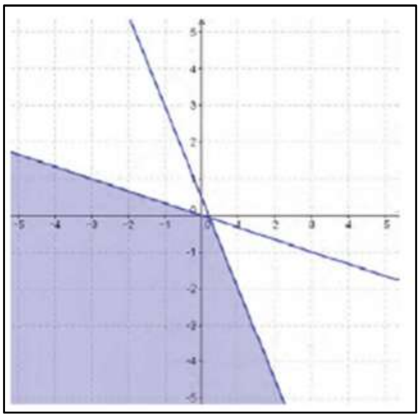
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (5 , 5), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $5 + 3 \cdot 5 \leq 0 \Rightarrow 20 \not\leq 0$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución no es el semiplano que contiene al punto (5 , 5), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≤.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



c. $\begin{cases} -3x + y < 2 \\ y > -3 \end{cases}$

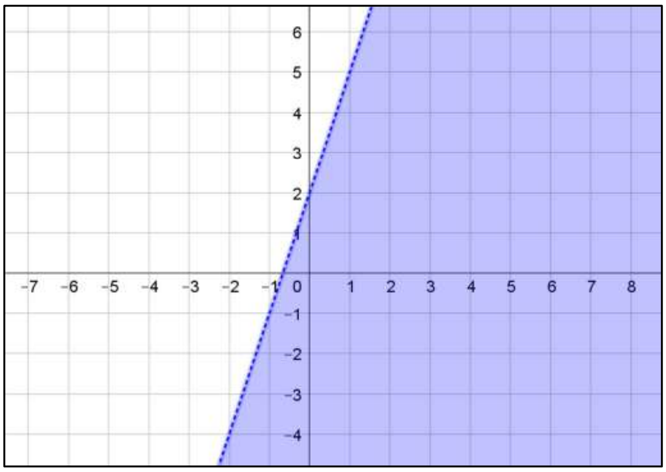
- Para representar la inecuación $-3x + y < 2$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-3x + y < 2 \Rightarrow -3x + y = 2 \Rightarrow y = 2 + 3x$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $-3x + y < 2 \Rightarrow 0 + 0 < 2$

  Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



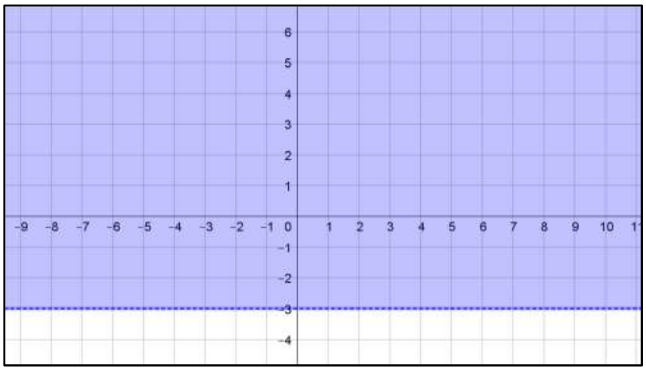
- Para representar la inecuación $y > -3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $y > -3 \Rightarrow y = -3$

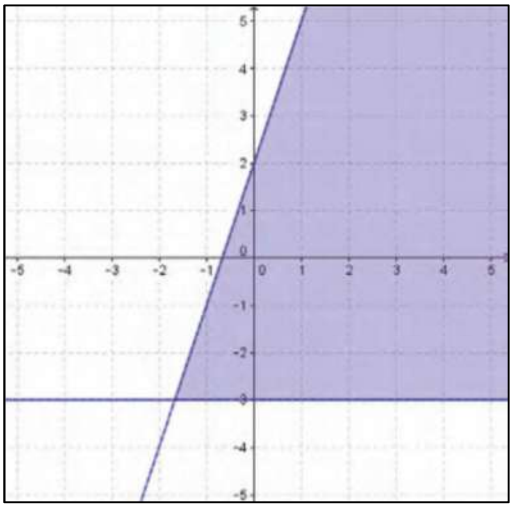
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $y > -3 \Rightarrow 0 \not> -3$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



d. $\begin{cases} \mathbf{2 \cdot (x - 1) + 3y \leq 5} \\ \mathbf{4 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (3y + 1) \geq 3} \end{cases}$

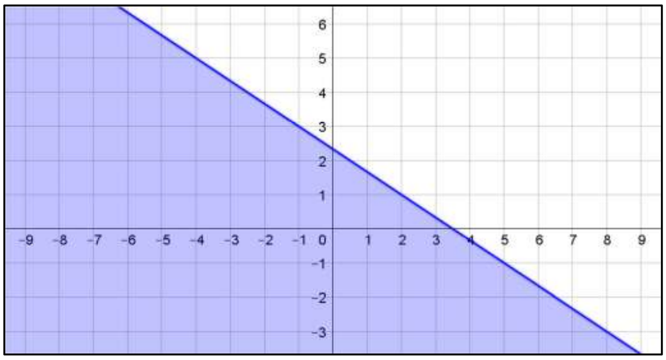
- Para representar la inecuación $2 \cdot (x - 1) + 3y \leq 5$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $2 \cdot (x - 1) + 3y \leq 5 \Rightarrow 2 \cdot (x - 1) + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{-2x + 7}{3}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $2 \cdot (x - 1) + 3y \leq 5 \Rightarrow 2 \cdot (0 - 1) + 3 \cdot 0 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq 5$

  Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\leq$.



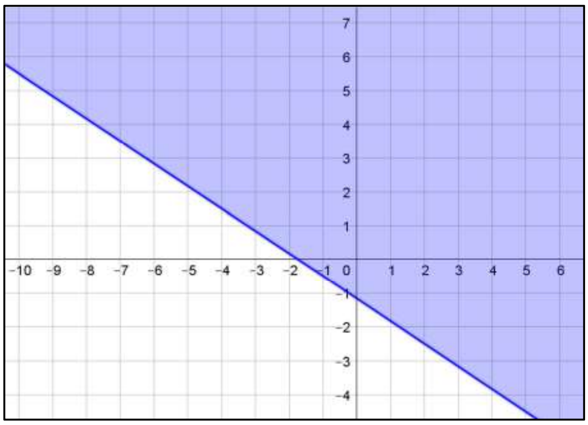
- Para representar la inecuación $4 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (3y + 1) \geq 3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $4 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (3y + 1) \geq 3 \Rightarrow 4 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (3y + 1) = 3 \Rightarrow y = \frac{-7 - 4x}{6}$

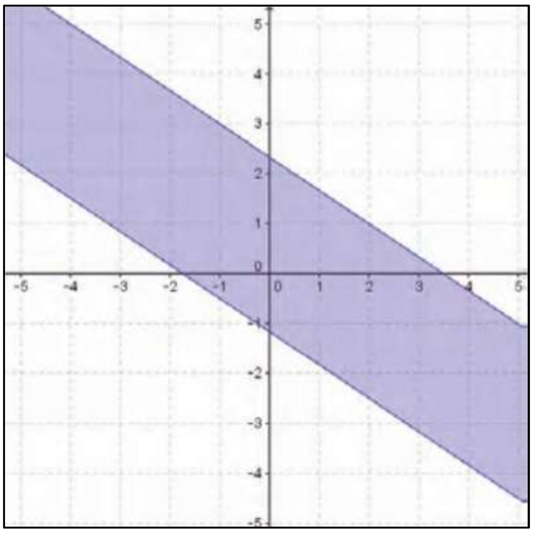
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$4 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (3y + 1) \geq 3 \Rightarrow 4 \cdot (0 + 2) + 2 \cdot (3 \cdot 0 + 1) \geq 3 \Rightarrow 10 \geq 3$

Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≥.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



e. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} < 1 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} > 1 \end{cases}$

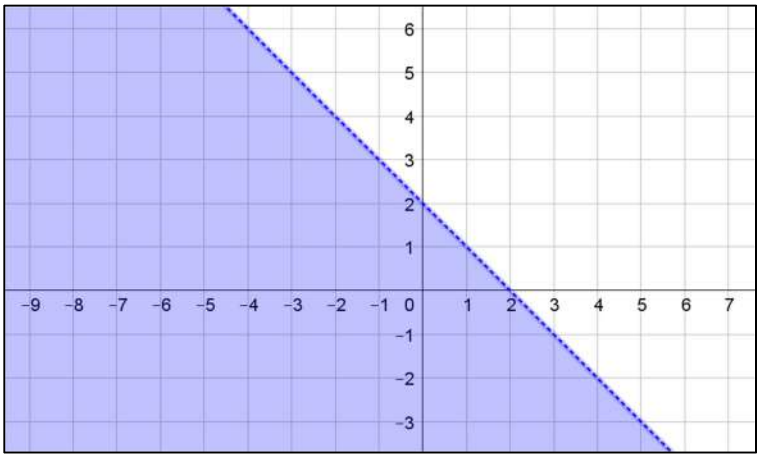
- Para representar la inecuación $\frac{x+y}{2} < 1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $\frac{x+y}{2} < 1 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 - x$

La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$\frac{x+y}{2}<1 \Rightarrow \frac{0+0}{2}<1 \Rightarrow 0<1$$

Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



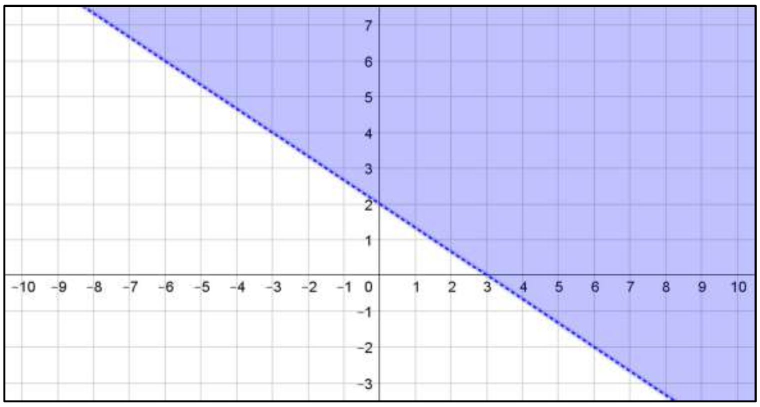
- Para representar la inecuación $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}>1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}>1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow y=\frac{6-2x}{3}$$

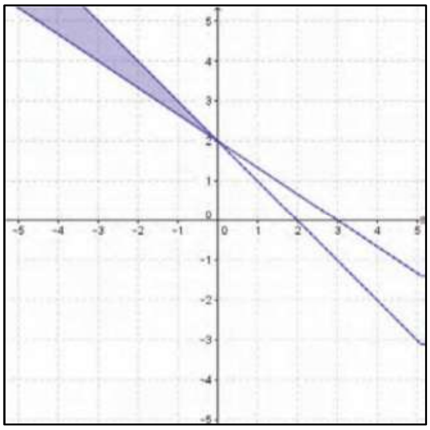
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}>1 \Rightarrow 0 \not> 1$$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



f. $\begin{cases} \mathbf{-5x - 3y > 3} \\ \mathbf{-3 \cdot (y + 1) < 5x - 4} \end{cases}$

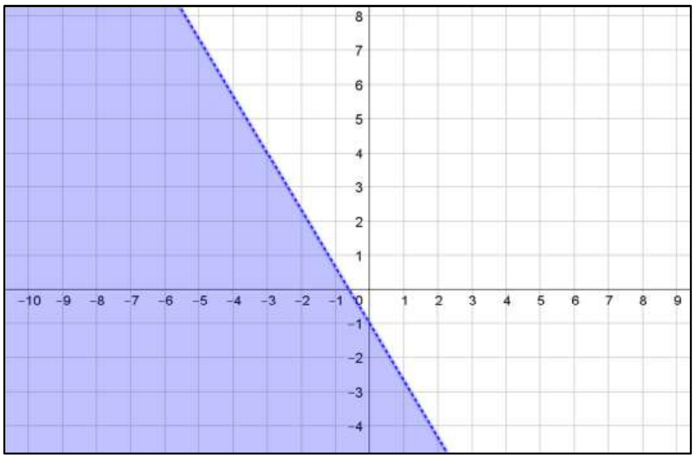
- Para representar la inecuación –5*x* – 3*y* > 3, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-5x - 3y > 3 \Rightarrow -5x - 3y = 3 \Rightarrow y = \frac{-5x - 3}{3}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $-5x - 3y > 3 \Rightarrow 0 \not> 3$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



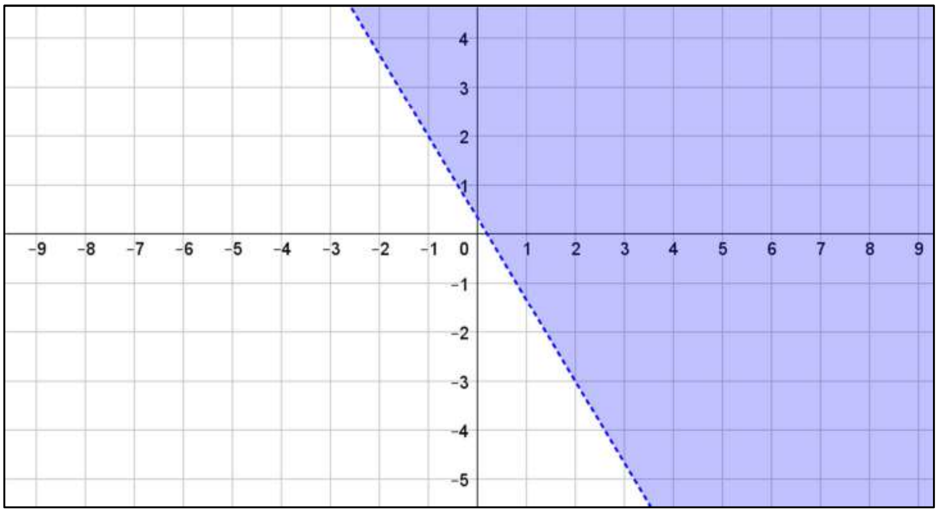
- Para representar la inecuación –3 · (*y* + 1) < 5*x* – 4, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-3 \cdot (y + 1) < 5x - 4 \Rightarrow -3 \cdot (y + 1) = 5x - 4 \Rightarrow y = \frac{-5x + 1}{3}$

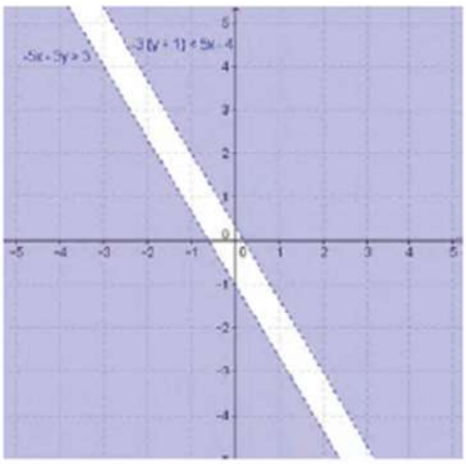
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$-3 \cdot (y + 1) < 5x - 4 \Rightarrow -3 \not< -4$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



El sistema no tiene solución, pues los semiplanos no tienen elementos en común.

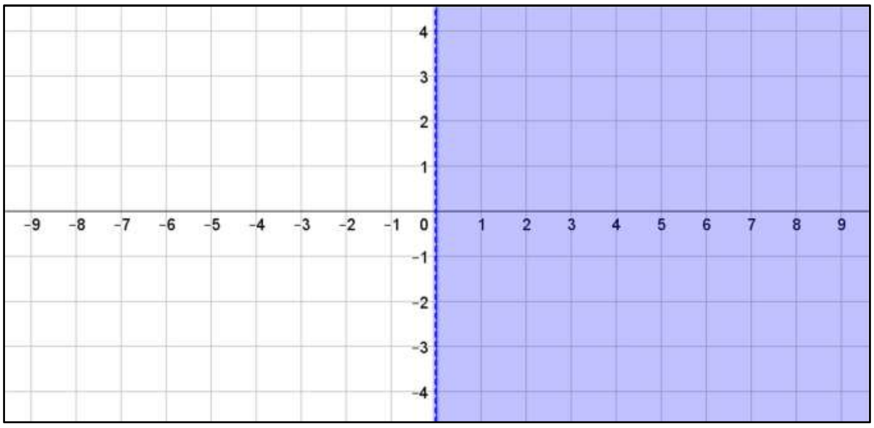
26 **Entre tu compañero y tú plantead un sistema de cuatro inecuaciones con dos incógnitas y resolvedlo gráficamente. A partir de la solución gráfica, determinad cinco puntos que pertenezcan a la solución.**

Respuesta abierta.

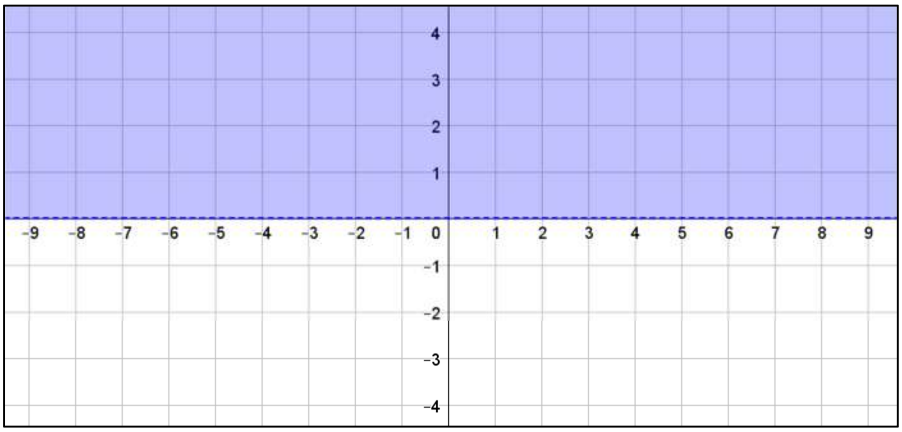
27 Encuentra la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 3 \end{cases}$

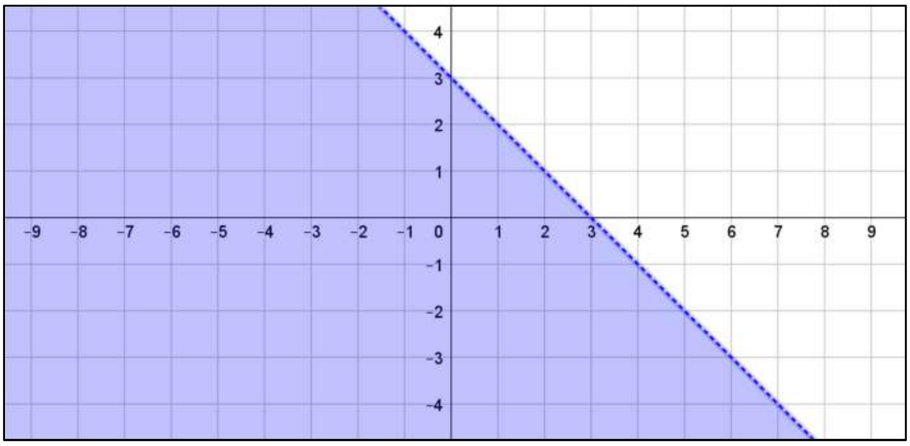
Se representa la inecuación $x > 0$:



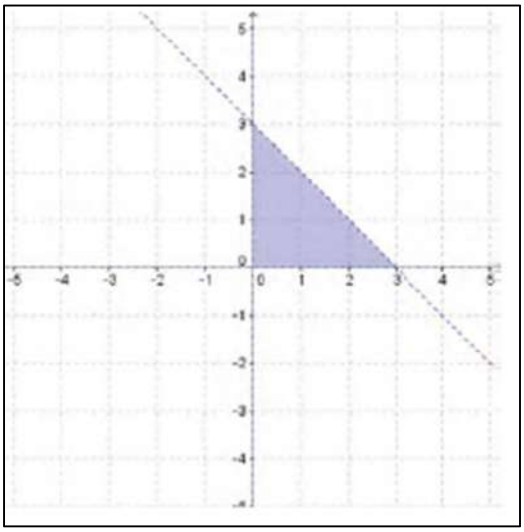
Se representa la inecuación $y > 0$:



Se representa la inecuación $x + y < 3$:

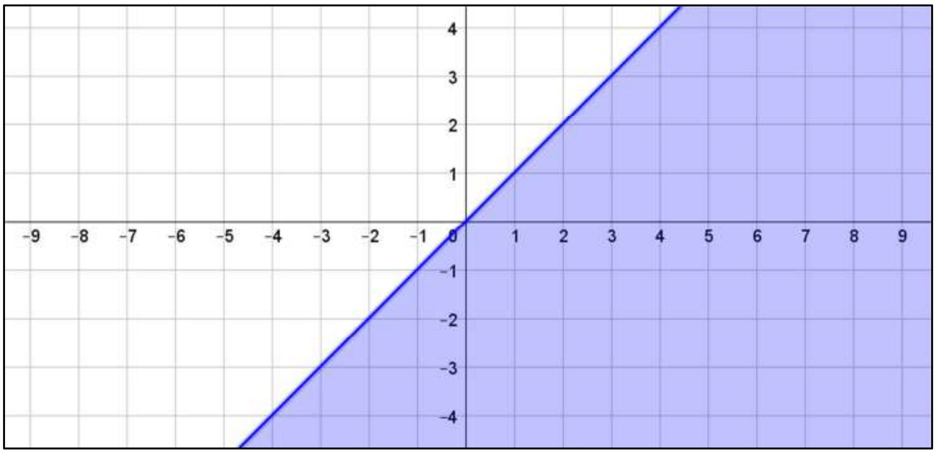


La solución del sistema es la intersección de los tres semiplanos:

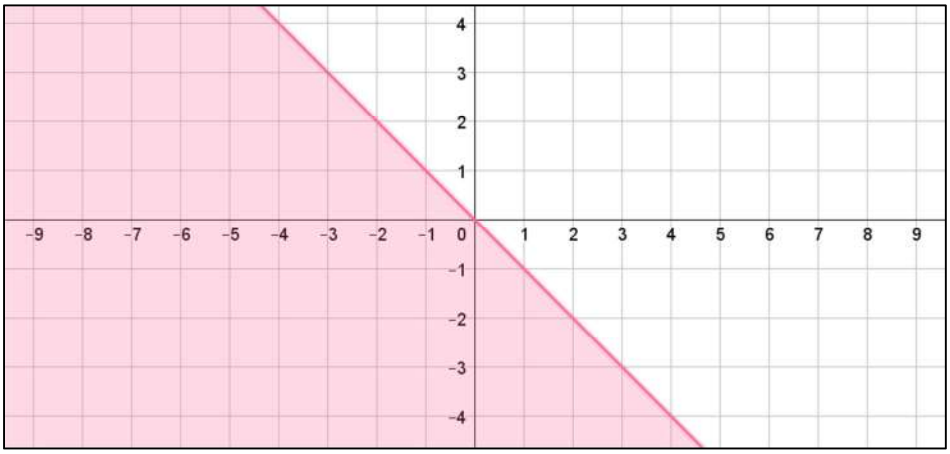


b. $\begin{cases} \boldsymbol{x - y \geq 0} \\ \boldsymbol{x + y \leq 0} \\ \boldsymbol{y \geq 2} \end{cases}$

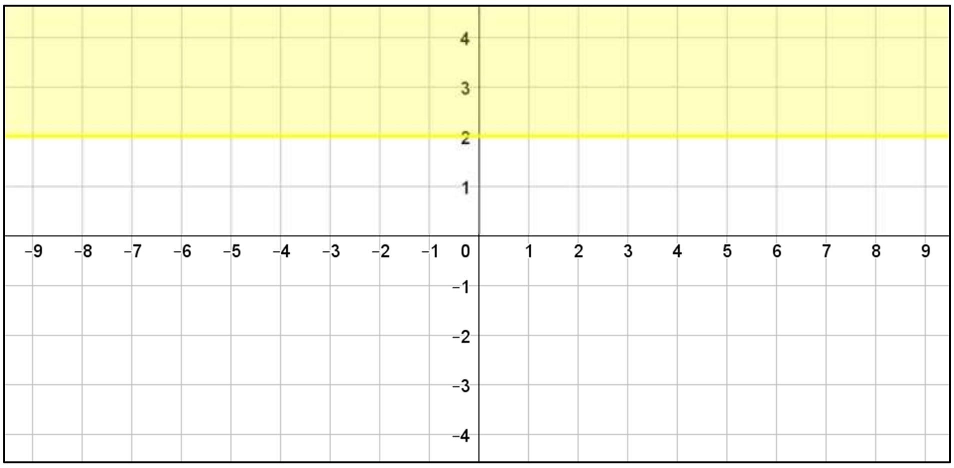
Se representa la inecuación $x - y \geq 0$:



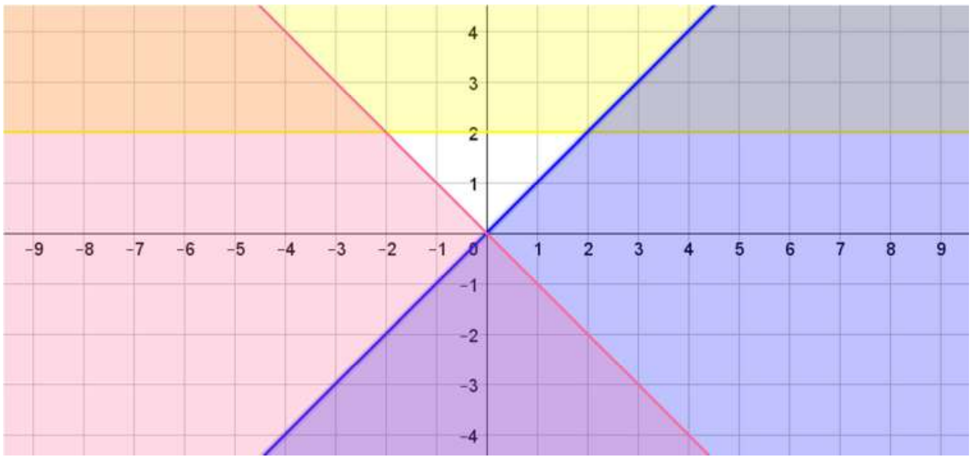
Se representa la inecuación $x + y \leq 0$:



Se representa la inecuación $y \geq 2$:



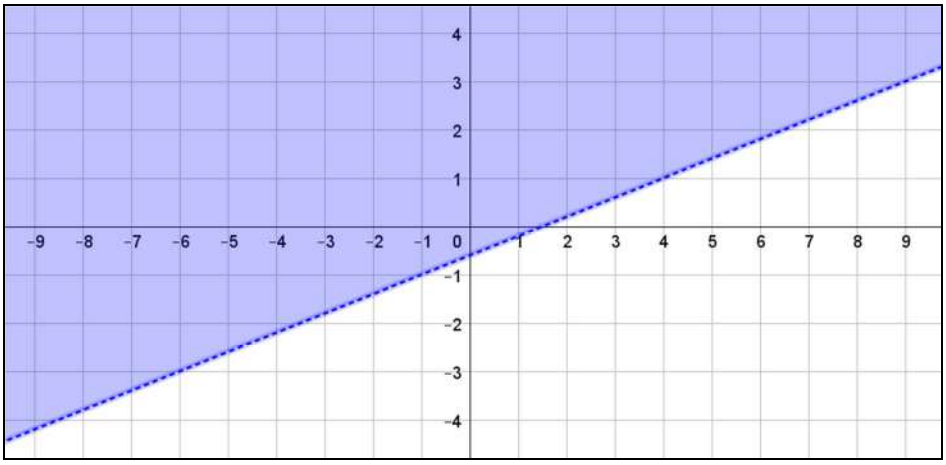
La solución del sistema es la intersección de los tres semiplanos:



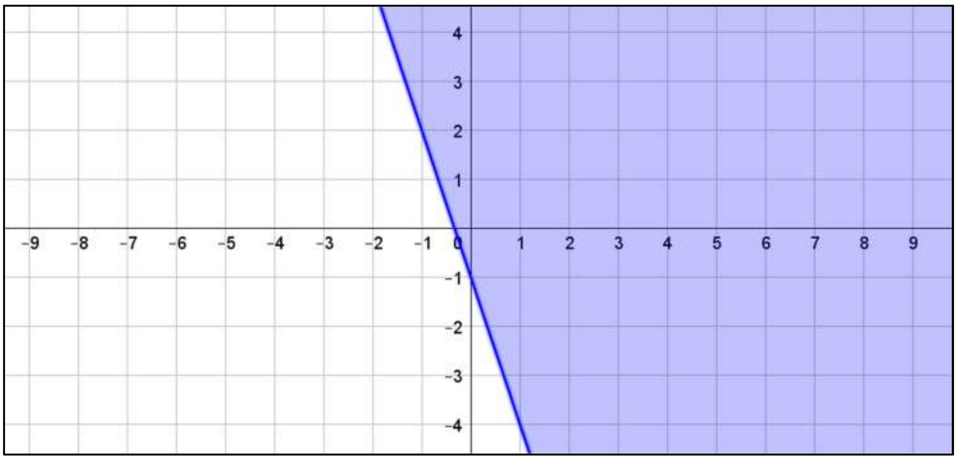
El sistema no tiene solución, pues los semiplanos no tienen elementos en común.

c. $\begin{cases} 2x - 5y < 3 \\ 3 \cdot (x+1) + y \geq 2 \\ -x + 2y \leq 1 \end{cases}$

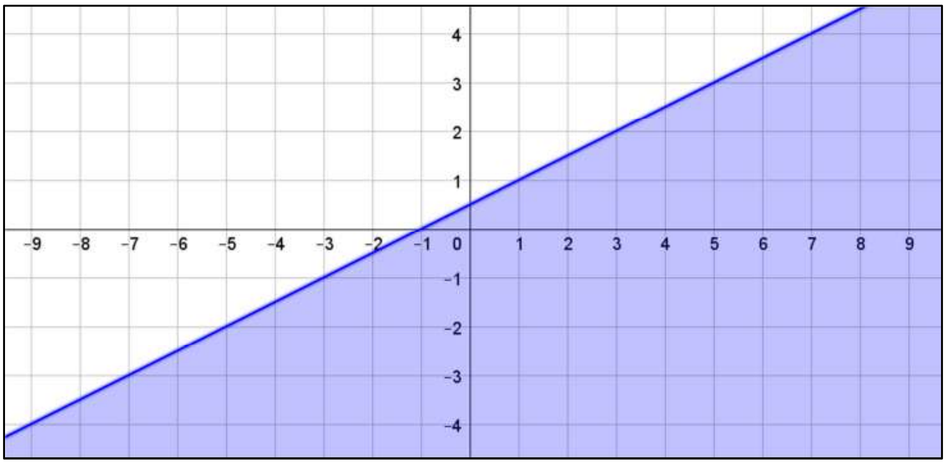
Se representa la inecuación $2x - 5y < 3$:



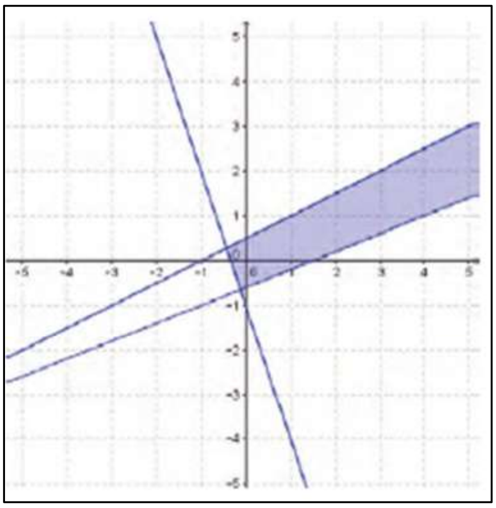
Se representa la inecuación $3 \cdot (x + 1) + y \geq 2$:



Se representa la inecuación $-x + 2y \leq 1$:



La solución del sistema es la intersección de los tres semiplanos:



SOLUCIONES PÁG. 107

28 Un jardín botánico está compuesto de 122 especies distintas, entre plantas y árboles. Si el triple de árboles son 14 más que el total de plantas, ¿cuántas plantas y árboles tiene el jardín?

- Se identifican las incógnitas: x = plantas, y = árboles
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x+y=122 \\ 3y=x+14 \end{cases}$$

Se utiliza el método de sustitución. Se despeja en la primera ecuación la incógnita x, $x = 122 - y$, y se sustituye en la segunda ecuación:

$3y = 122 - y + 14 \Rightarrow 3y + y = 122 + 14 \Rightarrow 4y = 136 \Rightarrow y = \frac{136}{4} \Rightarrow y = 34$

$x = 122 - y = 122 - 34 = 88$

- Se comprueba e interpreta la solución: hay 88 plantas y 34 árboles.

29 La suma de dos números es 32, y la diferencia de sus cuadrados, 64. Halla el valor de dichos números.

- Se identifican las incógnitas: x e y son los dos números que hay que hallar.
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x+y=32 \\ x^2-y^2=64 \end{cases}$$

Se utiliza el método de sustitución. Se despeja en la primera ecuación la incógnita x, $x = 32 - y$, y se sustituye en la segunda ecuación:

$(32 - y)^2 - y^2 = 64 \Rightarrow 32^2 + y^2 - 2 \cdot 32y - y^2 = 64 \Rightarrow 1\,024 + y^2 - 64y - y^2 = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,024 - 64y = 64 \Rightarrow 1\,024 - 64 = 64y \Rightarrow y = \frac{960}{64} = 15$

$x = 32 - y = 32 - 15 = 17$

- Se comprueba e interpreta la solución: los números son 15 y 17

30 Tres hermanos tienen en total 48 años. El mayor tiene ocho años menos que la suma de las edades de los otros dos hermanos, mientras que la edad del menor es la tercera parte de la suma de las de sus dos hermanos. Averigua cuántos años tiene cada hermano.

- Se identifican las incógnitas: x = edad del hermano mayor, y = edad del hermano mediano, z = edad del hermano pequeño
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ x+8=y+z \\ z=\dfrac{x+y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=48 \\ x-y-z=-8 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$

Se utiliza el método de reducción:

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ x-y-z=-8 \end{cases}$$

2x = 40

x = 20

$$\begin{cases} x-y-z=-8 \\ x+y-\ 3z=0 \end{cases}$$

2x – 4z = –8

Se sustituye el valor de x hallado:

$2 \cdot 20 - 4z = -8 \Rightarrow 40 - 4z = -8 \Rightarrow 40 + 8 = 4z \Rightarrow z = \dfrac{48}{4} = 12$

Se sustituyen los valores de x y z para hallar y:

$x + y + z = 48 \Rightarrow y = 48 - x - z \Rightarrow y = 48 - 20 - 12 \Rightarrow y = 16$

- Se comprueba e interpreta la solución: el hermano mayor tiene 20 años, el mediano 16 y el pequeño 12 años.

31 Calcula dos números naturales cuyo producto sea 80 y cuyo cociente dé como resultado $\dfrac{4}{5}$.

- Se identifican las incógnitas: los números naturales son x e y.
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x \cdot y = 80 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{80}{y} \\ x = \dfrac{4y}{5} \end{cases}$$

Se resuelve por igualación:

$$\frac{80}{y} = \frac{4y}{5} \Rightarrow 400 = 4y^2 \Rightarrow y^2 = 100 \Rightarrow y = \pm 10$$

Como son números naturales, la solución negativa no es válida.

$x = \frac{80}{y} = \frac{80}{10} = 8$

- Se comprueba e interpreta la solución: los números naturales son 8 y 10.

32 Una empresa de telefonía móvil ofrece un contrato que estipula un precio de 0,10 € por el establecimiento de llamada más 0,30 € por minuto. ¿Cuántos minutos se puede hablar de modo que el precio por llamada esté comprendido entre los 0,70 € y los 2,50 €?

- Se identifica la incógnita: x = minutos que se puede hablar
- Se plantea el sistema de inecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} 0,10 + 0,30x > 0,70 \\ 0,10 + 0,30x < 2,50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,30x > 0,70 - 0,10 \\ 0,30x < 2,50 - 0,10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 8 \end{cases}$$

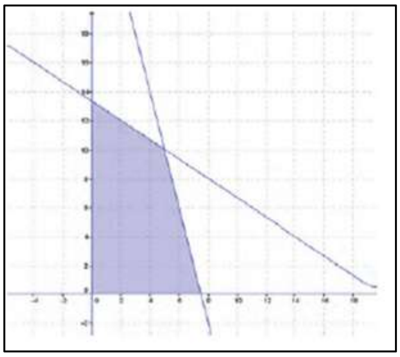
- Se comprueba e interpreta la solución: el número de minutos será cualquier número del intervalo (2 , 8).

33 Una fábrica textil confecciona camisas y camisetas, para lo que utiliza dos tipos de hilo: fino y grueso. Cada camisa necesita 2 m de hilo fino y 4 m de hilo grueso, y cada camiseta, 3 m de hilo fino y 1 m de hilo grueso. Si se dispone de 40 m de hilo fino y 30 m de hilo grueso:

a. ¿Cuántas camisas y camisetas se pueden confeccionar?

- Se identifican las incógnitas: x = números de camisas, y = número de camisetas
- Se plantea el sistema de inecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 40 \\ 4x + y \leq 30 \end{cases}$$



- Se interpreta la solución: el conjunto de soluciones está formado por todos los pares, (x , y), de la región del plano sombreado en la gráfica.

b. ¿Es posible realizar 8 camisas y 12 camisetas?

No es posible, pues el punto (8, 12) no pertenece a la región factible.

SOLUCIONES PÁG. 109

1 ¿Cuántas soluciones reales puede tener un sistema de dos ecuaciones lineales? ¿Cuál es la representación gráfica de la solución?

Puede tener una solución formada por un par de valores, infinitas soluciones o no tener solución.

La representación gráfica de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales es el punto o puntos de corte de las dos rectas que forman el sistema.

2 Clasifica un sistema de ecuaciones según el número de soluciones que tenga.

Dependiendo del número de soluciones, un sistema de ecuaciones puede ser:

- Compatible determinado: el sistema tiene una única solución.
- Compatible indeterminado: el sistema tiene infinitas soluciones.
- Incompatible: el sistema no tiene solución.

3 ¿Cómo se denomina un sistema de ecuaciones cuyos términos independientes son todos nulos?

Sistema homogéneo.

4 ¿Un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene como solución, al menos, la terna (0 , 0 , 0)?

Sí, la terna (0 , 0 , 0) es siempre solución pero no tiene por qué ser la única.

5 ¿Tiene un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita siempre como solución un intervalo?

No, también puede no tener solución o tener solo un valor como única solución.

6 Explica en qué consiste el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones con tres ecuaciones lineales.

Respuesta abierta.

7 Explica el procedimiento que se sigue para resolver un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Respuesta abierta.

8 ¿Es un intervalo la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas? Justifica tu respuesta.

No, es una región del plano.

9 ¿Cómo se llama la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

Región factible.

10 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 110 – REPASO FINAL

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

1 Comprueba si (*x* , *y*) = (–1 , 2) es solución de los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{-4x+y=6} \\ \boldsymbol{x-2y=3} \end{cases}$

$$\begin{cases} -4x+y=6 \\ x-2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\cdot(-1)+2=6 \\ -1-2\cdot 2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+2\ =6 \\ -1\ -4\ =3 \Rightarrow -5 \neq 3 \end{cases}$$

No es solución.

b. $\begin{cases} \boldsymbol{3x+\ 2y=\ 1} \\ \boldsymbol{-3x+y=\ 5} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \Rightarrow 3\cdot(-1)+2\cdot 2=1 \Rightarrow -3+4=1 \Rightarrow 1=1 \\ -3x+y=5 \Rightarrow -3\cdot(-1)+2=5 \Rightarrow 3+2=5 \Rightarrow 5=5 \end{cases}$$

Sí es solución.

c. $\begin{cases} \boldsymbol{2\cdot(x-1)-3y=-10} \\ \boldsymbol{x-5\cdot(y-2)=-1} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\cdot(x-1)-3y=-10 \Rightarrow 2\cdot(-1-1)-3\cdot 2=-10 \Rightarrow -4-6=-10 \Rightarrow -10=-10 \\ x-5\cdot(y-2)=-1 \Rightarrow -1-5\cdot(2-2)=-1 \Rightarrow -1=-1 \end{cases}$$

Sí es solución.

d. $\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{x}{2}+\dfrac{y-1}{2}=0} \\ \boldsymbol{-2x=-(4-3y)} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y-1}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{-1}{2}+\dfrac{2-1}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow 0=0 \\ -2x=-(4-3y) \Rightarrow -2\cdot(-1)=-(4-3\cdot 2) \Rightarrow 2=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Sí es solución.}$$

2 Resuelve mediante el método de sustitución:

a. $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 6} \\ \mathbf{-5x + 6y = 2} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* de la primera ecuación, $y = 6 - 2x$, y se sustituye en la segunda:

$-5x + 6 \cdot (6 - 2x) = 2 \Rightarrow -5x + 36 - 12x = 2 \Rightarrow -17x = 2 - 36 \Rightarrow -17x = -34 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-34}{-17} = 2$

$y = 6 - 2x \Rightarrow 6 - 2 \cdot 2 \Rightarrow 6 - 4 = 2$

La solución es $x = 2$, $y = 2$

b. $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = -11} \\ \mathbf{x - y = 3} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *x* de la segunda ecuación, $x = 3 + y$, y se sustituye en la primera:

$3 \cdot (3 + y) + 2y = -11 \Rightarrow 9 + 3y + 2y = -11 \Rightarrow 5y = -11 - 9 \Rightarrow 5y = -20 \Rightarrow y = -4$

$x = 3 + y \Rightarrow x = 3 - 4 \Rightarrow -1$

La solución es $x = -1$, $y = -4$

c. $\begin{cases} \mathbf{4x - 2y = 1} \\ \mathbf{y = 7 \cdot (x + 3) - 5x} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* de la segunda ecuación, $y = 7x + 21 - 5x \Rightarrow y = 2x + 21$, y se sustituye en la primera:

$4x - 2y = 1 \Rightarrow 4x - 2 \cdot (2x + 21) = 1 \Rightarrow 4x - 4x - 42 = 1 \Rightarrow -42 \neq 1$

No tiene solución.

d. $\begin{cases} \mathbf{\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2} \\ \mathbf{\dfrac{3x}{10} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{5}} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* de la primera ecuación, $\dfrac{2x + y}{4} = 2 \Rightarrow 2x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 2x$,

y se sustituye en la segunda:

$\dfrac{3x}{10} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{3x - 2y}{10} = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow 5 \cdot (3x - 2y) = -10 \Rightarrow 15x - 10y = -10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2y = -2 \Rightarrow 3x - 2 \cdot (8 - 2x) = -2 \Rightarrow 3x - 16 + 4x = -2 \Rightarrow 7x = -2 + 16 \Rightarrow$

$7x = 14 \Rightarrow x = 2$

$y = 8 – 2x \Rightarrow y = 8 – 2 \cdot 2 = \Rightarrow y = 8 – 4 = \Rightarrow y = 4$

La solución es $x = 2$, $y = 4$

3 Halla la solución de los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{-3x + 4y = 1} \\ \boldsymbol{2x + 5y = 3} \end{cases}$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones y se igualan:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1-4y}{-3} \\ 2x + 5y = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3-5y}{2} \end{cases}$$

$\dfrac{1-4y}{-3} = \dfrac{3-5y}{2} \Rightarrow 2 \cdot (1 – 4y) = –3 \cdot (3 – 5y) \Rightarrow 2 – 8y = –9 + 15y \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 9 = 15y + 8y \Rightarrow 11 = 23y \Rightarrow y = \dfrac{11}{23}$

$$x = \frac{1-4y}{-3} = \frac{1-4\cdot\frac{11}{23}}{-3} = \frac{1-\frac{44}{23}}{-3} = \frac{\frac{23-44}{23}}{-3} = \frac{\frac{-21}{23}}{-3} = \frac{-21}{23\cdot(-3)} = \frac{7}{23}$$

La solución es $x = \dfrac{7}{23}$, $y = \dfrac{11}{23}$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 7y = -4} \\ \boldsymbol{x - 8y = 11} \end{cases}$

Se despeja la incógnita x en las dos ecuaciones y se igualan:

$$\begin{cases} x + 7y = -4 \Rightarrow x = -4 - 7y \\ x - 8y = 11 \Rightarrow x = 11 + 8y \end{cases}$$

$–4 – 7y = 11 + 8y \Rightarrow –4 – 11 = 8y + 7y \Rightarrow –15 = 15y \Rightarrow y = –1$

$x = –4 – 7y = –4 – 7 \cdot (–1) = –4 + 7 = 3$

La solución es $x = 3$, $y = –1$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{5 \cdot (x + 2) - y = -1} \\ \boldsymbol{4x + 3 \cdot (y + 1) = -2} \end{cases}$

Se despeja la incógnita y en las dos ecuaciones y se igualan:

$$\begin{cases} 5\cdot(x+2) - y = -1 \Rightarrow 5x + 10 - y = -1 \Rightarrow 5x + 10 + 1 = y \Rightarrow y = 5x + 11 \\ 4x + 3\cdot(y+1) = -2 \Rightarrow 4x + 3y + 3 = -2 \Rightarrow 3y = -2 - 3 - 4x \Rightarrow y = \dfrac{-5-4x}{3} \end{cases}$$

$5x + 11 = \frac{-5 - 4x}{3} \Rightarrow 15x + 33 = -5 - 4x \Rightarrow 15x + 4x = -5 - 33 \Rightarrow 19x = -38 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-38}{19} = -2$

$y = 5x + 11 = 5 \cdot (-2) + 11 = -10 + 11 = 1$

La solución es $x = -2$, $y = 1$

d. $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{-\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = -\frac{3}{10}} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* en las dos ecuaciones y se igualan:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \\ -\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = -\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{-2x + y}{10} = -\frac{3}{10} \Rightarrow -2x + y = -3 \Rightarrow y = -3 + 2x \end{cases}$$

$2x - 3 = -3 + 2x \Rightarrow 2x - 2x = -3 + 3 \Rightarrow 0x = 0$

Tiene infinitas soluciones.

4 Determina la solución de estos sistemas de ecuaciones mediante el método de reducción:

a. $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 10} \\ \mathbf{-5x + y = 9} \end{cases}$

Se multiplica por –3 a la segunda ecuación, $15x - 3y = -27$, y se suman:

$2x + 3y = 10$

$15x - 3y = -27$

$17x = -17$

$x = -1$

$-5x + y = 9 \Rightarrow -5 \cdot (-1) + y = 9 \Rightarrow 5 + y = 9 \Rightarrow y = 9 - 5 \Rightarrow y = 4$

La solución es $x = -1$, $y = 4$

b. $\begin{cases} \mathbf{6x - 7y = 5} \\ \mathbf{-6x + 3y = -1} \end{cases}$

Se suman las dos ecuaciones:

$6x - 7y = 5$

$-6x + 3y = -1$

$-4y = 4$

$y = -1$

$6x - 7y = 5 \Rightarrow 6x - 7 \cdot (-1) = 5 \Rightarrow 6x + 7 = 5 \Rightarrow 6x = 5 - 7 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

La solución es $x = -\frac{1}{3}$, $y = -1$

c. $\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = -2} \\ \mathbf{3x + 2y = 2} \end{cases}$

Se multiplica por 3 a la primera ecuación, $12x + 15y = -6$, y por -4 a la segunda ecuación, y se suman: $-12x - 8y = -8$

$12x + 15y = -6$

$-12x - 8y = -8$

$7y = -14$

$y = -2$

$4x + 5y = -2 \Rightarrow 4x + 5 \cdot (-2) = -2 \Rightarrow 4x - 10 = -2 \Rightarrow 4x = -2 + 10 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

La solución es $x = 2$, $y = -2$

d. $\begin{cases} \mathbf{-2 \cdot (x + 1) = 3 \cdot (y - 4)} \\ \mathbf{6 \cdot (1 + y) = -4 \cdot (3 + x)} \end{cases}$

Se operan las dos ecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} -2 \cdot (x + \mathbf{1}) = 3 \cdot (y - 4) \Rightarrow -2x - 2 = 3y - 12 \Rightarrow -2x - 3y = -10 \\ 6 \cdot (1 + y) = -4 \cdot (3 + x) \Rightarrow 6 + 6y = -12 - 4x \Rightarrow 4x + 6y = -18 \end{cases}$$

Se multiplica por 2 a la primera ecuación y se suman:

$-4x - 6y = -12$

$4x + 6y = -18$

$0x + 0y = -30$

No tiene solución.

5 Resuelve los sistemas propuestos utilizando el método más adecuado. Comprueba la solución utilizando Wiris.

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 6y = 3} \\ \boldsymbol{\dfrac{6x-1}{7} = 3 \cdot (x-3)} \end{cases}$

Se utiliza el método de sustitución. Se despeja la incógnita *x* de la primera ecuación, $x = 3 - 6y$, y se sustituye en la segunda:

$\dfrac{6x-1}{7} = 3 \cdot (y-1) \Rightarrow 6x - 1 = 21y - 21 \Rightarrow 6x - 21y = -21 + 1 \Rightarrow 6x - 21y = -20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \cdot (3 - 6y) - 21y = -20 \Rightarrow 18 - 36y - 21y = -20 \Rightarrow -57y = -20 - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow -57y = -38 \Rightarrow y = \dfrac{-38}{-57} = \dfrac{2}{3}$

$x = 3 - 6y \Rightarrow x = 3 - 6 \cdot \dfrac{2}{3} = 3 - 4 = -1$

La solución es $x = -1$, $y = \dfrac{2}{3}$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{y-3}{8} = \dfrac{2x+1}{6}} \\ \boldsymbol{3y - 6 = 8 \cdot (x-3)} \end{cases}$

Se operan las dos ecuaciones para reducirlas:

$\begin{cases} \dfrac{y-3}{8} = \dfrac{2x+1}{6} \Rightarrow 6 \cdot (y-3) = 8 \cdot (2x+1) \Rightarrow 6y - 18 = 16x + 8 \Rightarrow 16x - 6y = -36 \\ 3y - 6 = 8 \cdot (x-3) \Rightarrow 3y - 6 = 8x - 24 \Rightarrow -6 + 24 = 8x - 3y \Rightarrow 8x - 3y = 18 \end{cases}$

Se multiplica por –2 a la segunda ecuación, $-16x + 6y = -36$, y se suman:

$16x - 6y = -26$

$-16x + 6y = -36$

$0x + 0y = -62$

No tiene solución.

c. $\begin{cases} \boldsymbol{3 \cdot (x - 4) = 2 \cdot (1 - y)} \\ \boldsymbol{-(y + 1) = 5 \cdot (x - 3)} \end{cases}$

Se operan las dos ecuaciones para reducirlas:

$\begin{cases} 3 \cdot (x-4) = 2 \cdot (1-y) \Rightarrow 3x - 12 = 2 - 2y \Rightarrow 3x + 2y = 2 + 12 \Rightarrow 3x + 2y = 14 \\ -(y+1) = 5 \cdot (x-3) \Rightarrow -y - 1 = 5x - 15 \Rightarrow -y - 5x = -15 + 1 \Rightarrow -5x - y = -14 \end{cases}$

Se multiplica por 2 a la segunda ecuación, $-10x - 2y = -28$, y se suman:

$3x + 2y = 14$

$-10x - 2y = -28$

$-7x = -14$

$x = 2$

$-5x - y = -14 \Rightarrow -5 \cdot 2 - y = -14 \Rightarrow -10 + 14 = y \Rightarrow y = 4$

La solución es $x = 2$, $y = 4$

d. $\begin{cases} \mathbf{2x + 3 \cdot (y - 1) = 17 - x} \\ \mathbf{\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+3}{5} = -3} \end{cases}$

Se operan las dos ecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} 2x + 3 \cdot (y - 1) = 17 - x \Rightarrow 2x + 3y + x = 17 + 3 \Rightarrow 3x + 3y = 20 \\ \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+3}{5} = -3 \Rightarrow \dfrac{5 \cdot (x+1)}{15} - \dfrac{3(y+3)}{15} = -45 \Rightarrow 5x - 3y = -41 \end{cases}$$

Se suman ambas ecuaciones:

$3x + 3y = 20$

$5x - 3y = -41$

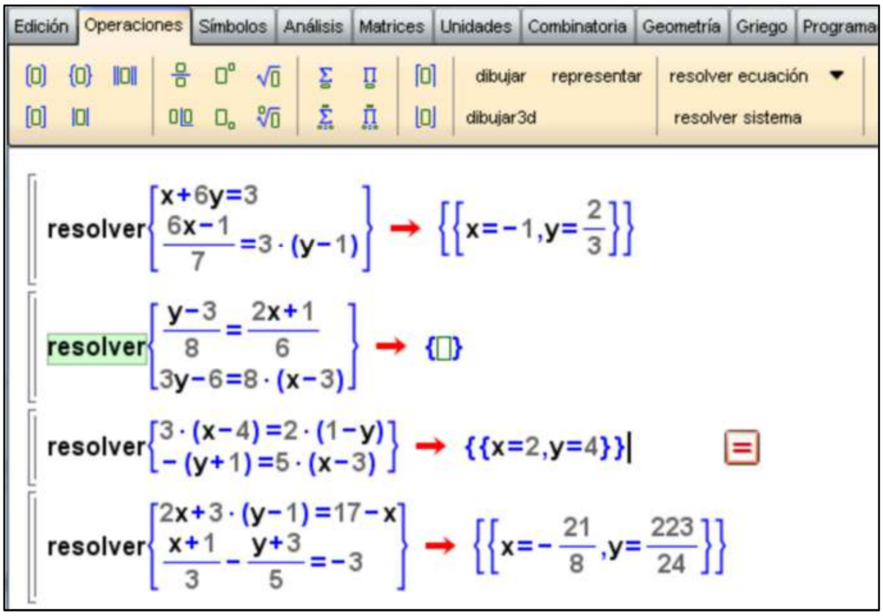
$8x = -21$

$x = \dfrac{-21}{8}$

$3x + 3y = 20 \Rightarrow 3 \cdot \left(\dfrac{-21}{8}\right) + 3y = 20 \Rightarrow \dfrac{-63}{8} + 3y = 20 \Rightarrow 3y = 20 + \dfrac{63}{8} \Rightarrow$

$3y = \dfrac{20 \cdot 8 + 63}{8} \Rightarrow y = \dfrac{160 + 63}{8 \cdot 3} \Rightarrow y = \dfrac{223}{24}$

La solución es $x = \dfrac{-21}{8}$, $y = \dfrac{223}{24}$



SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

6 **Comprueba si $(x, y, z) = (-3, 0, -4)$ es solución de alguno de estos sistemas, sin resolverlos:**

a. $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ -4x + y - 5z = 8 \\ 3x - y + 4z = -7 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ -4x+y-5z=8 \\ 3x-y+4z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3-0-4=-1 \\ 12+0+20=8 \\ -9-0-16=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \neq -1 \\ 32 \neq 8 \\ -25 \neq -7 \end{cases}$$

No es solución.

b. $\begin{cases} 5x + 3y - 2z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 4x + y - z = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x+3y-2z=6 \\ -x-y+2z=0 \\ 4x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15+0+8=6 \\ 3-0-8=0 \\ -12+0+4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \neq 6 \\ -5 \neq 0 \\ -8 \neq 1 \end{cases}$$

No es solución.

7 Encuentra la solución mediante el método de sustitución:

a. $$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 5} \\ \boldsymbol{6x - 2y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{-2x + 3y + z = 8} \end{cases}$$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita x de la primera ecuación, $x = 5 - y - z$, y se sustituye en las otras ecuaciones:

$$\begin{cases} 6\cdot(5 - y - z) - 2y + 3z = 3 \Rightarrow 30 - 6y - 6z - 2y + 3z = 3 \Rightarrow -8y - 3z = -27 \\ -2\cdot(5 - y - z) + 3y + z = 8 \Rightarrow -10 + 2y + 2z + 3y + z = 8 \Rightarrow 5y + 3z = 18 \end{cases}$$

Se suman para eliminar la incógnita z:

$-8y - 3z = -27$

$5y + 3z = 18$

$-3y = -9$

$y = 3$

$5y + 3z = 18 \Rightarrow 5 \cdot 3 + 3z = 18 \Rightarrow 3z = 18 - 15 \Rightarrow 3z = 3 \Rightarrow z = 1$

$x = 5 - y - z \Rightarrow x = 5 - 3 - 1 \Rightarrow x = 1$

La solución es $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$

b. $$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y - 4z = -6} \\ \boldsymbol{x + 5y - 7z = -17} \\ \boldsymbol{-3x + 2y + z = -3} \end{cases}$$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita x de la segunda ecuación, $x = -17 - 5y + 7z$, y se sustituye en las otras ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = -6 \Rightarrow 2\cdot(-17 - 5y + 7z) + y - 4z = -6 \Rightarrow \\ -3x + 2y + z = -3 \Rightarrow -3\cdot(-17 - 5y + 7z) + 2y + z = -3 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} -34 - 10y + 14z + y - 4z = -6 \Rightarrow -9y + 10z = -6 + 34 \Rightarrow -9y + 10z = 28 \\ 51 + 15y - 21z + 2y + z = -3 \Rightarrow 17y - 20z = -3 - 51 \Rightarrow 17y - 20z = -54 \end{cases}$$

Se multiplica por 2 a la primera ecuación resultante, $-18y + 20z = 56$ y se suman:

$-18y + 20z = 56$

$17y - 20z = -54$

$-y = 2$

$y = -2$

$-9y + 10z = 28 \Rightarrow -9 \cdot (-2) + 10z = 28 \Rightarrow 18 + 10z = 28 \Rightarrow 10z = 28 - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10z = 10 \Rightarrow z = 1$

$x = –17 – 5y + 7z \Rightarrow x = –17 – 5 \cdot (–2) + 7 \cdot 1 \Rightarrow x = –17 + 10 + 7 \Rightarrow 0$

La solución es $x = 0$, $y = –2$, $z = 1$

c. $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y - 2z = 0} \\ \mathbf{4x + y - z = 3} \\ \mathbf{x + 2y - 3z = -2} \end{cases}$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita x de la tercera ecuación, $x = –2 – 2y + 3z$, y se sustituye en las otras ecuaciones:

$$2\cdot(-2-2y+3z)-3y-2z=0 \Rightarrow -4-4y+6z-3y-2z=0 \Rightarrow -7y+4z=4$$
$$4\cdot(-2-2y+3z)+y-z=3 \Rightarrow -8-8y+12z+y-z=3 \Rightarrow -7y+11z=11$$

Se multiplica por –1 a la primera ecuación resultante, $7y – 4z = –4$, y se suman:

$7y – 4z = –4$

$–7y + 11z = 11$

$7z = 7$

$z = 1$

$–7y + 4z = 4 \Rightarrow 7y + 4 = 4 \Rightarrow 7y = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = –2 – 2y + 3z \Rightarrow x = –2 – 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \Rightarrow x = –2 + 3 \Rightarrow x = 1$

La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

d. $\begin{cases} \mathbf{3x + y + 2z = 1} \\ \mathbf{-x - y + 4z = -3} \\ \mathbf{-2x + 3y + z = 2} \end{cases}$

Se despeja, por ejemplo, la incógnita x de la segunda ecuación, $x = 3 – y + 4z$, y se sustituye en las otras ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \Rightarrow 3\cdot(3-y+4z)+y+2z=1 \Rightarrow 9-3y+12z+y+2z=1 \Rightarrow \\ -2x+3y+z=2 \Rightarrow -2\cdot(3-y+4z)+3y+z=2 \Rightarrow -6+2y-8z+3y+z=2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y+14z=-8 \Rightarrow -y+7z=-4 \\ 5y-7z=8 \end{cases}$$

Se suman las dos ecuaciones resultantes:

$–y + 7z = –4$

$5y – 7z = 8$

$4y = 4$

$y = 1$

$-y + 7z = -4 \Rightarrow -1 + 7z = -4 \Rightarrow 7z = -4 + 1 \Rightarrow 7z = -3 \Rightarrow z = \frac{-3}{7}$

$x = 3 - y + 4z \Rightarrow x = 3 - 1 + 4 \cdot \left(\frac{-3}{7}\right) \Rightarrow x = 2 - \frac{12}{7} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 2 - 12}{7} \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

La solución es $x = \frac{2}{7}$, $y = 1$, $z = \frac{-3}{7}$

8 Soluciona los sistemas por el método de igualación:

a. $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x + 3y - z = 7} \\ \mathbf{-3x + 7z = -18} \\ \mathbf{4x - 5y + 2z = -20} \end{array}\right.$

Se despeja la z de las tres ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 7 \\ -3x + 7z = -18 \\ 4x - 5y + 2z = -20 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x + 3y - 7 \\ z = \dfrac{3x - 18}{7} \\ z = \dfrac{-4x + 5y - 20}{2} \end{array}\right.$$

Se igualan dos a dos:

$2x + 3y - 7 = \frac{3x - 18}{7} \Rightarrow 14x + 21y - 49 = 3x - 18 \Rightarrow 14x - 3x + 21y = -18 + 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow 11x + 21y = 31$

$2x + 3y - 7 = \frac{-4x + 5y - 20}{2} \Rightarrow 4x + 6y - 14 = -4x + 5y - 20 \Rightarrow$

$4x + 4x + 6y - 5y = -20 + 14 \Rightarrow 8x + y = -6 \Rightarrow y = -6 - 8x$

Se sustituye la incógnita y obtenida en la segunda ecuación en la primera ecuación y se resuelve:

$11x + 21y = 31 \Rightarrow 11x + 21 \cdot (-6 - 8x) = 31 \Rightarrow 11x - 126 - 168x = 31 \Rightarrow$

$-157x = 157 \Rightarrow x = -1$

$y = -6 - 8x \Rightarrow y = -6 - 8 \cdot (-1) \Rightarrow y = -6 + 8 \Rightarrow y = 2$

$z = 2x + 3y - 7 \Rightarrow z = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 7 \Rightarrow z = -2 + 6 - 7 \Rightarrow z = -3$

La solución es $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y - z = -2} \\ \boldsymbol{-x - 2y + 3z = -1} \\ \boldsymbol{2x + y - 4z = 3} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *x* en las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - 3y + z \\ x = 1 - 2y + 3z \\ x = \dfrac{3 - y + 4z}{2} \end{cases}$$

Se igualan dos a dos:

$-2 - 3y + z = 1 - 2y + 3z \Rightarrow - 3y + 2y + z - 3z = 1 + 2 \Rightarrow -y - 2z = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 2z = -3 \Rightarrow y = -3 - 2z$

$1 - 2y + 3z = \dfrac{3 - y + 4z}{2} \Rightarrow 2 - 4y + 6z = 3 - y + 4z \Rightarrow 2 - 4y + 6z = 3 - y + 4z \Rightarrow$

$\Rightarrow - 4y + 6z + y - 4z = 3 - 2 \Rightarrow -3y + 2z = 1 \Rightarrow$

Se sustituye la incógnita *y* obtenida en la segunda ecuación en la primera ecuación y se resuelve:

$\Rightarrow -3 \cdot (-3 - 2z) + 2z = 1 \Rightarrow 9 + 6z + 2z = 1 \Rightarrow 8z = 1 - 9 \Rightarrow 8z = -8 \Rightarrow z = -1$

$y = -3 - 2z \Rightarrow y = -3 - 2 \cdot (-1) \Rightarrow y = -3 + 2 \Rightarrow y = -1$

$x = 1 - 2y + 3z \Rightarrow x = 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \Rightarrow x = 1 + 2 - 3 \Rightarrow x = 0$

La solución es $x = 0$, $y = -1$, $z = -1$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{-4x + 3y = -5} \\ \boldsymbol{3x + 2y - z = -3} \\ \boldsymbol{5x - z = 5} \end{cases}$

Se despeja la *z* de la segunda y tercera ecuación y se igualan:

$$\begin{cases} z = 3x + 2y + 3 \\ z = 5x - 5 \end{cases}$$

$3x + 2y + 3 = 5x - 5 \Rightarrow 3x - 5x + 2y = -5 - 3 \Rightarrow -2x + 2y = -8 \Rightarrow -x + y = -4$

$-x + y = -4 \Rightarrow$ Se multiplica por $-4 \Rightarrow$ $\quad 4x - 4y = 16$

$-4x + 3y = -5$ $\quad -4x + 3y = -5$

$$\begin{array}{r} 4x - 4y = 16 \\ -4x + 3y = -5 \\ \hline -y = 11 \end{array}$$

$y = -11$

$-x + y = -4 \Rightarrow -x - 11 = -4 \Rightarrow x = -7$

$z = 5x - 5 \Rightarrow z = 5 \cdot (-7) - 5 \Rightarrow z = -35 - 5 \Rightarrow z = -40$

La solución es $x = -7$, $y = -11$, $z = -40$

d. $\begin{cases} \mathbf{-2x + y - 4z = 2} \\ \mathbf{7x - 3y + z = 4} \\ \mathbf{4x - 2y + 3z = -1} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* en las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x + y - 4z = 2 \\ 7x - 3y + z = 4 \\ 4x - 2y + 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4z + 2 \\ y = \dfrac{-7x - z + 4}{-3} \\ y = \dfrac{-4x - 3z - 1}{-2} \end{cases}$$

Se igualan dos a dos:

$2x + 4z + 2 = \dfrac{-7x - z + 4}{-3} \Rightarrow -6x - 12z - 6 = -7x - z + 4 \Rightarrow -6x + 7x - 12z + z =$
$= 4 + 6 \Rightarrow x - 11z = 10$

$2x + 4z + 2 = \dfrac{-4x - 3z - 1}{-2} \Rightarrow -4x - 8z - 4 + 4x + 3z = -1 \Rightarrow -5z = -1 + 4 \Rightarrow -5z =$
$= 3 \Rightarrow z = -\dfrac{3}{5}$

$x - 11z = 10 \Rightarrow x = 10 + 11z \Rightarrow x = 10 + 11 \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow x = 10 - \dfrac{33}{5} \Rightarrow x =$
$\dfrac{50 - 33}{5} \Rightarrow x = \dfrac{17}{5}$

$y = 2x + 4z + 2 \Rightarrow y = 2 \cdot \dfrac{17}{5} + 4 \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) + 2 \Rightarrow y = \dfrac{34}{5} - \dfrac{12}{5} + 2 \Rightarrow y =$
$\dfrac{34 - 12 + 10}{5} \Rightarrow y = \dfrac{32}{5}$

La solución es $x = \dfrac{17}{5}$, $y = \dfrac{32}{5}$, $z = -\dfrac{3}{5}$

9 Halla estos sistemas por el método de reducción:

a. $\begin{cases} \mathbf{x + y + 3z = 2} \\ \mathbf{2x - y + 5z = 2} \\ \mathbf{3x + y - 2z = 15} \end{cases}$

Se multiplica por –1 a la primera ecuación, $-x - y - 3z = -2$, y se suma con la tercera ecuación:

$$\begin{cases} -x - y - 3z = -23 \\ x + y - 2z = 15 \end{cases}$$

$2x - 5z = 13$

Se suman la primera y segunda ecuaciones:

$x + y + 3z = 2$

$2x - y + 5z = 2$

$3x + 8z = 4$

Se multiplica por –3 a la primera ecuación obtenida, $-6x + 15z = -39$, y por 2 a la segunda ecuación obtenida, $6x + 16z = 8$, y se suman:

$-6x + 15z = -39$

$6x + 16z = 8$

$31z = -31$

$z = -1$

$2x - 5z = 13 \Rightarrow 2x - 5 \cdot (-1) = 13 \Rightarrow 2x + 5 = 13 \Rightarrow 2x = 13 - 5 \Rightarrow x = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$

$x + y + 3z = 2 \Rightarrow y = 2 - x - 3z \Rightarrow y = 2 - 4 - 3 \cdot (-1) \Rightarrow y = 2 - 4 + 3 \Rightarrow y = 1$

La solución es $x = 4$, $y = 1$, $z = -1$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{2x + 3y - z = -4} \\ \boldsymbol{-4x + 3y = 1} \\ \boldsymbol{5x - 6y + z = 3} \end{cases}$

Se multiplica por 2 a la primera ecuación, $4x + 6y - 2z = -8$, y se suma con la tercera:

$4x + 6y - 2z = -8$

$5x - 6y + z = 3$

$9x - z = -5$

Se multiplica por –1 a la primera ecuación, $-2x - 3y + z = 4$, y se suma con la segunda:

$-2x - 3y + z = 4$

$-4x + 3y = 1$

$-6x + z = 5$

Se suman las dos ecuaciones obtenidas:

$9x - z = -5$

$-6x + z = 5$

$3x = 0$

$x = 0$

$9x - z = -5 \Rightarrow z = 5$

$-4x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

La solución es $x = 0$, $y = \dfrac{1}{3}$, $z = 5$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 3z = 1} \\ \boldsymbol{2x + 4y - 6z = 2} \\ \boldsymbol{-3x - 6y + 9z = -3} \end{cases}$

Se observa que la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2 y la tercera ecuación es la primera multiplicada por –3. Este sistema está formado por ecuaciones equivalentes, es decir, se reduce a una ecuación con tres incógnitas, por lo que tiene infinitas soluciones.

d. $\begin{cases} \boldsymbol{4y + 5z = 3} \\ \boldsymbol{x + 8y - z = 15} \\ \boldsymbol{2x - y + 2z = -8} \end{cases}$

Se multiplica por 4 a la 3.ª ecuación, $8x - 4y + 8z = -32$, y se suma con la 1.ª:

$4y + 5z = 3$

$8x - 4y + 8z = -32$

$8x + 13z = -29$

Se multiplica por –2 a la 1.ª ecuación, $-8y - 10z = -6$, y se suma con la 2.ª ecuación:

$-8y - 10z = -6$

$x + 8y - z = 15$

$x - 11z = 9$

Se multiplica por –8 a la 2.ª ecuación resultante, $-8x + 88z = -72$, y se suma con la 1.ª ecuación obtenida:

$$\begin{array}{r} 8x + 13z = -29 \\ -8x + 88z = -72 \\ \hline 101z = -101 \end{array}$$

$z = -1$

$x - 11z = 9 \Rightarrow x = 9 + 11z \Rightarrow x = 9 + 11 \cdot (-1) \Rightarrow x = 9 - 11\ x = -2$

$4y + 5z = 3 \Rightarrow 4y = 3 - 5z \Rightarrow 4y = 3 - 5 \cdot (-1) \Rightarrow 4y = 3 + 5 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2$

La solución es $x = -2$, $y = 2$, $z = -1$

10 Resuelve estos sistemas aplicando el método más adecuado y comprueba luego las soluciones con Wiris:

a. $$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \cdot (z-1) \\ -(x+y) + 3z = 4 \\ 3 \cdot (x + 2y - z) = 0 \end{cases}$$

Se va a resolver por reducción. Se operan las ecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \cdot (z-1) \\ -(x+y) + 3z = 4 \\ 3 \cdot (x + 2y - z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 4z - 4 \Rightarrow 2x - 3y - 4z = -4 \\ -x - y + 3z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \Rightarrow x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se multiplica por 2 a la 2.ª ecuación, $-2x - 2y + 6z = 8$, y se suma con la 1.ª:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y - 4z = -4 \\ -2x - 2y + 6z = 8 \\ \hline -5y + 2z = 4 \end{array}$$

Se suman la segunda y tercera ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - z = 0 \\ \hline y + 2z = 4 \end{array}$$

Se multiplica por –1 a la 2.ª ecuación obtenida, $-y - 2z = -4$, y se suma con la 1.ª obtenida:

$$\begin{array}{l} -5y + 2z = 4 \\ -y - 2z = -4 \\ \hline -6y = 0 \end{array}$$

$y = 0$

$y + 2z = 4 \Rightarrow 0 + 2z = 4 \Rightarrow z = 2$

$x + 2y - z = 0 \Rightarrow x = -2y + z \Rightarrow x = -2 \cdot 0 + 2 \Rightarrow x = 2$

La solución es $x = 2$, $y = 0$, $z = 2$

b. $$\begin{cases} \mathbf{2 \cdot (x + 3) - 3 \cdot (y - 1) - (z + 2) = -9} \\ \mathbf{5 \cdot (2x - 4) + 2 \cdot (y - 3) = -5 \cdot (1 + z)} \\ \mathbf{x + 2y = z} \end{cases}$$

Se va a resolver por igualación. Se opera con las ecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} 2\cdot(x+3) - 3\cdot(y-1) - (z+2) = -9 \\ 5\cdot(2x-4) + 2\cdot(y-3) = -5\cdot(1+z) \\ x + 2y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6 - 3y + 3 - z - 2 = -9 \\ 10x - 20 + 2y - 6 = -5 - 5z \\ x + 2y = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = -16 \\ 10x + 2y + 5z = 21 \\ x + 2y = z \end{cases}$$

Para ello se despeja la incógnita z de las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = -16 \\ 10x + 2y + 5z = 21 \\ x + 2y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x - 3y + 16 \\ z = \dfrac{-10x - 2y + 21}{5} \\ x + 2y = z \end{cases}$$

Se igualan dos a dos:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 16 = x + 2y \Rightarrow 2x - 3y - x - 2y = -16 \Rightarrow x - 5y = -16 \\ \dfrac{-10x - 2y + 21}{5} = x + 2y \Rightarrow -10x - 2y - 5x - 10y = -21 \Rightarrow -15x - 10y = -21 \end{cases}$$

Se despeja x de la primera ecuación obtenida, $x = 5y - 16$, y se sustituye en la segunda ecuación obtenida:

$15x + 12y = 21 \Rightarrow 15 \cdot (5y - 16) + 12y = 21 \Rightarrow 75y - 240 + 12y = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 87y = 21 + 240 \Rightarrow 87y = 261 \Rightarrow y = 3$

$x = 5y - 16 \Rightarrow x = 5 \cdot 3 - 16 \Rightarrow x = 15 - 16 \Rightarrow x = -1$

$x + 2y = z \Rightarrow -1 + 2 \cdot 3 = z \Rightarrow z = 5$

La solución es $x = -1$, $y = 3$, $z = 5$

SOLUCIONES PÁG. 111

MÉTODO DE GAUSS

11 Resuelve estos sistemas por el método de Gauss. Comprueba las soluciones con Wiris.

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y + 4z = 14} \\ \boldsymbol{2x + 3y - 2z = -10} \\ \boldsymbol{-x + 5y - z = -23} \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 14 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la primera ecuación por (–2)

$$\begin{cases} -2x + 4y - 8z = -28 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

$$7y - 10z = -38$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 14 \\ -x + 5y - z = -23 \end{cases}$$

$$3y + 3z = -9 \Rightarrow y + z = -3$$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 14 \\ 7y - 10z = -38 \\ y + z = -3 \end{cases}$$

Se elimina la incógnita *y.*

$$\begin{cases} 7y - 10z = -38 \\ y + z = -3 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la segunda ecuación por –7

$7y - 10z = -38$

$-7y - 7z = 21$

$-17z = -17$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 14 \\ 7y - 10z = -38 \\ -17z = -17 \end{cases}$$

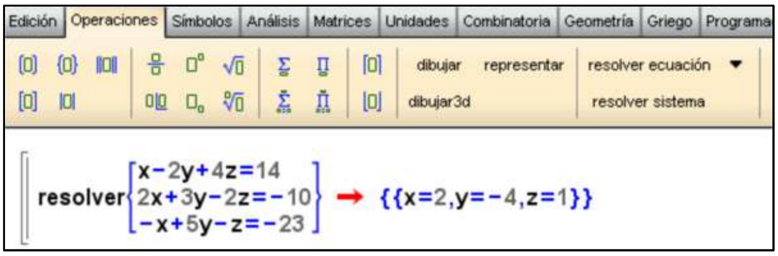
Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$-17z = -17 \Rightarrow z = 1$

$7y - 10z = -38 \Rightarrow 7y - 10 = -38 \Rightarrow 7y = -38 + 10 \Rightarrow 7y = -28 \Rightarrow y = -4$

$x = 14 + 2y - 4z \Rightarrow x = 14 + 2 \cdot (-4) - 4 \cdot 1 \Rightarrow x = 14 - 8 - 4 \Rightarrow x = 2$

La solución es: $x = 2$, $y = -4$, $z = 1$



b. $\begin{cases} \mathbf{3}x + y - \mathbf{5}z = \mathbf{12} \\ x - \mathbf{6}y + z = -\mathbf{4} \\ \mathbf{4}x - \mathbf{2}y - \mathbf{3}z = \mathbf{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 12 \\ x - 6y + z = -4 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la segunda ecuación por (–3)

$3x + y - 5z = 12$

$-3x + 18y - 3z = 12$

$19y - 8z = 24$

$$\begin{cases} x - 6y + z = -4 \\ 4x - 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por –4.

$-4x + 24y - 4z = 16$

$4x - 2y - 3z = 5$

$22y - 7z = 21$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 6y + z = -4 \\ 19y - 8z = 24 \\ 22y - 7z = 21 \end{cases}$$

Se elimina la incógnita *z.*

$$\begin{cases} 19y - 8z = 24 \\ 22y - 7z = 21 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por 7 y la segunda por –8.

$$\begin{cases} 133y - 56z = 168 \\ -176y + 56z = -168 \end{cases}$$

$-43y = 0$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 6y + z = -4 \\ 19y - 8z = 24 \\ -43y = 0 \end{cases}$$

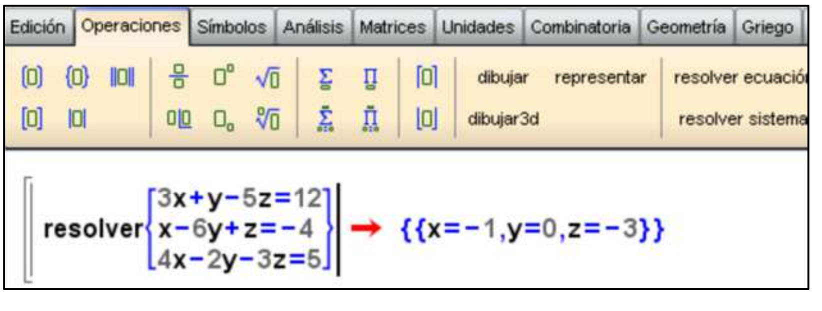
Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$-43y = 0 \Rightarrow y = 0$

$19y - 8z = 24 \Rightarrow -8z = 24 \Rightarrow \Rightarrow z = -3$

$x - 6y + z = -4 \Rightarrow x = -4 + 6y - z \Rightarrow x = -4 + 6 \cdot 0 - (-3) \Rightarrow x = -1$

La solución es: $x = -1$, $y = 0$, $z = -3$



c. $\begin{cases} \boldsymbol{7x + y + 2z = 1} \\ \boldsymbol{-4x + 2y - 5z = 20} \\ \boldsymbol{x + y - 4z = 19} \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x + y + 2z = 1 \\ -4x + 2y - 5z = 20 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por –2.

$$\begin{cases} -14x + -2y - 4z = -2 \\ -4x + 2y - 5z = 20 \end{cases}$$

$-18x - 9z = 18 \Rightarrow -2x - z = 2$

$$\begin{cases} -4x + 2y - 5z = 20 \\ x + y - 4z = 19 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la segunda ecuación por –2.

$$\begin{cases} -4x + 2y - 5z = 20 \\ -2x - 2y + 8z = -38 \end{cases}$$

$-6x + 3z = -18 \Rightarrow -2x + z = -6$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y - 4z = 19 \\ -2x - z = 2 \\ -2x + z = -6 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita *z.*

$$\begin{cases} -2x - z = 2 \\ -2x + z = -6 \end{cases}$$

$-4x = -4$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y - 4z = 19 \\ -2x - z = 2 \\ -4x = -4 \end{cases}$$

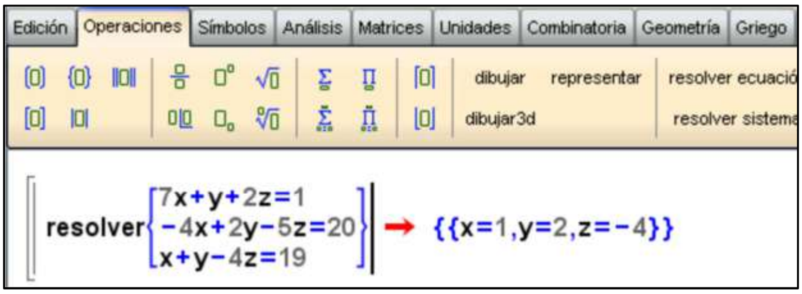
Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$-4x = -4 \Rightarrow x = 1$

$-2x - z = 2 \Rightarrow -2 \cdot 1 - z = 2 \Rightarrow -z = 2 + 2 \Rightarrow -z = 4 \Rightarrow z = -4$

$x + y - 4z = 19 \Rightarrow y = 19 - x + 4z \Rightarrow y = 19 - 1 + 4 \cdot (-4) \Rightarrow y = 2$

La solución es: $x = 1$, $y = 2$, $z = –4$



d. $\begin{cases} \mathbf{2x + y - z = -3} \\ \mathbf{3x - 2y + 9z = -1} \\ \mathbf{4x + y - 3z = -9} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ 3x - 2y + 9z = -1 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la primera ecuación por 2.

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + 9z = -1 \end{cases}$$

$7x + 7z = –7 \Rightarrow x + z = –1$

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ 4x + y - 3z = -9 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la primera ecuación por –1.

$$\begin{cases} -2x - y + z = 3 \\ 4x + y - 3z = -9 \end{cases}$$

$2x – 2z = –6 \Rightarrow x – z = –3$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x + z = -1 \\ x - z = -3 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita *z*.

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ x - z = -3 \end{cases}$$

$2x = –4$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x + y - z = & -3 \\ x + z = & -1 \\ 2x = & -4 \end{cases}$$

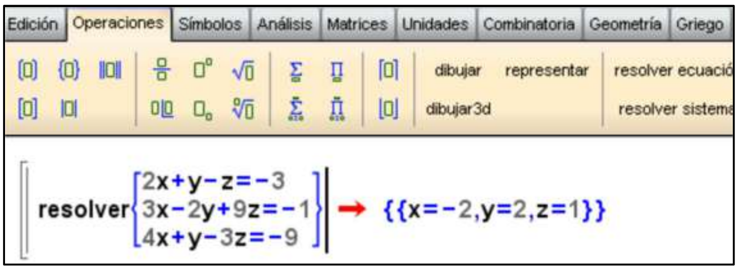
Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$2x = –4 \Rightarrow x = –2$

$x + z = –1 \Rightarrow –2 + z = –1 \Rightarrow z = 1$

$2x + y – z = –3 \Rightarrow y = –3 – 2x + z \Rightarrow y = –3 – 2 \cdot (–2) + 1 \Rightarrow y = –3 + 4 + 1 \Rightarrow y = 2$

La solución es: $x = –2$, $y = 2$, $z = 1$



e. $$\begin{cases} \mathbf{-3x + 5y - 2z = -8} \\ \mathbf{x + 2y + 3z = -6} \\ \mathbf{6x - 3y + 2z = -7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y - 2z = & -8 \\ x + 2y + 3z = & -6 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por 2

$$\begin{cases} -9x + 15y - 6z = & -24 \\ 2x + 4y + 6z = & -12 \end{cases}$$

$–7x + 19y = –36$

$$\begin{cases} -3x + 5y - 2z = & -8 \\ 6x - 3y + 2z = & -7 \end{cases}$$

$3x + 2y = –15$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = & -6 \\ -7x + 19y = & -36 \\ 3x + 2y = & -15 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita *x.*

$$\begin{cases} -7x + 19y = -36 \\ 3x + 2y = -15 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por 7

$$\begin{cases} -21x + 57y = -108 \\ 21x + 14y = -105 \end{cases}$$

$71y = -213$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -6 \\ -7x + 19y = -36 \\ 71y = -213 \end{cases}$$

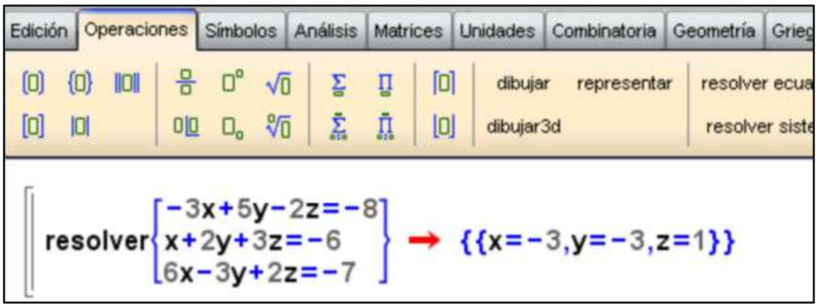
Se calcula el valor de las tres incógnitas:

$71y = -213 \Rightarrow y = -3$

$-7x + 19y = -36 \Rightarrow -7x + 19 \cdot (-3) = -36 \Rightarrow -7x - 57 = -36 \Rightarrow -7x + = -36 + 57 \Rightarrow -7x = 21 \Rightarrow x = -3$

$x + 2y + 3z = -6 \Rightarrow 3z = -6 - x - 2y \Rightarrow 3z = -6 - (-3) - 2 \cdot (-3) \Rightarrow 3z = -6 + 3 + 6 \Rightarrow z = 1$

La solución es: $x = -3$, $y = -3$, $z = 1$



f. $\begin{cases} \mathbf{-4}x - \mathbf{3}y - \mathbf{5}z = \mathbf{1} \\ \mathbf{2}x + \mathbf{4}y + z = -\mathbf{8} \\ \mathbf{7}x - \mathbf{4}y + \mathbf{2}z = \mathbf{26} \end{cases}$

$$\begin{cases} -4x - 3y - 5z = 1 \\ 2x + 4y + z = -8 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por 4 y la segunda por 3

$$\begin{cases} -16x - 12y - 20z = 4 \\ 6x + 12y + 3z = -24 \end{cases}$$

$-10x - 17z = -20$

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = -8 \\ 7x - 4y + 2z = 26 \end{cases}$$

$9x + 3z = 18 \Rightarrow 3x + z = 6$

Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = -8 \\ -10x - 17z = -20 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita *z.*

$$\begin{cases} -10x - 17z = -20 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la segunda ecuación por 17

$$\begin{cases} -10x - 17z = -20 \\ 51x + 17z = 102 \end{cases}$$

$41x = 82$

El sistema final es el sistema escalonado:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = -8 \\ 3x + z = 6 \\ 41x = 82 \end{cases}$$

Se calcula el valor de las tres incógnitas:

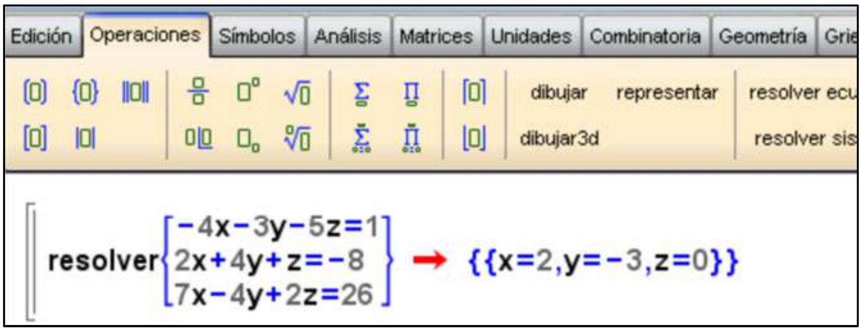
$41x = 82 \Rightarrow x = 2$

$3x + z = 6 \Rightarrow 3 \cdot 2 + z = 6 \Rightarrow z = 6 - 6 \Rightarrow z = 0$

$2x + 4y + z = -8 \Rightarrow 4y = -8 - 2x - z \Rightarrow 4y = -8 - 2 \cdot 2 - 0 \Rightarrow 4y = -8 - 2 \cdot 2 - 0$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow 4y = -8 - 4 \Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$

La solución es: $x = 2$, $y = -3$, $z = 0$



12 Halla las soluciones de los siguientes sistemas utilizando matrices en el método de Gauss:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y - 2z = -2} \\ \boldsymbol{3x - y - z = 12} \\ \boldsymbol{-2x - 2y + 3z = -6} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 12 \\ -2 & -2 & 3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=E_3+2\cdot E_1]{E_2=E_2-3\cdot E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 5 & 18 \\ 0 & -8 & -1 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=E_3+E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = -2 \\ 8y + 5z = 18 \\ 4z = 8 \end{cases} \Rightarrow z = 2, y = 1, x = 5$$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{-x + 2y + 3z = 10} \\ \boldsymbol{x - 4y - 2z = -4} \\ \boldsymbol{5x + 3y - z = -7} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & -4 & -2 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=E_3+5\cdot E_1]{E_2=E_2+E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 13 & 14 & 43 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=2\cdot E_3+13\cdot E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 41 & 164 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 10 \\ -2y + z = 6 \\ 41z = 164 \end{cases} \Rightarrow z = 4, y = -1, x = 0$$

c. $\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{7}\boldsymbol{z} = \mathbf{3} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = -\mathbf{12} \\ \boldsymbol{x} - \mathbf{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} = -\mathbf{1} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 & \vdots & 3 \\ 3 & -4 & 2 & \vdots & -12 \\ 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \Leftrightarrow E_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 \\ 3 & -4 & 2 & \vdots & -12 \\ 2 & 0 & -7 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3-2\cdot E_1]{E_2=E_2-3\cdot E_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 8 & \vdots & -9 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3=E_3+2\cdot E_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 8 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 13 & \vdots & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = -9 \\ 13z = -13 \end{Bmatrix} \Rightarrow z = -1, y = 1, x = -2$$

d. $\begin{cases} -\mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} = -\mathbf{10} \\ \boldsymbol{y} - \mathbf{4}\boldsymbol{z} = -\mathbf{5} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{5} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & \vdots & -10 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 2 & -2 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3=5\cdot E_3+2\cdot E_1]{} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & \vdots & -10 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & -4 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3=E_3+4\cdot E_2}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & \vdots & -10 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & -15 & \vdots & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -5x + 3y - 2z = -10 \\ y - 4z = -5 \\ -15z = -15 \end{Bmatrix} \Rightarrow z = 1, y = -1, x = 1$$

e. $\begin{cases} \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{7}\boldsymbol{z} = -\mathbf{2} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{9} \\ -\mathbf{5}\boldsymbol{y} + \mathbf{6}\boldsymbol{z} = \mathbf{17} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & \vdots & -2 \\ 2 & -3 & 0 & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & 6 & \vdots & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2=2\cdot E_2-E_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & \vdots & -2 \\ 0 & -6 & 7 & \vdots & 20 \\ 0 & -5 & 6 & \vdots & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3=6\cdot E_3-5\cdot E_2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & \vdots & -2 \\ 0 & -6 & 7 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4x - 7z = -2 \\ -6y + 7z = 20 \\ z = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow z = 2, y = -1, x = 3$$

f. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 9y - 5z = 1} \\ \boldsymbol{-3x + 6y + 9z = -9} \\ \boldsymbol{2x - 3y - 8z = 4} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -5 & 1 \\ -3 & 6 & 9 & -9 \\ 2 & -3 & -8 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=E_3-2\cdot E_1]{E_2=E_2+3\cdot E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 33 & -6 & -6 \\ 0 & -21 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=3\cdot E_3+E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 33 & -6 & -6 \\ 0 & -30 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+9y-5z=1 \\ 33y-6z=-6 \\ -30y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=0, z=1, x=6$$

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

13 Resuelve los siguientes sistemas no lineales por el método de sustitución:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y = -3} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 13} \end{cases}$

Se despeja la incógnita x en la primera ecuación, $x = 3y - 3$, y se sustituye en la segunda:

$(3y-3)^2 + y^2 = 13 \Rightarrow (3y)^2 + 3^2 - 2 \cdot 3y \cdot 3 + y^2 = 13 \Rightarrow 9y^2 + 9 - 18y + y^2 - 13 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10y^2 - 18y - 4 = 0 \Rightarrow 5y^2 - 9y - 2 = 0$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{9 \pm 11}{10} \Rightarrow$$

$$y = \begin{cases} y_1 = \dfrac{9+11}{10} = \dfrac{20}{10} = 2 \\ y_2 = \dfrac{9-11}{10} = \dfrac{-2}{10} = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

- Si $y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 3y_1 - 3 \Rightarrow x_1 = 3 \cdot 2 - 3 \Rightarrow x_1 = 6 - 3 \Rightarrow x_1 = 3$
- Si $y_2 = \dfrac{-1}{5} \Rightarrow x_2 = 3 \cdot y_2 - 3 \Rightarrow x_2 = 3 \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) - 3 \Rightarrow x_2 = \left(\dfrac{-3}{5}\right) - 3 \Rightarrow$

  $x_2 = \dfrac{-3-15}{5} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-18}{5}$

Las soluciones son: $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{18}{5}$, $y_2 = -\dfrac{1}{5}$.

b. $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y^2 = -4} \\ \boldsymbol{x^2 - 3y^2 = 4} \end{cases}$

Se despeja y^2 en la 1.ª ecuación, $y^2 = -4 - 2x$, y se sustituye en la 2.ª:

$x^2 - 3 \cdot (-4 - 2x) = 4 \Rightarrow x^2 + 12 + 6x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6+2}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-6-2}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

- Si $x_1 = -2 \Rightarrow y_1^2 = -4 - 2x_1 \Rightarrow y_1^2 = -4 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow y_1^2 = -4 + 4 \Rightarrow y_1^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$
- Si $x_2 = -4 \Rightarrow y_2^2 = -4 - 2x_2 \Rightarrow y_2^2 = -4 - 2 \cdot (-4) \Rightarrow y_2^2 = -4 + 8 \Rightarrow y_2^2 = 4 \Rightarrow$

  $\Rightarrow y_2 = \sqrt{4} \Rightarrow y_2 = \pm 2$

Las soluciones son: $x_1 = -2$, $y_1 = 0$, $x_2 = -4$, $y_2 = 2$, $x_3 = -4$, $y_3 = -2$.

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x \cdot y = 8} \\ \boldsymbol{x - 5y = -6} \end{cases}$

Se despeja la incógnita x de la 2.ª ecuación, $x = -6 + 5y$, y se sustituye en la 1.ª:

$(-6 + 5y) \cdot y = 8 \Rightarrow -6y + 5y^2 - 8 = 0 \Rightarrow 5y^2 - 6y - 8 = 0$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{6+14}{10} = \dfrac{20}{10} = 2 \\ y_2 = \dfrac{6-14}{10} = -\dfrac{8}{10} = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

- Si $y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -6 + 5y_1 \Rightarrow x_1 = -6 + 5 \cdot 2 = -6 + 10 = 4$
- Si $y_2 = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow x_2 = -6 + 5y_2 \Rightarrow x_1 = -6 + 5 \cdot \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -6 - \dfrac{20}{5} = \dfrac{-50}{5} = -10$

Las soluciones son: $x_1 = 4$, $y_1 = 2$, $x_2 = -10$, $y_2 = -\dfrac{4}{5}$

d. $\begin{cases} \boldsymbol{5x - 2y = 3} \\ \boldsymbol{4x - y^2 = 3} \end{cases}$

Se despeja y en la 2.ª ecuación, $y = \sqrt{4x - 3}$, y se sustituye en la 1.ª:

$5x - 2y = 3 \Rightarrow 5x - 2\sqrt{4x - 3} = 3 \Rightarrow -2 \cdot \sqrt{4x - 3} = 3 - 5x \Rightarrow \sqrt{4x - 3} = \dfrac{3 - 5x}{-2}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{4x - 3}\right)^2 = \left(\dfrac{3 - 5x}{-2}\right)^2 \Rightarrow 4x - 3 = \dfrac{9 + 25x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5x}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x - 12 = 9 + 25x^2 - 30x \Rightarrow 9 + 25x^2 - 30x - 16x + 12 = 0 \Rightarrow 25x^2 - 46x + 21 = 0$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{46^2 - 4 \cdot 25 \cdot 21}}{2 \cdot 25} = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 2100}}{50} = \frac{46 \pm \sqrt{16}}{50} = \frac{46 \pm 4}{50} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{46+4}{50} = \dfrac{50}{50} = 1 \\ x_2 = \dfrac{46-4}{50} = \dfrac{42}{50} = \dfrac{21}{25} \end{cases}$$

- Si $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \sqrt{4x_1 - 3} = \sqrt{4 \cdot 1 - 3} = \sqrt{1} = \pm 1$ (Solo consideramos el resultado positivo.)
- Si $x_2 = \dfrac{21}{25} \Rightarrow y_2 = \sqrt{4x_2 - 3} = \sqrt{4 \cdot \dfrac{21}{25} - 3} = \sqrt{\dfrac{84}{25} - 3} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

Las soluciones son: $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{21}{25}$, $y_2 = \dfrac{3}{5}$

14 Encuentra las soluciones de estos sistemas utilizando el método de igualación:

a. $\begin{cases} \mathbf{3x^2 + y = 0} \\ \mathbf{-2x^2 - y = 1} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -2x^2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ y = -2x^2 - 1 \end{cases}$$

$-3x^2 = -2x^2 - 1 \Rightarrow -3x^2 + 2x^2 = -1 \Rightarrow -x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$

- Si $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -3x^2 \Rightarrow y_1 = -3$
- Si $x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -3x^2 \Rightarrow y_2 = -3$

Las soluciones son: $x_1 = 1$, $y_1 = -3$, $x_2 = -1$, $y_2 = -3$.

b. $\begin{cases} \mathbf{x \cdot y = 12} \\ \mathbf{x - 2y = -10} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x - 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12}{y} \\ x = -10 + 2y \end{cases}$$

$\dfrac{12}{y} = -10 + 2y \Rightarrow 12 = -10y + 2y^2 \Rightarrow 2y^2 - 10y - 12 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y - 6 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{5+7}{2} = 6 \\ y_2 = \dfrac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

- Si $y_1 = 6 \Rightarrow x_1 = \dfrac{12}{y} \Rightarrow x_1 = \dfrac{12}{6} = 2$
- Si $y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{12}{y} \Rightarrow x_2 = \dfrac{12}{-1} = -12$

Las soluciones son: $x_1 = 2$, $y_1 = 6$, $x_2 = -12$, $y_2 = -1$.

c. $\begin{cases} \mathbf{3x + \sqrt{y} = -4} \\ \mathbf{x^2 + \sqrt{y} = 6} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{y} = -4 \\ x^2 + \sqrt{y} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = -4 - 3x \\ \sqrt{y} = 6 - x^2 \end{cases}$$

$-4 - 3x = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 10}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+7}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

- Si $x_1 = 5 \Rightarrow \sqrt{y_1} = -4 - 3x_1 = -4 - 3 \cdot 5 = -19 \Rightarrow y_1 = \sqrt{-19}$

  No tiene solución en los números reales.
- Si $x_2 = -2 \Rightarrow \sqrt{y_2} = -4 - 3x_2 = -4 - 3 \cdot (-2) = -4 + 6 = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{y_2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow y_2 = 4$

La solución es: $x = -2$, $y = 4$

15 Resuelve los sistemas por el método de reducción:

a. $\begin{cases} \mathbf{5}x^2 - \mathbf{3}y^2 = -\mathbf{7} \\ \mathbf{2}x^2 - \mathbf{5}y^2 = -\mathbf{37} \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = -7 \\ 2x^2 - 5y^2 = -37 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda por –5

$$\begin{cases} 10x^2 - 6y^2 = -14 \\ -10x^2 + 25y^2 = 185 \end{cases}$$

$19y^2 = 171$

$y^2 = \frac{171}{19} = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9} = \pm 3$

- Si $y_1 = 3 \Rightarrow 5x_1^2 - 3y_1^2 = -7 \Rightarrow 5x_1^2 - 3 \cdot 3^2 = -7 \Rightarrow 5x_1^2 - 27 = -7 \Rightarrow 5x_1^2 = -7 + 27 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1^2 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2;$
- Si $y_3 = -3 \Rightarrow 5x_3^2 - 3y_3^2 = -7 \Rightarrow 5x_3^2 - 3 \cdot (-3)^2 = -7 \Rightarrow 5x_3^2 - 27 = -7 \Rightarrow 5x_3^2 = -7 + 27 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_3^2 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow x_3 = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow x_3 = 2;\ x_4 = -2;$

Las soluciones son: $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ x_2 = -2,\ y_2 = 3,\ x_3 = 2,\ y_3 = -3,\ x_4 = -2,\ y_4 = -3$

b. $\begin{cases} \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}} + \sqrt{\boldsymbol{y}} = \mathbf{12} \\ \mathbf{3}\sqrt{\boldsymbol{x}} - \mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{y}} = \mathbf{7} \end{cases}$

Se multiplica por 4 a la primera ecuación, $8\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 48$, y se suman:

$$\begin{cases} 8\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 48 \\ 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 48 \\ 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

$11\sqrt{x} = 55$

$\sqrt{x} = \frac{55}{11} = 5 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow x = 25$

$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12 \Rightarrow 2\sqrt{25} + \sqrt{y} = 12 \Rightarrow 2 \cdot 5 + \sqrt{y} = 12 \Rightarrow \sqrt{y} = 12 - 10 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow y = 4$

La solución es: $x = 25$, $y = 4$

c. $\begin{cases} \mathbf{2}x^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}y = -\mathbf{7} \\ \mathbf{5}x^{\mathbf{2}} - \mathbf{7}y = -\mathbf{15} \end{cases}$

Se multiplica por 5 a la primera ecuación y por –2 a la segunda:

$10x^2 - 15y = -35$

$-10x^2 + 14y = 30$

$-y = -5$

$y = 5$

$2x^2 - 3y = -7 \Rightarrow 2x^2 - 3 \cdot 5 = -7 \Rightarrow 2x^2 = -7 + 15 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$

Las soluciones son: $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

d. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 - 3xy = -1} \\ \boldsymbol{-2x^2 - 3y^2 + 6xy = -23} \end{cases}$

Se multiplica por 2 a la 2.ª ecuación y se suman:

$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 6xy = -2 \\ -2x^2 - 3y^2 + 6xy = -23 \end{cases}$

$-y^2 = -25$

$y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

- Si $y = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 3xy = -1 \Rightarrow x^2 + 5^2 - 3x \cdot 5 = -1 \Rightarrow x^2 + 25 - 15x + 1 = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x^2 - 15x + 26 = 0$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 26}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 104}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 104}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{121}}{2} =$$

$$= \frac{15 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{15 + 11}{2} = 13 \\ x_2 = \dfrac{15 - 11}{2} = 2 \end{cases}$$

- Si $y = -5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 3xy = -1 \Rightarrow x^2 + (-5)^2 - 3x \cdot (-5) = -1 \Rightarrow x^2 + 25 + 15x + 1 = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x^2 + 15x + 26 = 0$

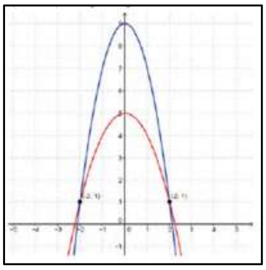
$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 26}}{2} = \frac{-15 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-15 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-15 + 11}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-15 - 11}{2} = -13 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 13$, $y_1 = 5$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$, $x_3 = -2$, $y_3 = -5$, $x_4 = -13$, $y_4 = -5$.

16 **Representa gráficamente los sistemas de ecuaciones no lineales propuestos e indica sus soluciones.**

a. $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 2x^2 + y = 9 \end{cases}$

Se representan las parábolas calculando el vértice y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

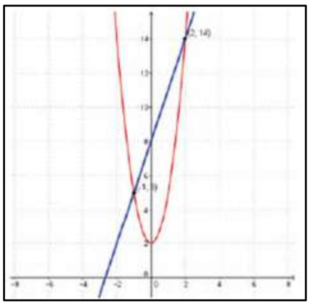


La solución del sistema son los puntos de corte de las dos funciones:

$x_1 = -2,\ y_1 = 1,\ x_2 = 2,\ y_2 = 1$

b. $\begin{cases} 3x - y = -8 \\ -3x^2 + y = 2 \end{cases}$

Se representa la recta y la parábola, calculando los puntos de corte con los ejes y además, de la parábola, el vértice.

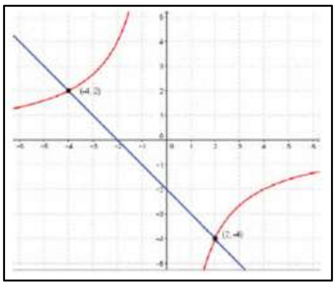


La solución del sistema son los puntos de corte de las dos funciones:

$x_1 = -1,\ y_1 = 5,\ x_2 = 2,\ y_2 = 14$

c. $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -8 \end{cases}$

Se representa la recta y la hipérbola, calculando los puntos de corte con los ejes.



La solución del sistema son los puntos de corte de las dos funciones:

$x_1 = -4$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = -4$

17 Resuelve estos sistemas utilizando el método más adecuado y comprueba los resultados con Wiris:

a. $\begin{cases} xy + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$

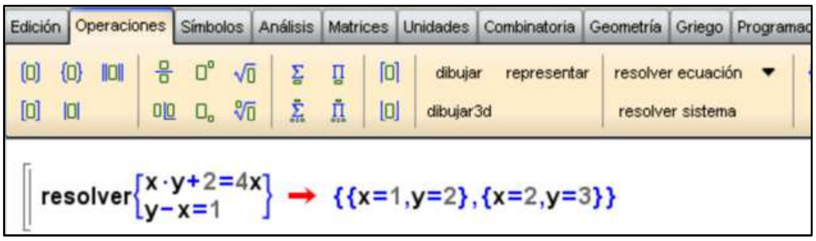
Se despeja la incógnita *y* de la segunda ecuación, $y = 1 + x$, y se sustituye en la segunda ecuación. Se utiliza el método de sustitución.

$x \cdot (1 + x) + 2 = 4x \Rightarrow x + x^2 + 2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

- Si $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 1 + x_1 = 1 + 2 = 3$
- Si $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 + x_2 = 1 + 1 = 2$

Las soluciones son: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$



b. $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$

Se despeja la incógnita *x* de la primera ecuación, $x = 6 + 5y$, y se sustituye en la primera ecuación. Se utiliza el método de sustitución.

$x^2 - xy = 2 \Rightarrow (6 + 5y)^2 - (6 + 5y) \cdot y = 2 \Rightarrow 36 + 25y^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5y - 6y - 5y^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

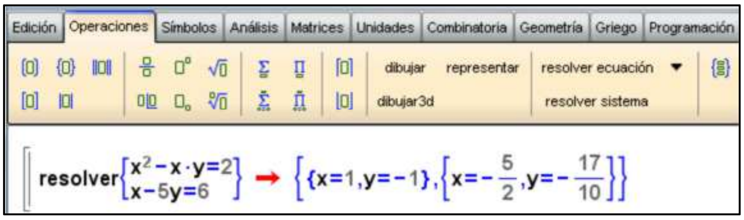
$\Rightarrow 20y^2 + 54y + 34 = 0 \Rightarrow 10y^2 + 27y + 17 = 0$

$$y = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 10 \cdot 17}}{2 \cdot 10} = \frac{-27 \pm \sqrt{729 - 680}}{20} = \frac{-27 \pm \sqrt{49}}{20} = \frac{-27 \pm 7}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-27+7}{20} = -1 \\ y_2 = \dfrac{-27-7}{20} = \dfrac{-34}{20} = -\dfrac{17}{10} \end{cases}$$

- Si $y_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 6 + 5y_1 = 6 + 5\,(-1) = 6 - 5 = 1$
- Si $y_2 = -\dfrac{17}{10} \Rightarrow x_2 = 6 + 5y_2 = 6 + 5 \cdot \left(-\dfrac{17}{10}\right) = 6 - \dfrac{5 \cdot 17}{10} = -\dfrac{5}{2}$

Las soluciones son: $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{5}{2}$, $y_2 = -\dfrac{17}{10}$



c. $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{540}}{x} = y \\ \dfrac{\mathbf{540}}{x - \mathbf{6}} = y + \mathbf{3} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* de la 2.ª ecuación, $\dfrac{540}{x-6} - 3 = y$, y se igualan las dos ecuaciones. Se utiliza el método de igualación.

$$\frac{540}{x} = \frac{540}{x-6} - 3 \Rightarrow \frac{540}{x} = \frac{540 - 3\cdot(x-6)}{x-6} \Rightarrow \frac{540}{x} = \frac{540 - 3x + 18}{x-6} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 540 \cdot (x - 6) = x \cdot (540 - 3x + 18) \Rightarrow 540x - 3\,240 = 540x - 3x^2 + 18x \Rightarrow$

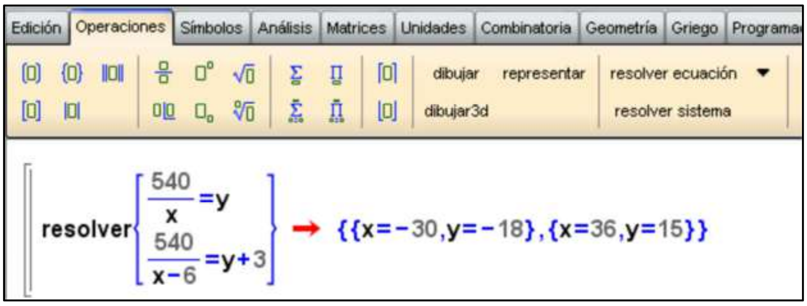
$\Rightarrow 540x - 3\,240 - 540x + 3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x - 3\,240 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 1\,080 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 1080}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4320}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4356}}{2} = \frac{6 \pm 66}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+66}{2} = 36 \\ x_2 = \dfrac{6-66}{2} = -30 \end{cases}$$

- Si $x_1 = 36 \Rightarrow y_1 = \dfrac{540}{x} = \dfrac{540}{36} = 15$
- Si $x_2 = -30 \Rightarrow y_2 = \dfrac{540}{x} = -\dfrac{540}{30} = -18$

Las soluciones son: $x_1 = 36$, $y_1 = 15$, $x_2 = -30$, $y_2 = -18$



d. $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ \sqrt{x+3} + y = 4 \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* en las dos ecuaciones y se igualan. Se utiliza el método de igualación.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ \sqrt{x+3} + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - \sqrt{x} \\ y = 4 - \sqrt{x+3} \end{cases}$$

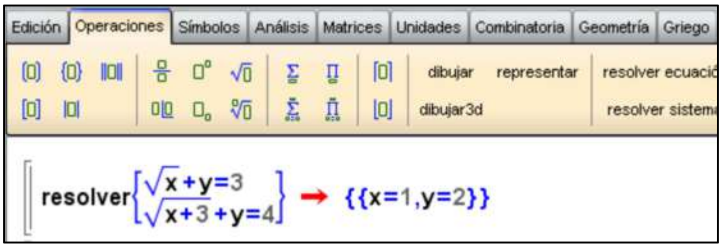
$$3 - \sqrt{x} = 4 - \sqrt{x+3} \Rightarrow 3 - 4 = \sqrt{x} - \sqrt{x+3} \Rightarrow -1 - \sqrt{x} = -\sqrt{x+3} \Rightarrow$$

$$1 + \sqrt{x} = \sqrt{x+3} \Rightarrow \left(1+\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x} = x + 3 \Rightarrow$$

$$1 + x + 2\sqrt{x} - x - 3 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 3 - \sqrt{x} = 3 - 1 = 2$$

La solución es: $x = 1$, $y = 2$



e. $\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+2)^2 + 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

Se opera la 1.ª ecuación para reducirla:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 4 + 4x + 1 \Rightarrow y^2 = 5 + 4x \Rightarrow y^2 - 4x = 5$$

Se utiliza el método de reducción.

$$\begin{cases} y^2 - 4x = 5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica la segunda ecuación por 4

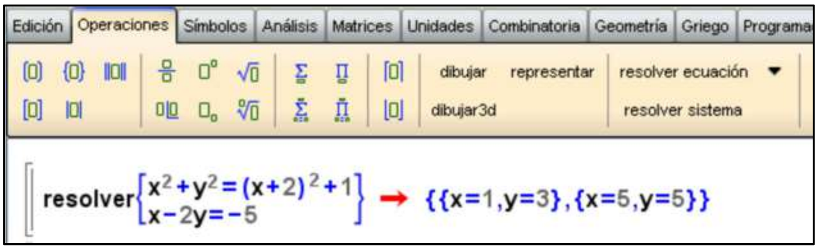
$$\begin{array}{l} y^2 - 4x = 5 \\ 4x - 8y = -20 \\ \hline y^2 - 8y = -15 \end{array}$$

$y^2 - 8y + 15 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{8+2}{2} = 5 \\ y_2 = \dfrac{8-2}{2} = 3 \end{cases}$$

- Si $y_1 = 5 \Rightarrow x_1 - 2\,y_1 = -5 \Rightarrow x_1 - 2 \cdot 5 = -5 \Rightarrow x_1 = -5 + 10 = 5$
- Si $y_2 = 3 \Rightarrow x_2 - 2\,y_2 = -5 \Rightarrow x_2 - 2 \cdot 3 = -5 \Rightarrow x_2 = -5 + 6 = 1$

Las soluciones son: $x_1 = 5$, $y_1 = 5$, $x_2 = 1$, $y_2 = 3$.



f. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 4y^2 - 3xy = 4} \\ \boldsymbol{2x = 7 - y} \end{cases}$

Se despeja la incógnita x de la 2.ª ecuación, $x = \dfrac{7 - y}{2}$, y se sustituye en la 1.ª.

Se utiliza el método de sustitución.

$$\left(\frac{7-y}{2}\right)^2 + 4y^2 - 3y \cdot \left(\frac{7-y}{2}\right) = 4$$

$$\frac{49 + y^2 - 14y + 16y^2 - 42y + 6y^2}{4} = 4$$

$$49 + y^2 - 14y + 16y^2 - 42y + 6y^2 = 16$$

$49 + y^2 - 14y + 16y^2 - 42y + 6y^2 = 16$

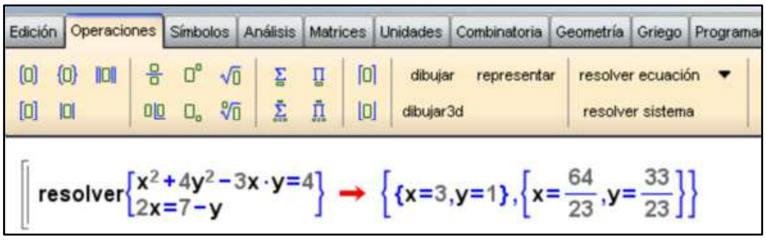
$23y^2 - 56y + 33 = 0$

$$y = \frac{56 \pm \sqrt{3136 - 4 \cdot 23 \cdot 33}}{2 \cdot 23} = \frac{56 \pm \sqrt{3136 - 3036}}{46} = \frac{56 \pm \sqrt{100}}{46} = \frac{56 \pm 10}{46} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{56+10}{46} = \dfrac{33}{23} \\ y_2 = \dfrac{56-10}{46} = 1 \end{cases}$$

- Si $y_1 = \dfrac{23}{33} \Rightarrow x_1 = \dfrac{7-y}{2} = \dfrac{7-\dfrac{33}{23}}{2} = \dfrac{\dfrac{161-133}{23}}{2} = \dfrac{\dfrac{128}{23}}{2} = \dfrac{128}{23 \cdot 2} = \dfrac{128}{46} = \dfrac{64}{23}$
- Si $y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{7-y}{2} = \dfrac{7-1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Las soluciones son: $x_1 = \dfrac{64}{23}$, $y_1 = \dfrac{33}{23}$, $x_2 = 3$, $y_2 = 1$



g. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{15}{y+1} = 0 \\ \dfrac{6}{x} - \dfrac{4}{y-2} = 0 \end{cases}$

Se operan las dos ecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-4} + \dfrac{15}{y+1} = 0 \Rightarrow 3 \cdot (y+1) + 15 \cdot (x-4) = 0 \Rightarrow 3y + 3 + 15x - 60 = 0 \\ \dfrac{6}{x} - \dfrac{4}{y-2} = 0 \Rightarrow 6 \cdot (y-2) - 4x = 0 \Rightarrow 6y - 12 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x + 3y - 57 = 0 \\ -2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema por el método de reducción.

$$\begin{cases} 15x + 3y - 57 = 0 \\ -2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

↓ Se multiplica la primera ecuación por –1.

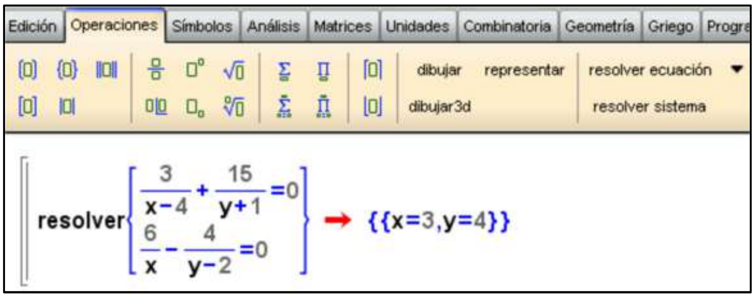
$$\begin{cases} -15x - 3y + 57 = 0 \\ -2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

$-17x + 51 = 0$

$x = \dfrac{-51}{-17} = 3$

$-2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow -2 \cdot 3 + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{12}{3} = 4$

La solución es: $x = 3$, $y = 4$



h. $\begin{cases} \mathbf{(x - 1)^2 - y^2 = 0} \\ \mathbf{-x^2 + (y + 5)^2 = 0} \end{cases}$

Se operan las dos ecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} (x-1)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x - y^2 = 0 \\ -x^2 + (y+5)^2 = 0 \Rightarrow -x^2 + y^2 + 25 + 10y = 0 \end{cases}$$

Se resuelve por el método de reducción.

$$\begin{cases} x^2 + 1 - 2x - y^2 = 0 \\ -x^2 + y^2 + 25 + 10y = 0 \end{cases}$$

$-2x + 10y + 26 = 0 \Rightarrow -x + 5y = -13 \Rightarrow x = 5y + 13$

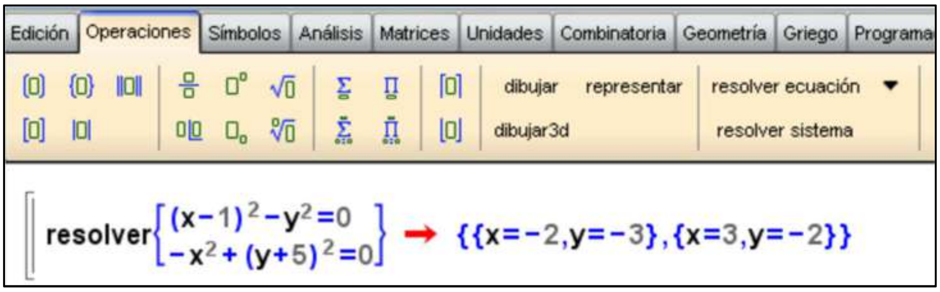
$(x - 1)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (5y + 13 - 1)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (5y + 12)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25y^2 + 144 + 120y - y^2 = 0 \Rightarrow 24y^2 + 120y + 144 = 0 \Rightarrow y^2 + 5y + 6 = 0$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ y_2 = \dfrac{-5-1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

- Si $y_1 = -2 \Rightarrow x_1 = 5\,y_1 + 13 \Rightarrow x_1 = 5 \cdot (-2) + 13 = -10 + 13 = 3$
- Si $y_2 = -3 \Rightarrow x_2 = 5\,y_2 + 13 \Rightarrow x_2 = 5 \cdot (-3) + 13 = -15 + 13 = -2$

Las soluciones son: $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, $x_2 = -2$, $y_2 = -3$



SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

18 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 5 < 3x + 1} \\ \boldsymbol{-2x - 4 \le -6x + 7} \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 3x < 1 - 5 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \text{Solución: } (2\ ,\ +\infty) \\ -2x + 6x \le 7 + 4 \Rightarrow 4x \le 11 \Rightarrow x \le \dfrac{11}{4} \Rightarrow \text{Solución: } \left(-\infty, \dfrac{11}{4}\right] \end{cases}$$

La solución del sistema es $(2\ ,\ \frac{11}{4}]$.

b. $\begin{cases} \boldsymbol{4x \ge -x + 5 + 7x} \\ \boldsymbol{3x - 1 \ge 2x - 3} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x \ge -x + 5 + 7x \Rightarrow 4x + x - 7x \ge 5 \Rightarrow -2x \ge 5 \Rightarrow x \le -\dfrac{5}{2} \Rightarrow \text{Solución: } \left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right] \\ 3x - 1 \ge 2x - 3 \Rightarrow 3x - 2x \ge -3 + 1 \Rightarrow x \ge -2 \Rightarrow \text{Solución:} [-2, +\infty) \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución porque no hay intersección entre los elementos de cada inecuación.

c. $\begin{cases} \boldsymbol{-3 - 5x - 2 > -x - 4} \\ \boldsymbol{9x - 2 < 5x - 6} \end{cases}$

$$\begin{cases} -3 - 5x - 2 > -x - 4 \Rightarrow -5x + x > -4 + 3 + 2 \Rightarrow -4x > 1 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right) \\ 9x - 2 < 5x - 6 \Rightarrow 9x - 5x < -6 + 2 \Rightarrow 4x < -4 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1) \end{cases}$$

La solución del sistema es $(-\infty\ ,\ -1)$.

d. $\begin{cases} \boldsymbol{-x+5x-4>9} \\ \boldsymbol{2+3x \geq x-1} \end{cases}$

$$\begin{cases} -x+5x-4>9 \Rightarrow -x+5x>9+4 \Rightarrow 4x>13 \Rightarrow x>\frac{13}{4} \Rightarrow \left(\frac{13}{4},+\infty\right) \\ 2+3x \geq x-1 \Rightarrow 3x-x \geq -1-2 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow \left[-\frac{3}{2},+\infty\right) \end{cases}$$

La solución del sistema es ($\frac{13}{4}$, +∞).

e. $\begin{cases} \boldsymbol{8x-5 \leq -2+4x-5} \\ \boldsymbol{2x+3>5x+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} 8x-5 \leq -2+4x-5 \Rightarrow 8x-4x \leq -2-5+5 \Rightarrow 4x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right] \\ 2x+3>5x+1 \Rightarrow 2x-5x>1-3 \Rightarrow -3x>-2 \Rightarrow x<\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\infty,\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

La solución del sistema es (–∞ , $-\frac{1}{2}$].

f. $\begin{cases} \boldsymbol{3\cdot(x-1)>2\cdot(x-4)} \\ \boldsymbol{-(x+2)>3x+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3\cdot(x-1)>2\cdot(x-4) \Rightarrow 3x-3>2x-8 \Rightarrow x>-5 \Rightarrow (-5,+\infty) \\ -(x+2)>3x+1 \Rightarrow -x-2>3x+1 \Rightarrow -4x>3 \Rightarrow x>-\frac{3}{4} \Rightarrow \left(-\frac{3}{4},+\infty\right) \end{cases}$$

La solución del sistema es (–5 , $-\frac{3}{4}$).

g. $\begin{cases} \boldsymbol{-2\cdot(x+3) \leq -5\cdot 2x} \\ \boldsymbol{-4x+1>-x+4} \end{cases}$

$$\begin{cases} -2\cdot(x+3) \leq -5\cdot 2x \Rightarrow -2x-6 \leq -10x \Rightarrow 8x \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left(-\infty,\frac{3}{4}\right] \\ -4x+1>-x+4 \Rightarrow -4x+x>4-1 \Rightarrow -3x>3 \Rightarrow x<-1 \Rightarrow (-\infty,-1) \end{cases}$$

La solución del sistema es (–∞ , –1)

h. $\begin{cases} \boldsymbol{4\cdot(1-3x+8) \geq 0} \\ \boldsymbol{x-6<3\cdot(x-2)} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4\cdot(1-3x+8) \geq 0 \Rightarrow 4-12x+32 \geq 0 \Rightarrow -12x \geq -36 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow (-\infty,3] \\ x-6<3\cdot(x-2) \Rightarrow x-6<3x-6 \Rightarrow -2x<0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow (0,+\infty) \end{cases}$$

La solución del sistema es (0 , 3].

i. $\begin{cases} \mathbf{3\cdot(1-x) > 2\cdot(-x+1)} \\ \mathbf{2\cdot(2+5x) \geq 6\cdot(x-3)} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3\cdot(1-x) > 2\cdot(-x+1) \Rightarrow 3-3x > -2x+2 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow (-\infty, 1) \\ 2\cdot(2+5x) \geq 6\cdot(x-3) \Rightarrow 4+10x \geq 6x-18 \Rightarrow x \geq \dfrac{-11}{2} \Rightarrow \left[\dfrac{-11}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

La solución del sistema es $[\frac{-11}{2}, 1)$

j. $\begin{cases} \mathbf{-(4x-2) < -2\cdot(x+1)} \\ \mathbf{2\cdot(5x+3) \leq -x+2} \end{cases}$

$$\begin{cases} -(4x-2) < -2\cdot(x+1) \Rightarrow -4x+2 < -2x-2 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow (2, +\infty) \\ 2\cdot(5x+3) \leq -x+2 \Rightarrow 10x+6 \leq -x+2 \Rightarrow 11x \leq -4 \Rightarrow x \leq -\dfrac{4}{11} \Rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{4}{11}\right] \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución.

SOLUCIONES PÁG. 112

19 Halla el respectivo valor de m y n, sabiendo que son positivos, para que:

a. La solución del sistema $\begin{cases} \mathbf{5}x - \mathbf{1} < \mathbf{2}x + \mathbf{m} \\ \mathbf{6} - \mathbf{3}x \leq x + \mathbf{n} \end{cases}$ **sea [1 , 3).**

- Para $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 1 < 2 \cdot 1 + m \Rightarrow 2 < m$
- Para $x = 3 \Rightarrow 6 - 3 \cdot 3 \leq 3 + n \Rightarrow -6 \leq n$

Tienen que ser m y n positivos, por tanto, esta no es la solución.

Probamos ahora con:

- Para $x = 3 \Rightarrow 5 \cdot 3 - 1 < 2 \cdot 3 + m \Rightarrow 8 < m$
- Para $x = 1 \Rightarrow 6 - 3 \cdot 1 \leq 1 + n \Rightarrow 2 \leq n$

Comprobamos:

- Para $m = 8 \Rightarrow 5x - 1 < 2x + 8 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3$
- Para $n = 2 \Rightarrow 6 - 3x \leq x + 2 \Rightarrow 1 \leq x$

b. La solución del sistema $\begin{cases} -x + 3 \geq mx - 7 \\ nx \leq 7x + 8 \end{cases}$ sea [–4 , 2].

- Para $x = -4 \Rightarrow 4 + 3 \geq -4m - 7 \Rightarrow 7 + 7 \geq -4m \Rightarrow m \geq -\frac{14}{4} \Rightarrow m \geq -\frac{7}{2}$

Como m < 0, la solución no es válida.

- Para $x = 2 \Rightarrow -2 + 3 \geq 2m - 7 \Rightarrow 1 + 7 \geq 2m \Rightarrow 4 \geq m$
- Para $x = -4 \Rightarrow -4n \leq -28 + 8 \Rightarrow -4n \leq -20 \Rightarrow n \geq 5$

Se comprueba que para esos valores de m y n se cumple:

$$\begin{cases} -x + 3 \geq 4x - 7 \Rightarrow 3 + 7 \geq 4x + x \Rightarrow 10 \geq 5x \Rightarrow x \leq 2 \\ 5x \leq 7x + 8 \Rightarrow 5x - 7x \leq 8 \Rightarrow -2x \leq 8 \Rightarrow x \geq -4 \end{cases}$$

La solución del sistema es [–4 , 2], luego m = 4 y n = 5

20 Comprueba, sin resolver los siguientes sistemas, si $x = -4$ es una de sus soluciones:

a. $\begin{cases} \mathbf{3x + 3 \leq -5x + 6} \\ \mathbf{-2x + 1 > 4x - 7} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 3 \leq -5x + 6 \Rightarrow 3 \cdot (-4) \leq -5 \cdot (-4) + 6 \Rightarrow -12 \leq 26 \\ -2x + 1 > 4x - 7 \Rightarrow -2 \cdot (-4) + 1 > 4 \cdot (-4) - 7 \Rightarrow 9 > -23 \end{cases}$$

Sí es solución.

b. $\begin{cases} \mathbf{2 \cdot (x - 4) \geq 1 - 5 \cdot (x + 3)} \\ \mathbf{-(x - 2) \geq 3x + 5} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 \cdot (x - 4) \geq 1 - 5 \cdot (x + 3) \Rightarrow 2 \cdot (-4 - 4) \geq 1 - 5 \cdot (-4 + 3) \Rightarrow -16 \not\geq 6 \\ -(x - 2) \geq 3x + 5 \Rightarrow -(-4 - 2) \geq 3 \cdot (-4) + 5 \Rightarrow 6 \geq -7 \end{cases}$$

No es solución.

21 Actividad resuelta.

22 Soluciona estas inecuaciones con valor absoluto:

a. |*x* – 4| > 6

$-6 > (x - 4) > 6$

$(x - 4) > 6 \Rightarrow x > 6 + 4 \Rightarrow x > 10 \Rightarrow (10 , +\infty)$

$-6 > (x - 4) \Rightarrow -6 + 4 > x \Rightarrow -2 > x \Rightarrow (-\infty , -2)$

La solución es: $(-\infty , -2) \cup (10 , +\infty)$

b. $|2x + 10| \leq 1$

$-1 \leq (2x + 10) \leq 1$

$2x + 10 \leq 1 \Rightarrow 2x \leq -9 \Rightarrow x \leq -\frac{9}{2} \Rightarrow (-\infty , -\frac{9}{2}]$

$-1 \leq 2x + 10 \Rightarrow -11 \leq 2x \Rightarrow -\frac{11}{2} \leq x \Rightarrow [-\frac{11}{2} , +\infty)$

La solución es: $[-\frac{11}{2} , -\frac{9}{2}]$

c. $|-3x + 9| \geq -12$

$12 \geq (-3x + 9) \geq -12$

$-3x + 9 \geq -12 \Rightarrow -3x \geq -12 - 9 \Rightarrow x \leq \frac{-21}{-3} \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow (-\infty , 7]$

$12 \geq -3x + 9 \Rightarrow 12 - 9 \geq -3x \Rightarrow -1 \leq x \Rightarrow [-1 , +\infty)$

La solución es: $[-1 , 7]$

23 Resuelve estas inecuaciones con fracciones algebraicas:

a. $\frac{x+3}{2x-4} > 0$

Para que una fracción sea positiva, puede ocurrir que:

- El numerador y el denominador sean positivos.

  $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow (-3 , +\infty)$

  $2x - 4 > 0 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow (2 , +\infty)$

  La solución es el intervalo $(2 , +\infty)$.

- El numerador y el denominador sean negativos.

  $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow (-\infty , -3)$

  $2x - 4 < 0 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (-\infty , 2)$

  La solución es el intervalo $(-\infty , -3)$

Por tanto, la solución es $(-\infty , -3) \cup (2 , +\infty)$.

b. $\frac{-3x-6}{x+1} < 0$

Para que una fracción sea negativa, puede ocurrir que:

- El numerador sea negativo y el denominador positivo.

  $-3x - 6 < 0 \Rightarrow -3x < 6 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow (-2 , +\infty)$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow (-1 , +\infty)$

La solución es el intervalo $(-1 , +\infty)$

- El numerador sea positivo y el denominador negativo.

  $-3x - 6 > 0 \Rightarrow -3x > 6 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow (-\infty , -2)$

  $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty , -1)$

  La solución es el intervalo $(-\infty , -2)$

Por tanto, la solución es $(-\infty , -2) \cup (-1 , +\infty)$.

c. $\dfrac{4x - 2}{3x - 6} \geq 0$

Para que una fracción sea positiva, puede ocurrir que:

- El numerador y el denominador sean positivos y el denominador distinto de 0.

  $4x - 2 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow [\frac{1}{2} , +\infty)$

  $3x - 6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow (2 , +\infty)$

  La solución es el intervalo $(2 , +\infty)$

  El numerador y el denominador sean negativos y el denominador distinto de 0.

  $4x - 2 \leq 0 \Rightarrow 4x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow (-\infty , \frac{1}{2}]$

  $3x - 6 < 0 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (-\infty , 2)$

  La solución es el intervalo $(-\infty , \frac{1}{2}]$

Por tanto, la solución es $(-\infty , \frac{1}{2}] \cup (2 , +\infty)$

d. $\dfrac{-x - 5}{x} \leq 0$

Para que una fracción sea negativa, puede ocurrir que:

- El numerador sea negativo y el denominador positivo y distinto de 0.

  $-x - 5 \leq 0 \Rightarrow -x \leq 5 \Rightarrow x \geq -5 \Rightarrow [-5 , +\infty)$

  $x > 0 \Rightarrow (0 , +\infty)$

  La solución es el intervalo $(0 , +\infty)$

- El numerador sea positivo y el denominador negativo y distinto de 0.

  $-x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -5 \Rightarrow (-\infty\ ,\ -5]$

  $x < 0 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 0)$

  La solución es el intervalo $(-\infty\ ,\ -5]$

Por tanto, la solución es $(-\infty\ ,\ -5]\ \text{U}\ (0\ ,\ +\infty)$.

e. $\dfrac{5x+15}{-4x+8} < 0$

Para que una fracción sea negativa, puede ocurrir que:

- El numerador sea negativo y el denominador positivo.

  $5x + 15 < 0 \Rightarrow 5x < -15 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow (-\infty\ ,\ -3)$

  $-4x + 8 > 0 \Rightarrow -4x > -8 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 2)$

  La solución es el intervalo $(-\infty\ ,\ -3)$.

- El numerador sea positivo y el denominador negativo.

  $5x + 15 > 0 \Rightarrow 5x > -15 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow (-3\ ,\ +\infty)$

  $-4x + 8 < 0 \Rightarrow -4x < -8 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow (2\ ,\ +\infty)$

  La solución es el intervalo $(2\ ,\ +\infty)$.

Por tanto, la solución es $(-\infty\ ,\ -3)\ \text{U}\ (2\ ,\ +\infty)$.

f. $\dfrac{-x}{-x+2} \leq 0$

Para que una fracción sea negativa, puede ocurrir que:

- El numerador sea negativo y el denominador positivo y distinto de 0.

  $-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow [0\ ,\ +\infty)$

  $-x + 2 > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 2)$

  La solución es el intervalo $[0\ ,\ 2)$.

- El numerador sea positivo y el denominador negativo y distinto de 0.

  $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow (-\infty\ ,\ 0]$

  $-x + 2 < 0 \Rightarrow -x < -2 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow (2\ ,\ +\infty)$

  En este caso no hay intersección en las soluciones.

Por tanto, la solución es $[0\ ,\ 2)$.

24 Resuelve las siguientes inecuaciones no lineales:

a. $\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$

Se resuelve la primera inecuación:

$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 1) \geq 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Se coge un número de los intervalos $(-\infty , -1)$, $(-1 , 1)$, $(1 , +\infty)$ y se comprueba en cuál de ellos se cumple la inecuación. En este caso se cumple en $(-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$.

Se resuelve la segunda inecuación:

$x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2^2 \leq 0 \Rightarrow (x + 2) \cdot (x - 2) \leq 0 \Rightarrow$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Se coge un número de los intervalos $(-\infty , -2)$, $(-2 , 2)$, $(2 , +\infty)$ y se comprueba en cuál de ellos se cumple la inecuación. En este caso se cumple en $[-2 , 2]$.

La solución es la intersección de las dos soluciones: $[-2 , -1] \cup [1 , 2]$.

b. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 \leq 0 \end{cases}$

Se resuelve la primera inecuación:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5+1}{2} = 3;\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$(x - 3) \cdot (x - 2) > 0$

Se coge un número de los intervalos $(-\infty , 2)$, $(2 , 3)$, $(3 , +\infty)$ y se comprueba en cuál de ellos se cumple la inecuación. En este caso se cumple en $(-\infty , 2) \cup (3 , +\infty)$.

Se resuelve la segunda inecuación:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$

$(x - 2)\ (x - 2) \leq 0 \Rightarrow$ Esta inecuación no tiene solución. Por tanto, tampoco lo tiene el sistema.

c. $\begin{cases} \boldsymbol{x\cdot(x+3)<2\cdot(x+1)} \\ \boldsymbol{5x+4>3x+2} \end{cases}$

Se resuelve la primera inecuación:

$x \cdot (x + 3) < 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow x^2 + 3x < 2x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1;\ x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$

$(x - 1) \cdot (x + 2) < 0$

Se coge un número de los intervalos (–∞ , 1), (1 , 2), (2 , +∞) y se comprueba en cuál de ellos se cumple la inecuación. En este caso se cumple en (–∞ , 1).

Se resuelve la segunda inecuación:

$5x + 4 > 3x + 2 \Rightarrow 2x + 2 > 0$

$2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Se coge un número de los intervalos (–∞ , –1), (–1 , +∞) y se comprueba en cuál de ellos se cumple la inecuación. En este caso se cumple en (–1 , +∞).

La solución es la intersección de las dos soluciones: (–1 , 1).

d. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2-3\cdot(x-1)\geq 1} \\ \boldsymbol{2\cdot(2+x)>6\cdot(x-3)} \end{cases}$

Se resuelve la primera inecuación:

$x^2 - 3 \cdot (x - 1) \geq 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3\pm1}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2;\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$

$(x - 2) \cdot (x - 1) \geq 0$

Se coge un número de los intervalos (–∞ , 1), (1 , 2), (2 , +∞) y se comprueba en cuál de ellos se cumple la inecuación. En este caso se cumple en (–∞ , 1) U (2 , +∞).

Se resuelve la segunda inecuación:

$2 \cdot (2 + x) > 6 \cdot (x - 3) \Rightarrow 4 + 2x > 6x - 18 \Rightarrow -4x + 22 > 0 \Rightarrow -2x + 11 > 0 \Rightarrow x < \dfrac{11}{2}$

La inecuación se cumple en $\left(-\infty, \dfrac{11}{2}\right)$.

La solución es la intersección de las dos soluciones: (–∞ , 1) U $\left(2, \dfrac{11}{2}\right)$.

SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

25 Halla estos sistemas con dos incógnitas:

a. $\begin{cases} x + 2y < 1 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$

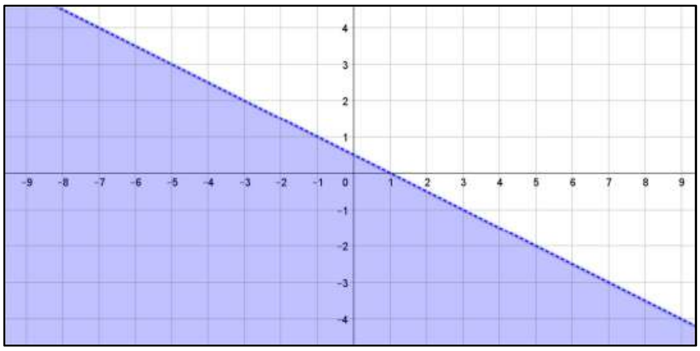
- Para representar la inecuación $x + 2y < 1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $x + 2y < 1 \Rightarrow x + 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - x}{2}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $x + 2y < 1 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 < 1 \Rightarrow 0 < 1$

  Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



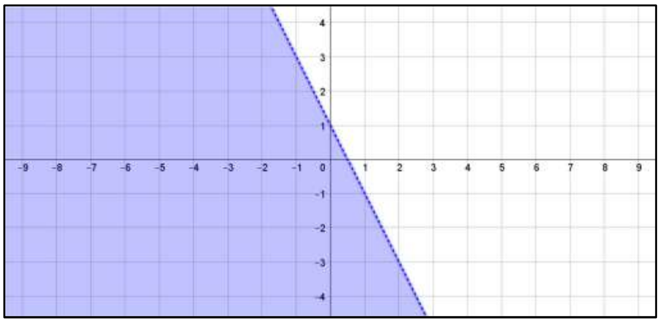
- Para representar la inecuación $2x + y < 1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $2x + y < 1 \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$

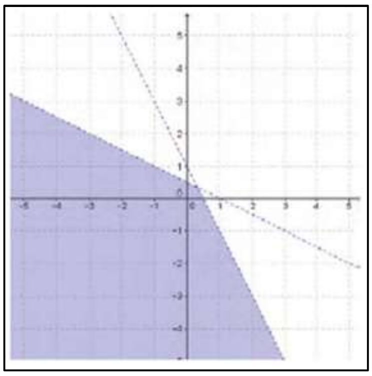
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $2x + y < 1 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 < 1 \Rightarrow 0 < 1$

Como sí se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



b. $\begin{cases} \mathbf{3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \geq 2} \\ \mathbf{2\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} \leq 4} \end{cases}$

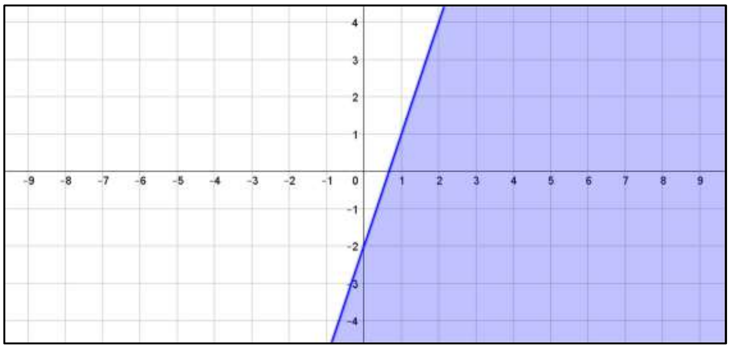
- Para representar la inecuación $3x - y \geq 2$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$3x - y \geq 2 \Rightarrow 3x - y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2$

La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$3x - y \geq 2 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 0 \geq 2 \Rightarrow 0 \not\geq 2$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\geq$.



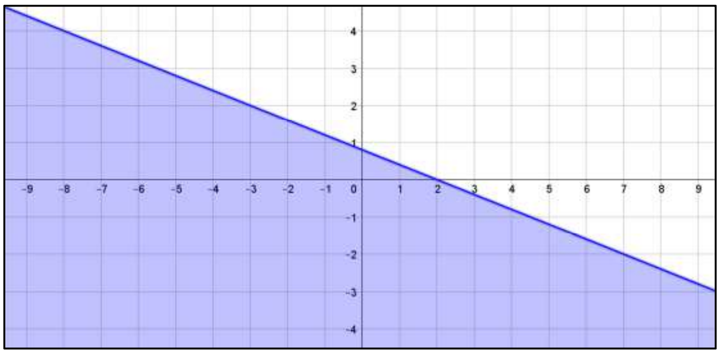
- Para representar la inecuación $2x + 5y \leq 4$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$$2x + 5y \leq 4 \Rightarrow 2x + 5y = 4 \Rightarrow y = \frac{4 - 2x}{5}$$

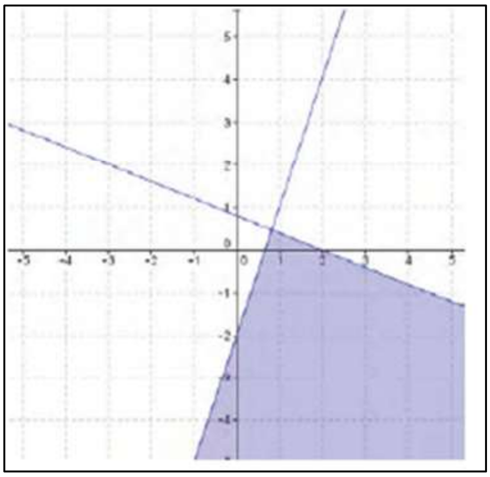
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$2x + 5y \leq 4 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 4$$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\leq$.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



c. $\begin{cases} -4x + 5y < -3 \\ y > 0 \end{cases}$

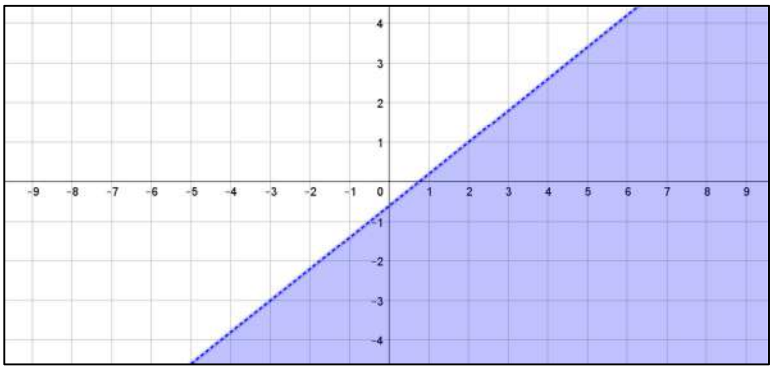
- Para representar la inecuación $-4x + 5y < -3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-4x + 5y < -3 \Rightarrow -4x + 5y = -3 \Rightarrow y = \dfrac{-3 + 4x}{5}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $-4x + 5y < -3 \Rightarrow -4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < -3 \Rightarrow 0 < -3$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



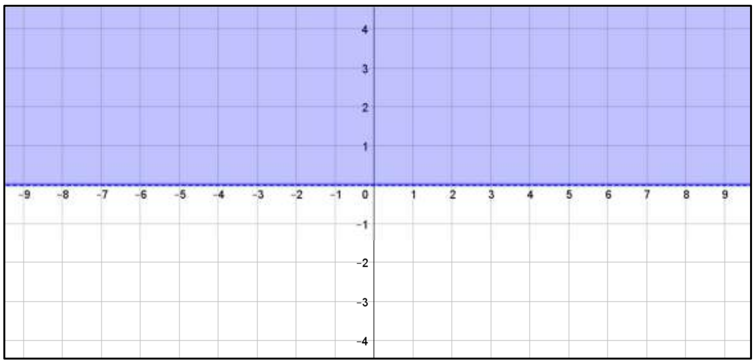
- Para representar la inecuación $y > 0$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $y > 0 \Rightarrow y = 0$

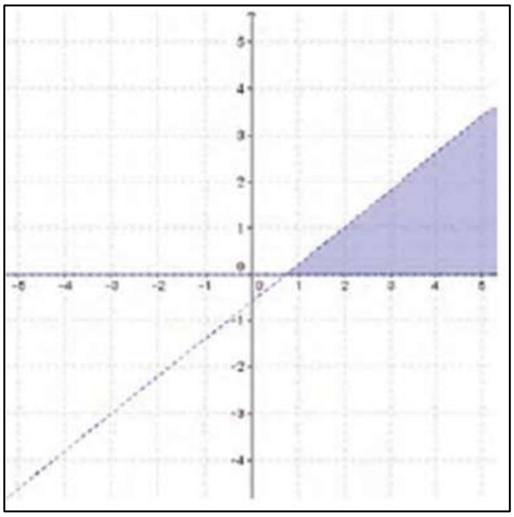
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (5 , 10), y se sustituye en la inecuación inicial:

$y > 0 \Rightarrow 10 > 0$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (5 , 10), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



d. $\begin{cases} \boldsymbol{x \le 3} \\ \boldsymbol{5x - 3y \ge 0} \end{cases}$

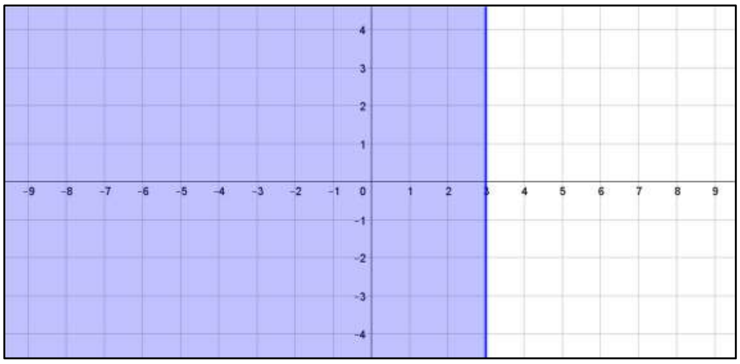
- Para representar la inecuación $x \le 3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$x \le 3 \Rightarrow x = 3$

La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (5 , 10), y se sustituye en la inecuación inicial:

$5 \not\le 3$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (5 , 10), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≤.



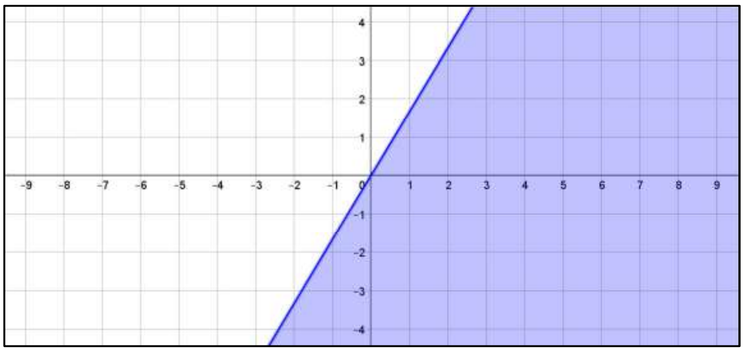
- Para representar la inecuación $5x - 3y \geq 0$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$5x - 3y \geq 0 \Rightarrow 5x - 3y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5x}{3}$

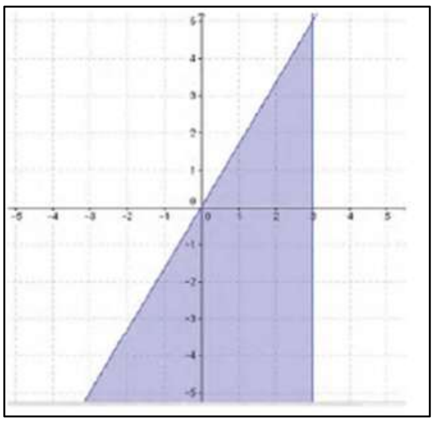
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$5x - 3y \geq 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≥.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



e. $\begin{cases} \mathbf{2x - 2y > -1} \\ \mathbf{x + y < 2} \end{cases}$

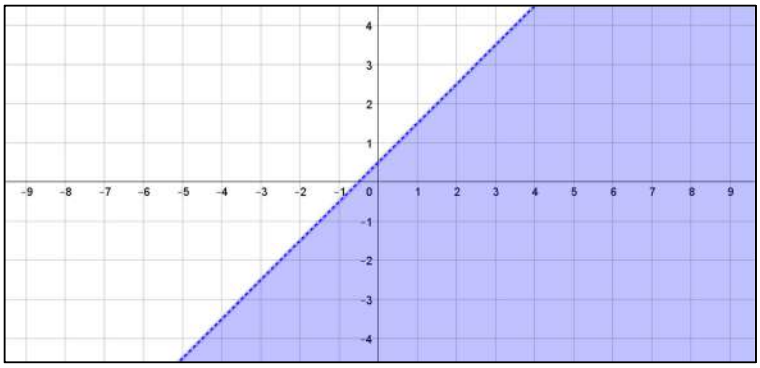
- Para representar la inecuación $2x - 2y > -1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $2x - 2y > -1 \Rightarrow 2x - 2y = -1 \Rightarrow y = \dfrac{1+2x}{2}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $2x - 2y > -1 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 > -1 \Rightarrow 0 > -1$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



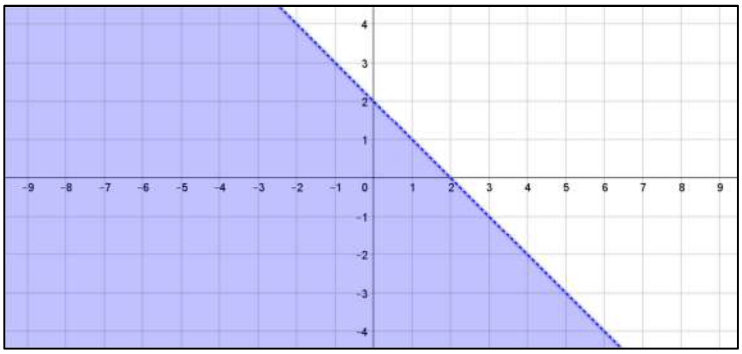
- Para representar la inecuación $x + y < 2$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $x + y < 2 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$

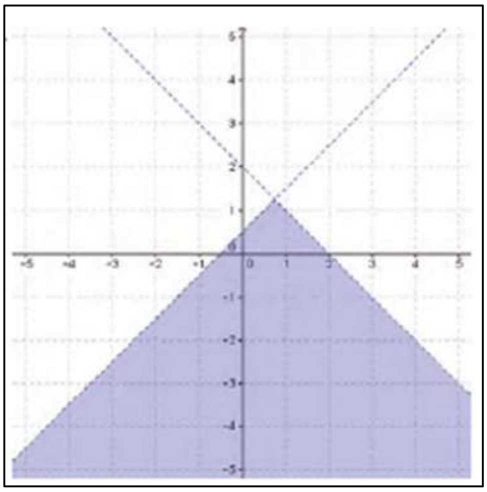
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $x + y < 2 \Rightarrow 0 + 0 < 2 \Rightarrow 0 < 2$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



f. $\begin{cases} -x + 4y \leq 5 \\ 3x - y > 1 \end{cases}$

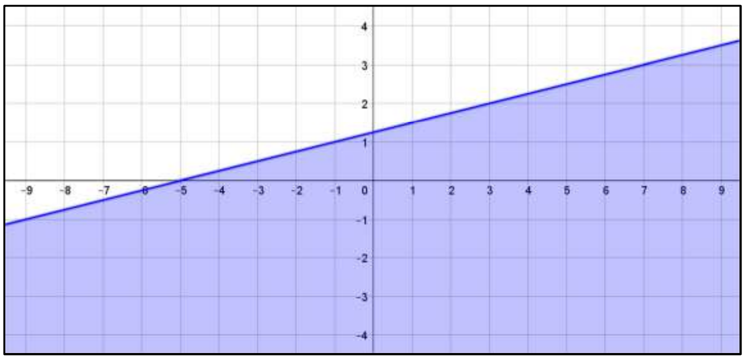
- Para representar la inecuación $-x + 4y \leq 5$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-x + 4y \leq 5 \Rightarrow -x + 4y = 5 \Rightarrow y = \dfrac{5 + x}{4}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $-x + 4y \leq 5 \Rightarrow -0 + 4 \cdot 0 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 5$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\leq$.



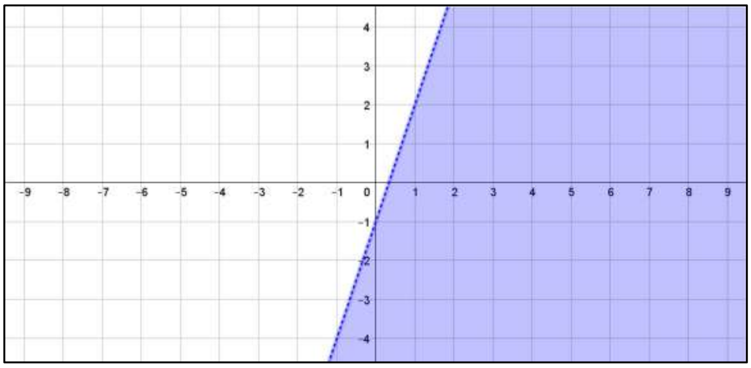
- Para representar la inecuación $3x - y > 1$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $3x - y > 1 \Rightarrow 3x - y = 1 \Rightarrow y = 3x - 1$

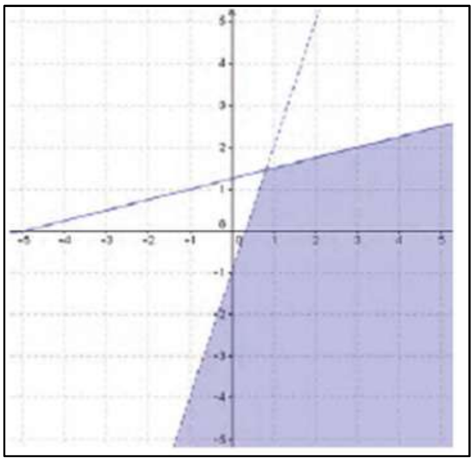
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $3x - y > 1 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 0 > 1 \Rightarrow 0 \not> 1$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



26 Soluciona de forma gráfica los siguientes sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} \mathbf{3 \cdot (2 - x) < 5y} \\ \mathbf{2 \cdot (x - 1) > 4 \cdot (y - 5)} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} 3\cdot(2-x) < 5y \Rightarrow 6-3x < 5y \Rightarrow -3x-5y < -6 \\ 2\cdot(x-1) > 4\cdot(y-5) \Rightarrow 2x-2 > 4y-20 \Rightarrow 2x-4y > -18 \end{cases}$$

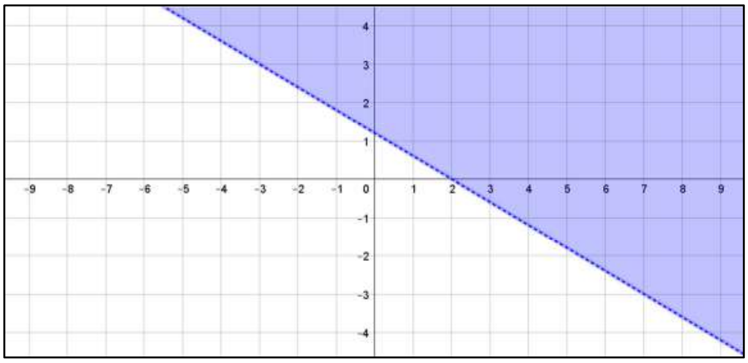
- Para representar la inecuación $-3x - 5y < -6$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$$-3x - 5y < -6 \Rightarrow -3x - 5y = -6 \Rightarrow y = \frac{6-3x}{5}$$

La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$-3x - 5y < -6 \Rightarrow -3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 < -6 \Rightarrow 0 \not< -6$$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



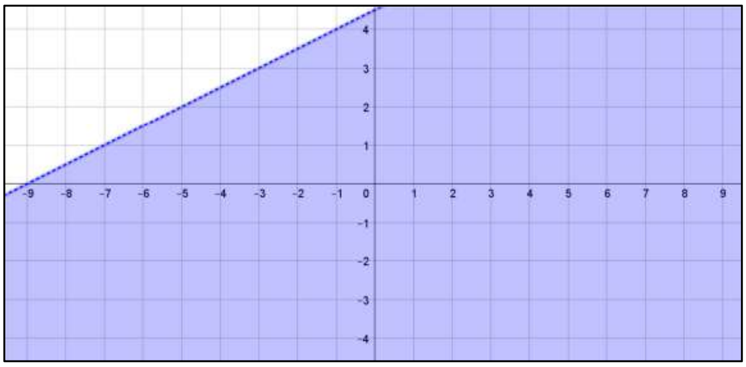
- Para representar la inecuación $2x - 4y > -18$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$$2x - 4y > -18 \Rightarrow 2x - 4y = -18 \Rightarrow y = \frac{18 + 2x}{4}$$

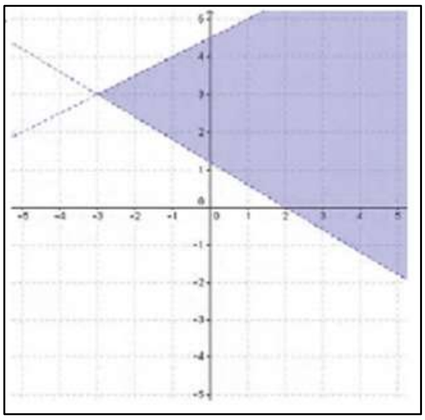
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$2x - 4y > -18 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 > -18 \Rightarrow 0 > -18$$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



b. $\begin{cases} \boldsymbol{x - 3 \geq 2y} \\ \boldsymbol{2 \cdot (1 - 3y) \leq -3x + 4} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 2y \Rightarrow x - 2y \geq 3 \\ 2 \cdot (1 - 3y) \leq -3x + 4 \Rightarrow 2 - 6y \leq -3x + 4 \Rightarrow 3x - 6y \leq 2 \end{cases}$$

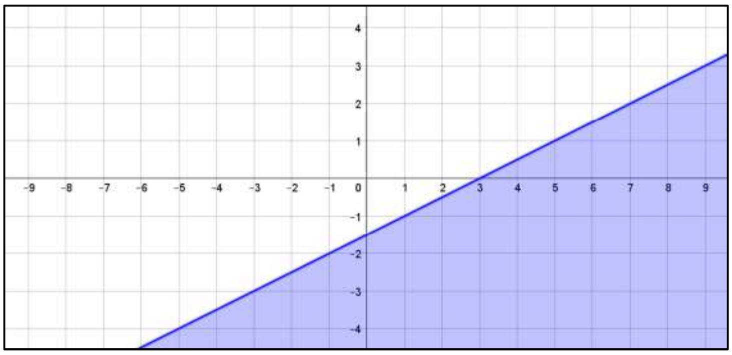
- Para representar la inecuación $x - 2y \geq 3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $$x - 2y \geq 3 \Rightarrow x - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $$x - 2y \geq 3 \Rightarrow 0 - 2 \cdot 0 \geq 3 \Rightarrow 0 \not\geq 3$$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≥.



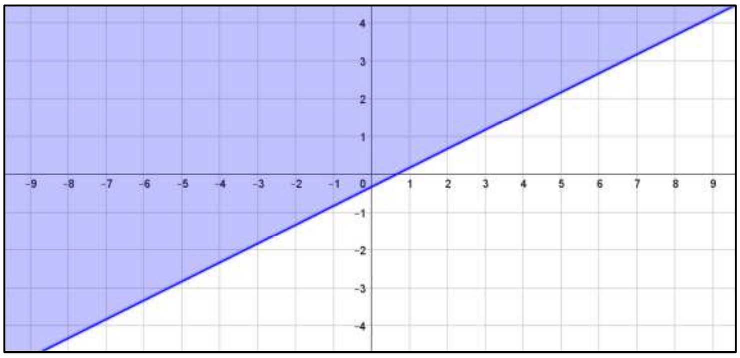
- Para representar la inecuación $3x - 6y \leq 2$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $$3x - 6y \leq 2 \Rightarrow 3x - 6y = 2 \Rightarrow y = \frac{3x-2}{6}$$

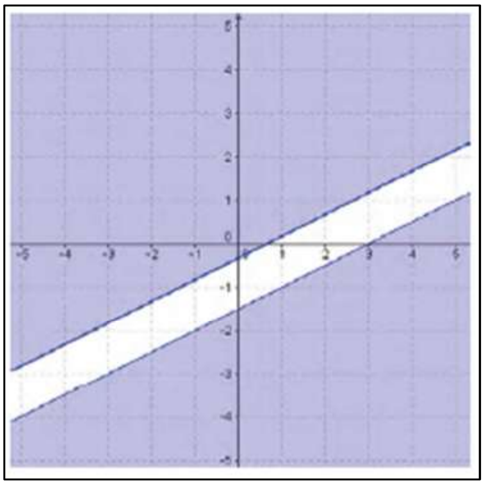
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $$3x - 6y \leq 2 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≤.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



Como no interseccionan los dos semiplanos, el sistema no tiene solución.

c. $\begin{cases} \mathbf{-4\cdot(2+3\mathit{x}) \le \mathit{y}} \\ \mathbf{2\mathit{x} - 1 \le 3\cdot(\mathit{y} - 2)} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} -4\cdot(2+3x) \le y \Rightarrow -8-12x \le y \Rightarrow -12x - y \le 8 \\ 2x - 1 \le 3\cdot(y-2) \Rightarrow 2x - 1 \le 3y - 6 \Rightarrow 2x - 3y \le -5 \end{cases}$$

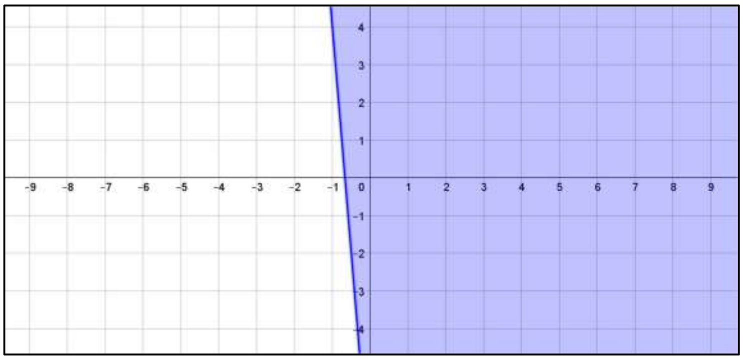
- Para representar la inecuación $-12x - y \le 8$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-12x - y \le 8 \Rightarrow -12x - y = 8 \Rightarrow y = -12x - 8$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $-12x - y \le 8 \Rightarrow -12 \cdot 0 - 0 \le 8 \Rightarrow 0 \le 8$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\le$.



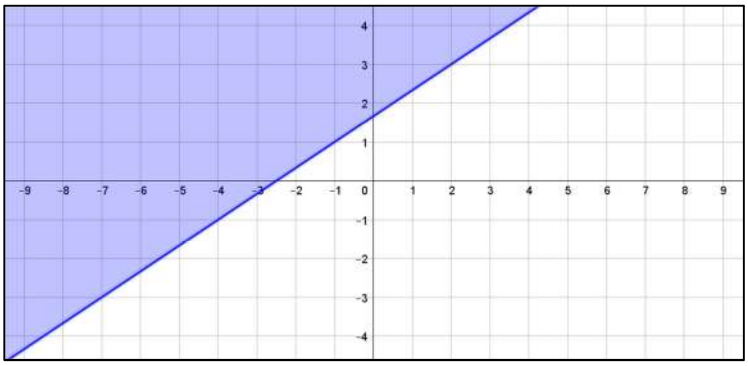
- Para representar la inecuación $2x - 3y \leq -5$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$$2x - 3y \leq -5 \Rightarrow 2x - 3y = -5 \Rightarrow y = \frac{2x+5}{3}$$

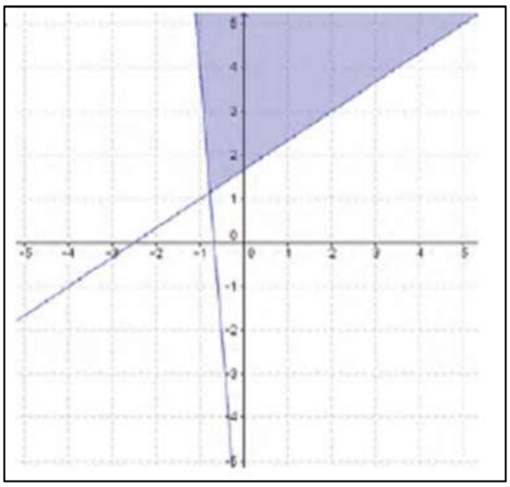
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$2x - 3y \leq -5 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \leq -5 \Rightarrow 0 \not\leq -5$$

Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo $\leq$.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



d. $\begin{cases} \mathbf{5 \cdot (x - y) < 2x} \\ \mathbf{1 > -(3x - y)} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducir el sistema:

$$\begin{cases} 5 \cdot (x - y) < 2x \Rightarrow 5x - 5y < 2x \Rightarrow 3x - 5y < 0 \\ 1 > -(3x - y) \Rightarrow 1 > -3x + y \end{cases}$$

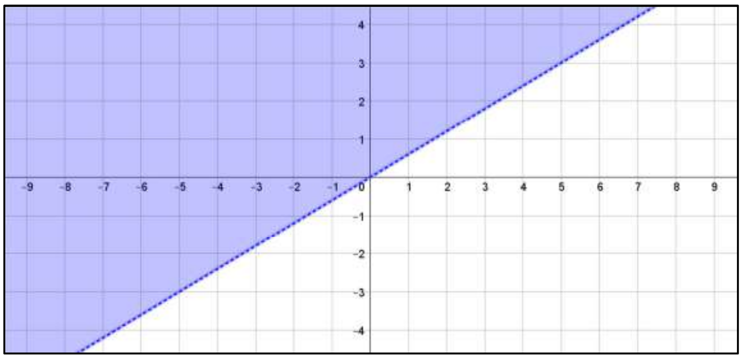
- Para representar la inecuación $3x - 5y < 0$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $3x - 5y < 0 \Rightarrow 3x - 5y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-3x}{5}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (10 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $3x - 5y < 0 \Rightarrow 3 \cdot 10 - 5 \cdot 0 < 0 \Rightarrow 30 \not< 0$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (10 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



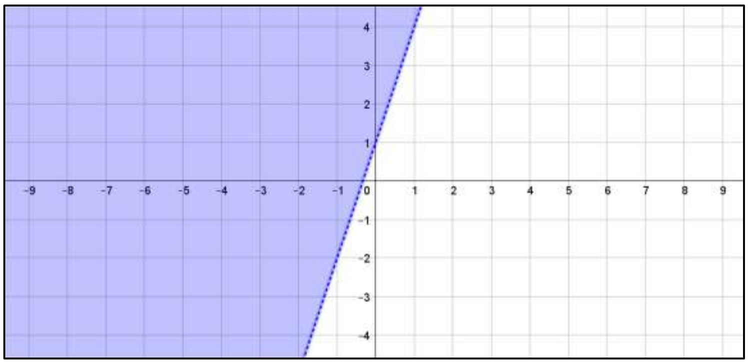
- Para representar la inecuación $1 > -3x + y$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $1 > -3x + y \Rightarrow 1 = -3x + y \Rightarrow y = 3x + 1$

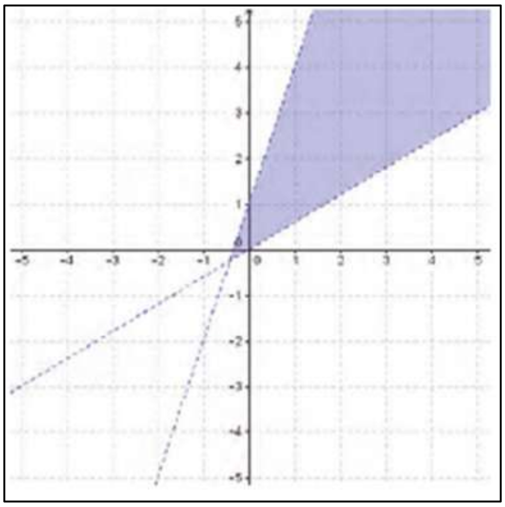
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $1 > -3x + y \Rightarrow 1 > -3 \cdot 0 + 0 \Rightarrow 1 > 0$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



e. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{5} < 1 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{2} > -1 \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducir el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{5} < 1 \Rightarrow 5x - 2y < 10 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{2} > -1 \Rightarrow 2x - 5y > -10 \end{cases}$$

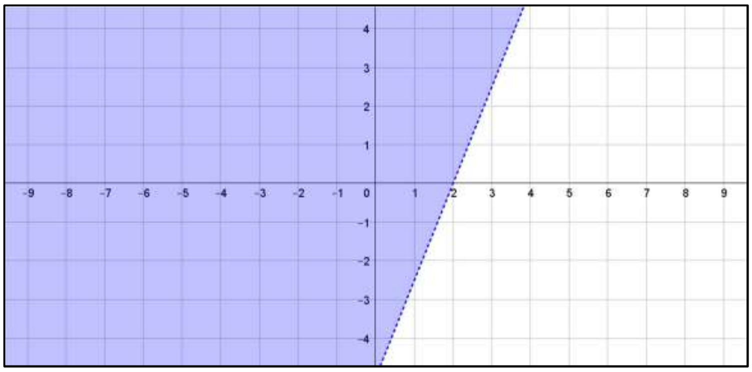
- Para representar la inecuación $5x - 2y < 10$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $5x - 2y < 10 \Rightarrow 5x - 2y = 10 \Rightarrow y = \dfrac{5x - 10}{2}$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $5x - 2y < 10 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 < 10 \Rightarrow 0 < 10$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



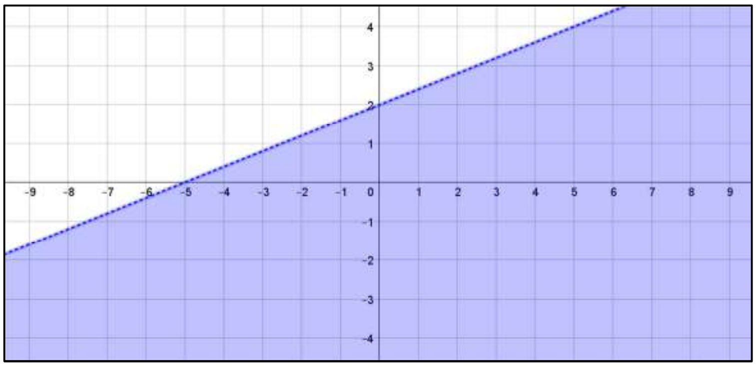
- Para representar la inecuación $2x - 5y > -10$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

$$2x - 5y > -10 \Rightarrow 2x - 5y = -10 \Rightarrow y = \frac{2x+10}{5}$$

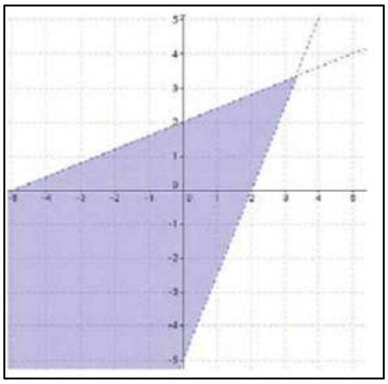
La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

$$2x - 5y > -10 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 > -10 \Rightarrow 0 > -10$$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



f. $\begin{cases} \boldsymbol{y < 3} \\ \boldsymbol{-(3x+2) > y} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducirlas:

$$\begin{cases} y < 3 \\ -(3x+2) > y \Rightarrow -3x-2 > y \Rightarrow -3x-y > 2 \end{cases}$$

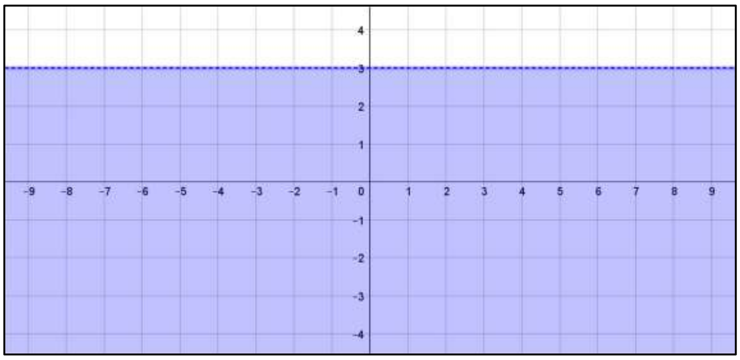
- Para representar la inecuación $y < 3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $y < 3 \Rightarrow y = 3$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $0 < 3$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



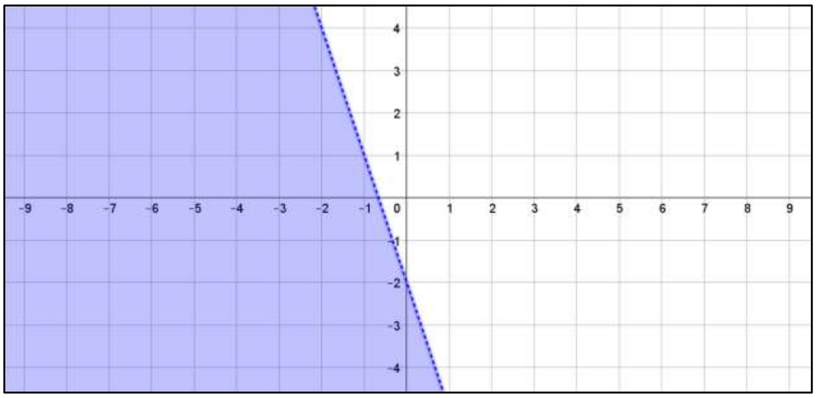
- Para representar la inecuación $-3x - y > 2$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $-3x - y > 2 \Rightarrow -3x - y = 2 \Rightarrow y = -3x - 2$

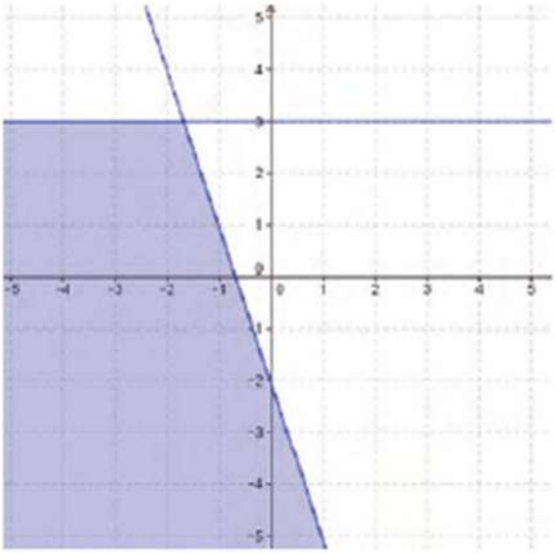
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $-3x - y > 2 \Rightarrow -3 \cdot 0 - 0 > 2 \Rightarrow 0 \not> 2$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo >.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.

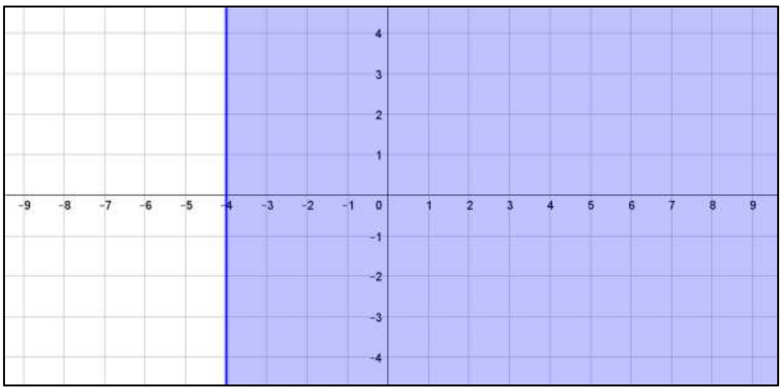


g. $\begin{cases} \boldsymbol{x \geq -4} \\ \boldsymbol{4x < 3 \cdot (y - 1)} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducir el sistema:

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ 4x < 3 \cdot (y - 1) \Rightarrow 4x < 3y - 3 \Rightarrow 4x - 3y < -3 \end{cases}$$

El semiplano $x \geq -4$ es:



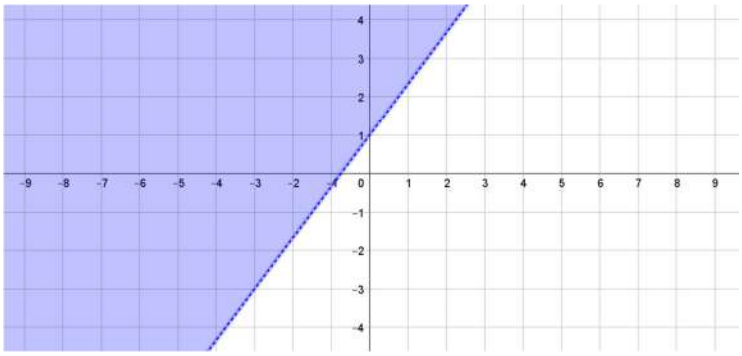
- Para representar la inecuación $4x - 3y < -3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $4x - 3y < -3 \Rightarrow 4x - 3y = -3 \Rightarrow y = \dfrac{4x+3}{3}$

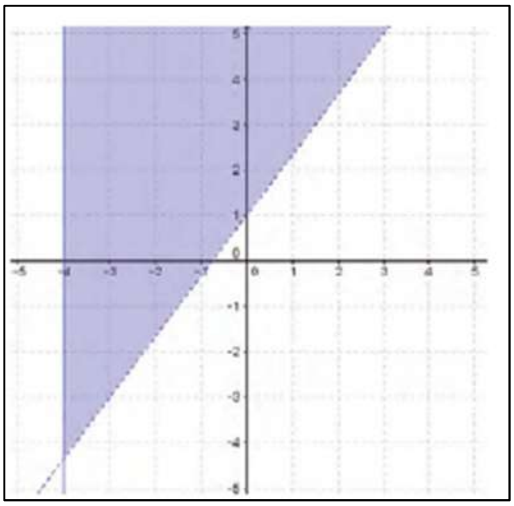
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $4x - 3y < -3 \Rightarrow 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 < -3 \Rightarrow 0 < -3$

  Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto (0 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



h. $\begin{cases} \boldsymbol{x < y} \\ \boldsymbol{3 \cdot (x - 2) \geq -(y + 3)} \end{cases}$

Se operan las inecuaciones para reducir el sistema:

$$\begin{cases} x < y \Rightarrow x - y < 0 \\ 3 \cdot (x - 2) \geq -(y + 3) \Rightarrow 3x - 6 \geq -y - 3 \Rightarrow 3x + y \geq 3 \end{cases}$$

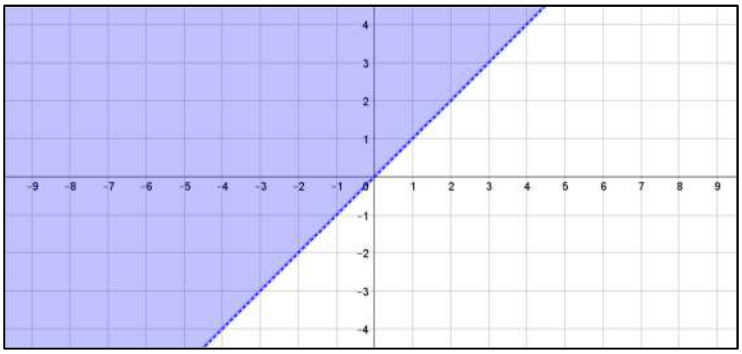
- Para representar la inecuación $x - y < 0$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $x - y < 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$

  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (5 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $x - y < 0 \Rightarrow 5 - 0 < 0 \Rightarrow 5 \not< 0$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (5 , 0), no incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo <.



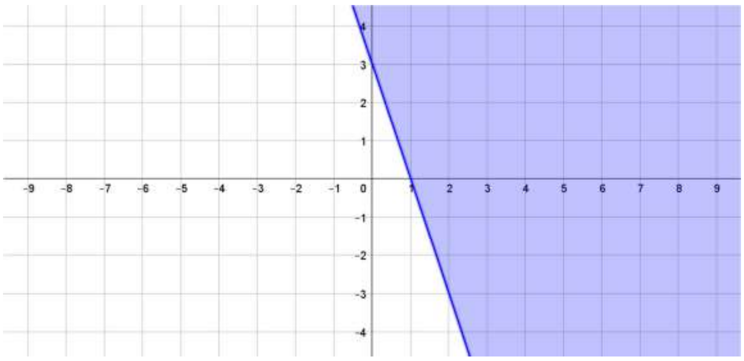
- Para representar la inecuación $3x + y \geq 3$, se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad y se representa la recta:

  $3x + y \geq 3 \Rightarrow 3x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 3x$

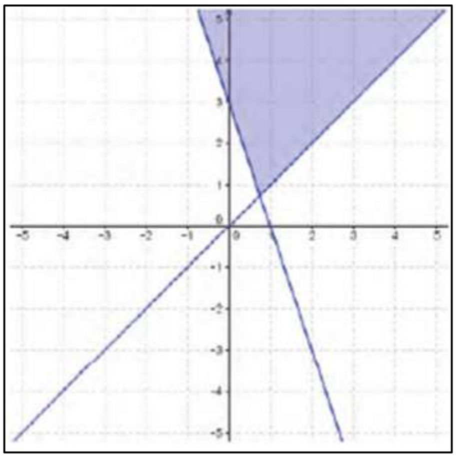
  La recta divide al plano en dos semiplanos. Para determinar cuál de los dos es la solución, se elige un punto de uno de los semiplanos que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0 , 0), y se sustituye en la inecuación inicial:

  $3x + y \geq 3 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 0 \geq 3 \Rightarrow 0 \not\geq 3$

  Como no se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que no contiene al punto (0 , 0), incluida la recta, por ser una desigualdad del tipo ≥.



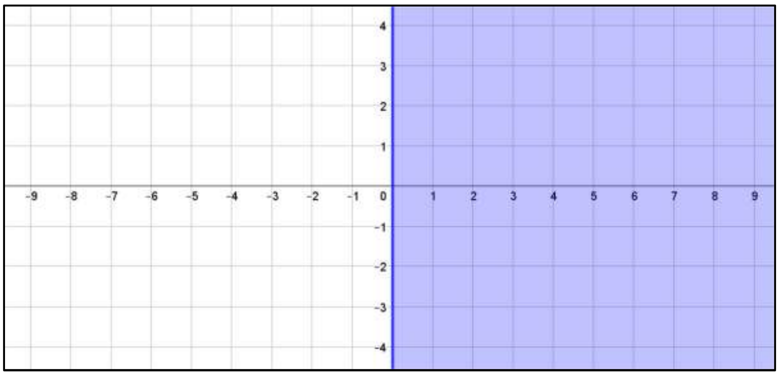
La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones.



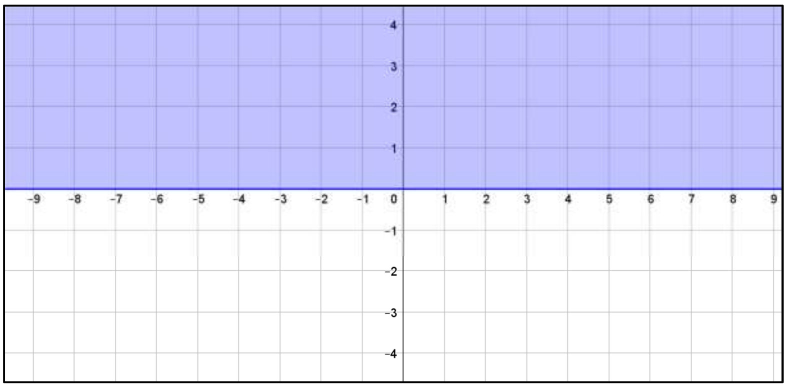
27 Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x - 3y < 4 \end{cases}$

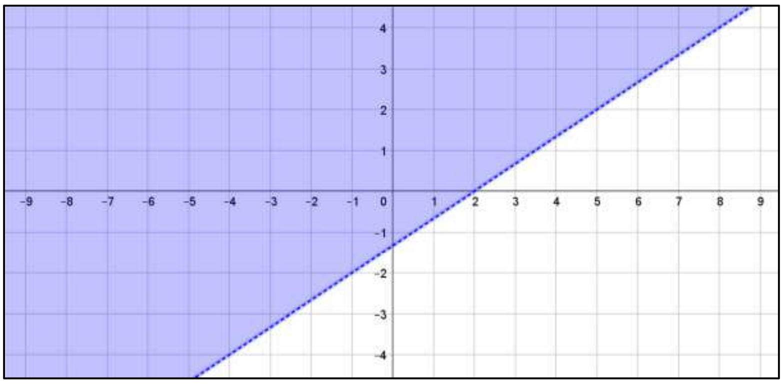
Se representa la inecuación $x \geq 0$:



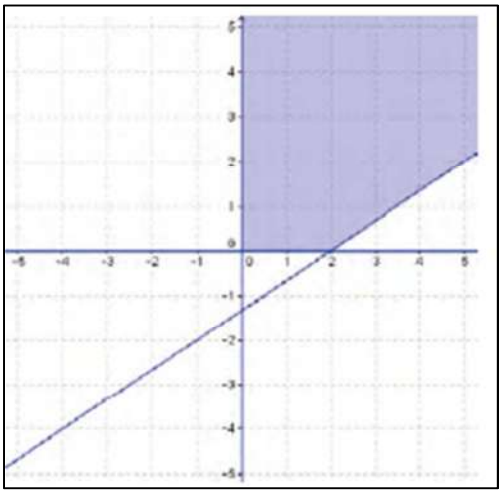
Se representa la inecuación $y \geq 0$:



Se representa la inecuación $2x - 3y < 4$:

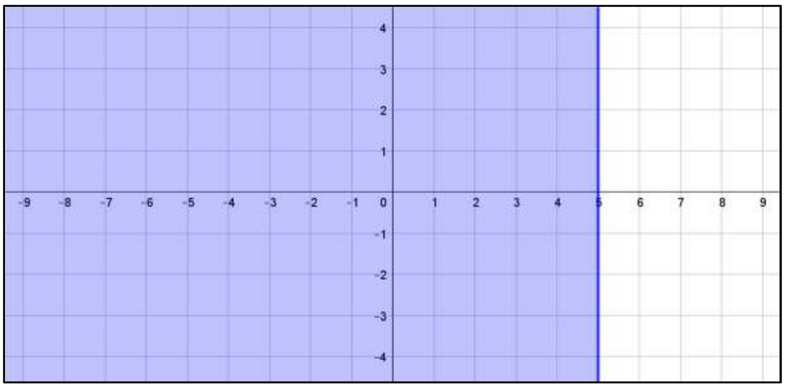


La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de las tres inecuaciones.

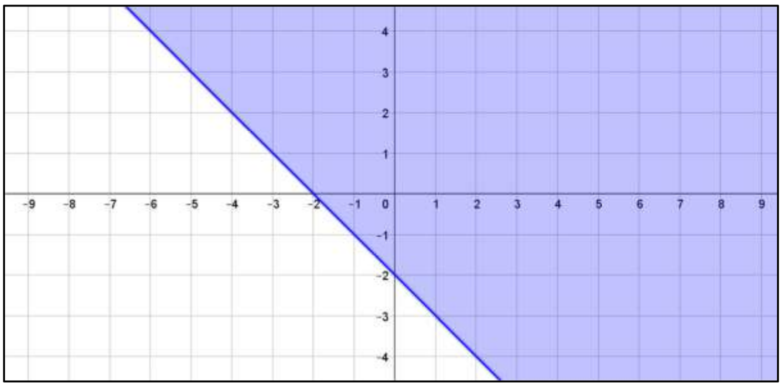


b. $\begin{cases} \boldsymbol{x \le 5} \\ \boldsymbol{x + y \ge -2} \\ \boldsymbol{x - \ y \le 2} \end{cases}$

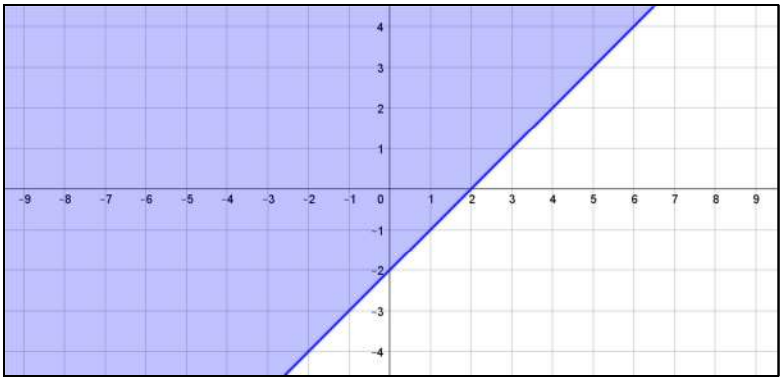
Se representa la inecuación $x \le 5$:



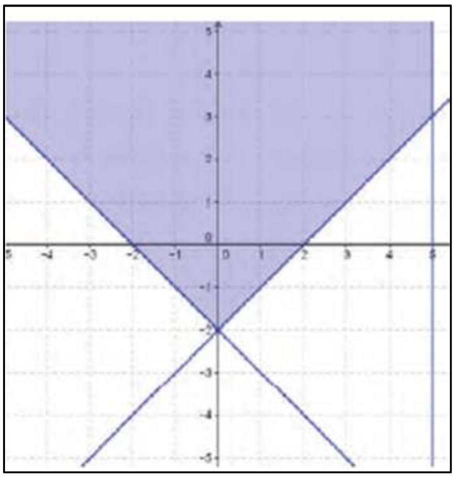
Se representa la inecuación $x + y \geq -2$



Se representa la inecuación $x - y \leq 2$:

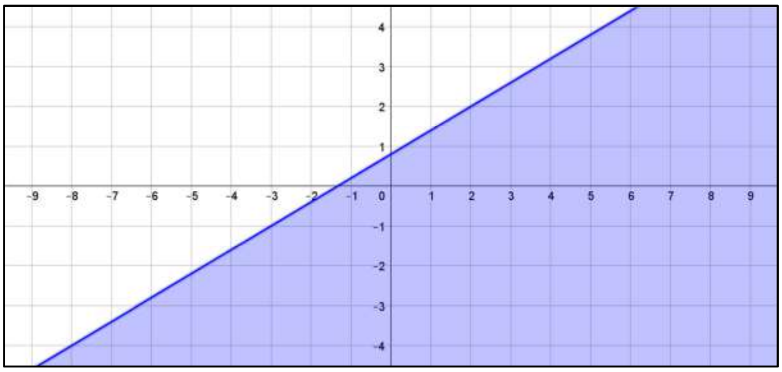


La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de las tres inecuaciones.

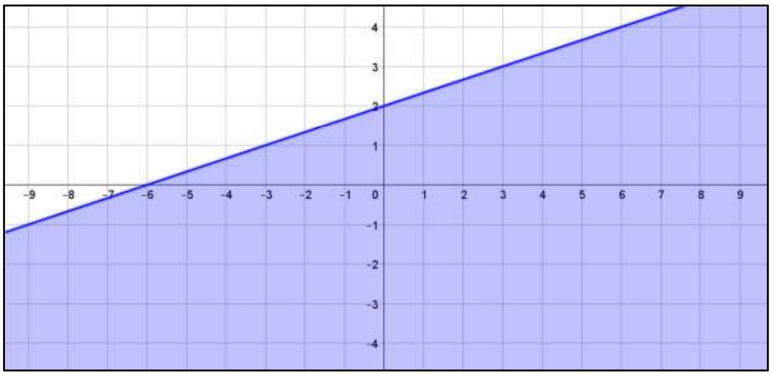


c. $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y \geq -4} \\ \mathbf{-x + 3y \leq 6} \\ \mathbf{x > -2} \\ \mathbf{y > -1} \end{cases}$

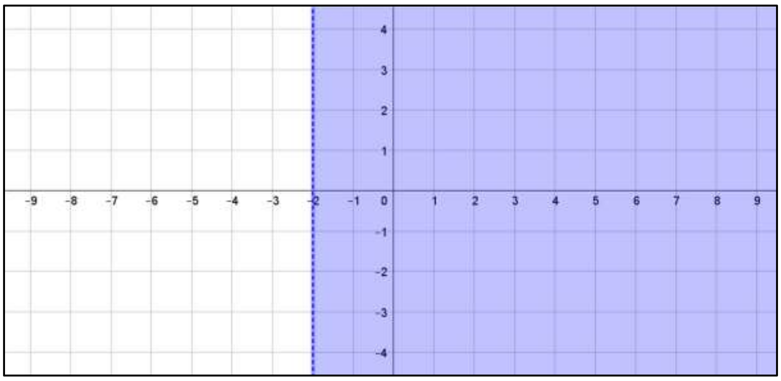
Se representa la inecuación $3x - 5y \geq -4$:



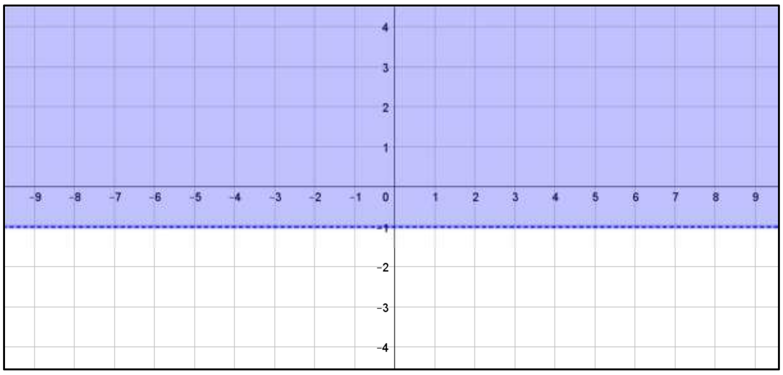
Se representa la inecuación $-x + 3y \leq 6$:



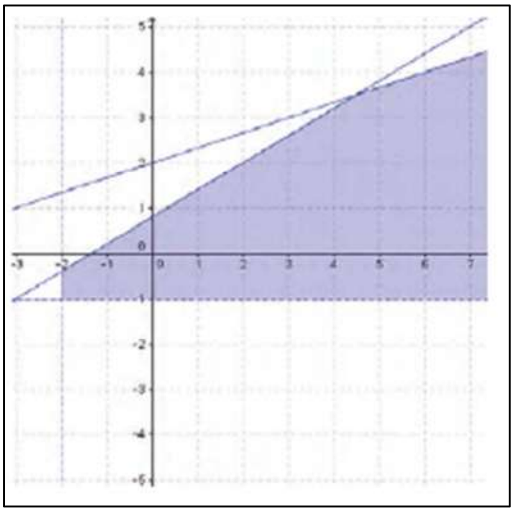
Se representa la inecuación $x > -2$:



Se representa la inecuación $y > -1$:



La solución del sistema es la región del plano obtenida al intersecarse los semiplanos soluciones de las cuatro inecuaciones.



28 Visita esta página de Internet y realiza las actividades propuestas para repasar los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas: http://conteni2.educarex.es/mats/12078/contenido

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 113

29 Al comprar un televisor de 450 €, Esteban ha pagado con 15 billetes, unos de 20 € y otros de 50 €. ¿Cuántos billetes de cada tipo entregó al dependiente?

- Se identifican las incógnitas: x = número de billetes de 20 €, y = número de billete de 50 €.
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 20x + 50y = 450 \end{cases}$$

Se utiliza el método de sustitución. Se despeja en la primera ecuación la incógnita x, $x = 15 - y$, y se sustituye en la segunda ecuación:

$20 \cdot (15 - y) + 50y = 450 \Rightarrow 300 - 20y + 50y = 450 \Rightarrow 300 - 20y + 50y = 450 \Rightarrow$

$y = \frac{150}{30} = 5$

$x = 15 - y = 15 - 5 = 10$

- Se comprueba e interpreta la solución: entregó 10 billetes de 20 € y 5 billetes de 50 €.

30 Una granja dedicada a la cría de vacas, cerdos y gallinas tiene un total de 350 animales. El número de cerdos es 10 unidades inferior al doble del de vacas y gallinas juntas, y el número de gallinas, aumentado en 10 unidades, es la tercera parte de la suma del de vacas y cerdos. Averigua cuántas vacas, cerdos y gallinas hay en la granja.

- Se identifican las incógnitas: x = número de vacas, y = número de cerdos, z = número de gallinas
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x + y + z = 350 \\ y = 2 \cdot (x + z) - 10 \\ z + 10 = \dfrac{x + y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 350 \\ 2x - y + 2z = 10 \\ x + y - 3z = 30 \end{cases}$$

Se resuelve por reducción.

$$\begin{cases} x + y + z = 350 \\ x + y - 3z = 30 \end{cases}$$

↓ Se multiplica por –1 a la 1.ª

$$\begin{cases} x + y + z = 350 \\ 2x - y + 2z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x - y - z = -350 \\ x + y - 3z = 30 \end{cases}$$

$3x + 3z = 360$ $\qquad$ $-4z = -320$

$z = 80$

Se sustituye el valor obtenido en la primera ecuación para calcular la incógnita x:

$3x + 3 \cdot 80 = 360 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$

$x + y + z = 350 \Rightarrow 40 + y + 80 = 350 \Rightarrow y = 230$

- Se comprueba e interpreta la solución: hay 40 vacas, 230 cerdos y 80 gallinas.

31 Unos ultramarinos ofrecen a sus clientes tres tipos de oferta. La primera contiene 3 kg de lentejas, 2 kg de judías y 5 kg de garbanzos y cuesta 19 €; la segunda incluye 2 kg de lentejas, 1 kg de judías y 4 kg de garbanzos por un importe de 13 €, mientras que la tercera ofrece 1 kg de lentejas, 2 kg de judías y 4 kg de garbanzos por un total de 14 €. ¿Cuál es el precio del kilo de cada tipo de legumbre?

- Se identifican las incógnitas: x = precio del kilo de lentejas, y = precio del kilo de judías, z = precio del kilo de garbanzos
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} 3x+2y+5z=19 \\ 2x+y+4z=13 \\ x+2y+4z=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+5z=19 \\ x+2y+4z=14 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica por –1 a la 2.ª

$$\begin{cases} 3x+2y+5z=19 \\ -x-2y-4z=-14 \end{cases}$$

$2x + z = 5$

$z = 5 - 2x$

$$\begin{cases} 2x+y+4z=13 \\ x+2y+4z=14 \end{cases}$$

$\downarrow$ Se multiplica por –2 a la 1.ª

$$\begin{cases} -4x-2y-8z=-26 \\ x+2y+4z=14 \end{cases}$$

$-3x - 4z = -12$

$-3x - 4 \cdot (5 - 2x) = -12 \Rightarrow -3x - 20 + 8x = -12 \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5} = 1{,}60$

$z = 5 - 2x = 5 - 2 \cdot 1{,}60 = 1{,}80$

$y = 13 - 2x - 4z = 13 - 2 \cdot 1{,}60 - 4 \cdot 1{,}80 = 2{,}60$

- Se comprueba e interpreta la solución: el kilo de lentejas cuesta 1,60 €, el de judías 2,60 € y el de garbanzos 1,80 €.

32 La suma de las edades de un padre y su hija es de 48 años. Además, se sabe que el cuadrado de la edad de la hija equivale al cuádruple de la edad del padre. ¿Qué edad tienen ambos?

- Se identifican las incógnitas: x = edad de la hija, y = edad del padre
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x+y=48 \Rightarrow y=48-x \\ x^2=4y \Rightarrow x^2=4\cdot(48-x) \Rightarrow x^2=192-4x \Rightarrow x^2+4x-192=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4+768}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+768}}{2} = \frac{-4 \pm 28}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+28}{2} = 12 \\ x_2 = \dfrac{-4-28}{2} = -16 \end{cases}$$

Se deshecha la solución negativa porque se están calculando edades.

$y = 48 - x = 48 - 12 = 36$

- Se comprueba e interpreta la solución: la hija tiene 12 años y el padre 36 años.

33 La altura y la base de un rectángulo se diferencian en 8 cm. Si la altura se aumenta en 4 cm y la base se reduce en 2 cm, el área se incrementa en 48 cm^2. Halla las dimensiones del rectángulo inicial.

- Se identifican las incógnitas: x = base, y = altura
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} x = y + 8 \\ (x - 2) \cdot (y + 4) = xy + 48 \end{cases}$$

Se sustituye la 1.ª ecuación en la 2.ª:

$(y + 8 - 2) \cdot (y + 4) = (y + 8) \cdot y + 48 \Rightarrow (y + 6) \cdot (y + 4) = y^2 + 8y + 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + 6y + 4y + 24 - y^2 - 8y - 48 = 0 \Rightarrow 2y - 24 = 0 \Rightarrow y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12$

$x = y + 8 \Rightarrow x = 12 + 8 = 20$

- Se comprueba e interpreta la solución: la base mide 20 cm y la altura 12 cm.

34 Un grupo de alumnos paga 140 € para celebrar la fiesta de fin de curso. Si hubieran asistido 7 alumnos más, cada uno de ellos habría pagado 1 € menos. ¿Cuántos alumnos acudieron a la fiesta? ¿Cuánto pagó cada uno de ellos?

- Se identifican las incógnitas: x = número de alumnos, y = cantidad que paga cada alumno
- Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} xy = 140 \Rightarrow x = \dfrac{140}{y} \\ (x + 7) \cdot (y - 1) = 140 \Rightarrow xy + 7y - x - 7 - 140 = 0 \end{cases}$$

Se sustituye la 1.ª ecuación en la 2.ª:

$\frac{140}{y} \cdot y + 7y - \frac{140}{y} - 7 - 140 = 0 \Rightarrow 140y + 7y^2 - 140 - 7y - 140y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7y^2 - 7y - 140 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 20 = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{1+9}{2} = 5;\ y_2 = \frac{1-9}{2} = -4$

$x = \frac{140}{y} = \frac{140}{5} = 28$

- Se comprueba e interpreta la solución: asistieron 28 alumnos y cada uno pagó 5 €.

35 Para irse de vacaciones, Penélope alquila una autocaravana por la que le cobran un fijo de 200 € más 150 € diarios. Si su presupuesto oscila entre los 1 700 € y los 2 300 €, ¿cuántos días podrá alquilar la autocaravana?

- Se identifica la incógnita: x = número de días de alquiler
- Se plantea el sistema de inecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} 1\,700 \le 200 + 150x \Rightarrow 1\,700 - 200 \le 150x \Rightarrow 1\,500 \le 150x \Rightarrow x \ge 10 \\ 200 + 150x \le 2\,300 \Rightarrow 150x \le 2\,300 - 200 \Rightarrow x \le 14 \end{cases}$$

La solución de este sistema es [10 , 14]

- Se comprueba e interpreta la solución: puede alquilar la caravana 10, 11, 12, 13 o 14 días.

36 Halla la altura de un rectángulo cuyo perímetro es mayor que 35 cm y menor que 60 cm y cuya base mide 10 cm más que la altura.

- Se identifican las incógnitas: base: $x + 10$; altura: x
- Se plantea el sistema de inecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} 35 < 4x + 20 \Rightarrow 35 - 20 < 4x \Rightarrow 15 < 4x \Rightarrow x > 3{,}75 \\ 4x + 20 < 60 \Rightarrow 4x < 60 - 20 \Rightarrow 4x < 40 \Rightarrow x < 10 \end{cases}$$

La solución de este sistema es (3,75 ; 10)

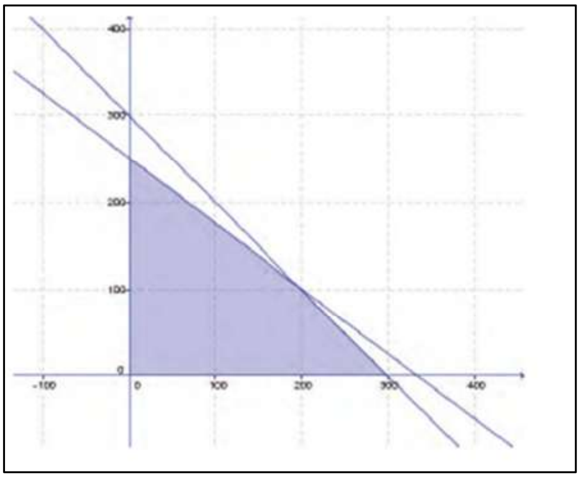
- Se comprueba e interpreta la solución: la altura puede tomar cualquier valor del intervalo (3,75 ; 10).

37 Dos amigos quieren crear una empresa dedicada a la venta de videojuegos, que pueden adquirir a dos precios: 30 € y 40 €. Si solo disponen de 10 000 € para invertir en su empresa y, por cuestiones de espacio, solo pueden almacenar 300 videojuegos, ¿cuántos videojuegos podrán comprar?

- Se identifican las incógnitas: x = número de videojuegos de 30 €, y = número de videojuegos de 40 €
- Se plantea el sistema de inecuaciones y se resuelve:

$$\begin{cases} 30x + 40y \leq 10\ 000 \\ x + y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Se representa cada una de las inecuaciones:



La solución es cualquier par de valores enteros (x , y) de la zona sombreada.

Evaluación

1 La solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales es:
$$\begin{cases} \mathbf{4x - 5y = 1} \\ \mathbf{-2\cdot(2x - 1) = -(3 + 5y)} \end{cases}$$

a. (1 , –1) **b. (0 , –1)** c. No tiene solución. **d. (4 , 3)**

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -2\cdot(2x - 1) = -(3 + 5y) \Rightarrow -4x - 2 = -3 - 5y \Rightarrow -4x + 5y = -3 + 2 \Rightarrow -4x + 5y = -1 \end{cases}$$

No tiene solución porque son ecuaciones equivalentes.

2 El sistema $\begin{cases} -\mathbf{2}x + y - \mathbf{4}z = \mathbf{9} \\ \mathbf{7}x - \mathbf{3}y + z = -\mathbf{4} \\ \mathbf{4}x - \mathbf{2}y + \mathbf{3}z = -\mathbf{8} \end{cases}$ **tiene por solución:**

a. (–1 , 1 , 0) **b. (–1 , 1 , –1)** **c. (0 , 2 , –2)** d. (1 , 3, –2)

$$\begin{cases} -2x + y - 4z = 9 \\ 7x - 3y + z = -4 \\ 4x - 2y + 3z = -8 \end{cases}$$

$\begin{cases}-2x+y-\ 4z=\ 9\\7x-3y+z=\ \ -4\end{cases}$ $\begin{cases}-2x+y-\ 4z=\ 9\\4x-\ 2y+\ 3z=\ \ -8\end{cases}$

↓Se multiplica por 3 a la 1.ª ↓ Se multiplica por 2 a la 1.ª

$\begin{cases}-6x+\ 3y-\ 12z=\ 27\\7x-3y+z=\ \ -4\end{cases}$ $\begin{cases}-4x+\ 2y-\ 8z=\ 18\\4x-\ 2y+\ 3z=\ \ -8\end{cases}$

$x - 11z = 23$ $-5z = 10$

$z = -2$

$x - 11z = 23 \Rightarrow x - 11 \cdot (-2) = 23 \Rightarrow x + 22 = 23 \Rightarrow x = 1$

$-2x + y - 4z = 9 \Rightarrow y = 9 + 2x + 4z \Rightarrow y = 9 + 2 + 4 \cdot (-2) = 3$

La solución es $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$

3 Las soluciones del sistema no lineal $\begin{cases}3x^2-y^2=\ 2\\x+\ 2y=\ \ -7\end{cases}$ son:

a. (3 , –5) c. (3 , –5) y $\left(-\frac{19}{11}, -\frac{29}{11}\right)$

b. (3 , –5) y (3 , 5) **d. No tiene solución.**

$$\begin{cases}3x^2-y^2=2\\x+2y=-7\Rightarrow x=-7-2y\end{cases}$$

Se sustituye la 2.ª ecuación en la 1.ª:

$3 \cdot (-7 - 2y)^2 - y^2 = 2 \Rightarrow 3 \cdot (49 + 4y^2 + 28y) - y^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 147 + 12y^2 + 84y - y^2 - 2 = 0 \Rightarrow 11y^2 + 84y + 145 = 0$

$$y =\ y=\frac{-84\pm\sqrt{7056-6380}}{2\cdot 11}=\frac{-84\pm 26}{22}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\dfrac{-84+26}{22}=-\dfrac{29}{11}\\[2mm] y_2=\dfrac{-84-26}{22}=-5\end{cases}$$

- Si $y_1 = -5 \Rightarrow x_1 = -7 - 2 \cdot y_1 = -7 + 10 = 3$
- Si $y_2 = -\frac{29}{11} \Rightarrow x_2 = -7 - 2 \cdot y_2 = -7 + \frac{58}{11} = \frac{-77+58}{11} = \frac{-19}{11}$

4 El sistema de inecuaciones $\begin{cases} 4\cdot(x-2)+5 \le 3\cdot(1+2x) \\ -(5x-3) > -2x+1 \end{cases}$ tiene como solución:

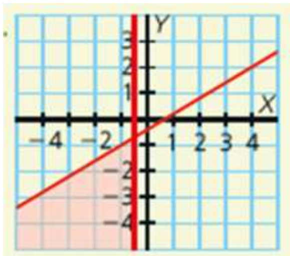
a. $(-\infty\ ,\ -3]$ b. $[-3\ ,\ \frac{2}{3})$ **c. $[-3\ ,\ +\infty)$** **d. $(\frac{2}{3}\ ,\ +\infty)$**

$$\begin{cases} 4\cdot(x-2)+5 \le 3\cdot(1+2x) \Rightarrow 4x-8+5 \le 3+6x \Rightarrow -6 \le 2x \Rightarrow -3 \le x \\ -(5x-3) > -2x+1 \Rightarrow -5x+3 > -2x+1 \Rightarrow 2 > 3x \Rightarrow \dfrac{2}{3} > x \end{cases}$$

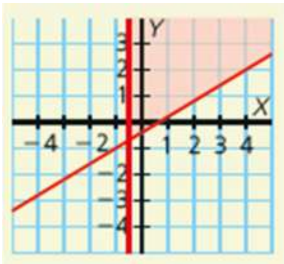
La solución del sistema es $[-3\ ,\ \frac{2}{3})$.

5 De las siguientes gráficas la que representa la solución del sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x \le -1 \\ 3x-5y \ge 2 \end{cases}$ es:

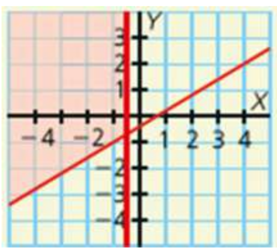
a.



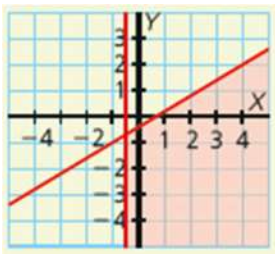
c.



b.



d.



$$\begin{cases} 2x \le -1 \Rightarrow x \le -\dfrac{1}{2} \\ 3x-5y \ge 2 \end{cases}$$

Se sustituye un punto que no pertenezca a la recta $3x - 5y = 2$, por ejemplo el $(0\ ,\ 0)$, en la inecuación $3x - 5y \ge 2 \Rightarrow 3\cdot 0 - 5\cdot 0 \ge 2 \Rightarrow 0 \not\ge 2$, por lo que es el semiplano que no contiene al punto $(0\ ,\ 0)$.