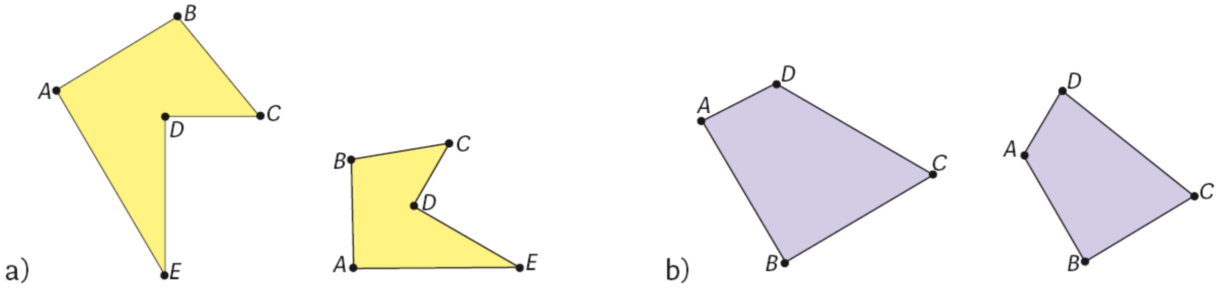
UNIDAD 5: Semejanzas, áreas y volúmenes

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 96

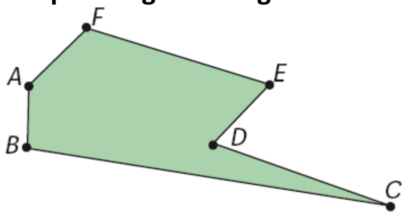
1. Indica si las siguientes figuras son semejantes razonando tu respuesta:

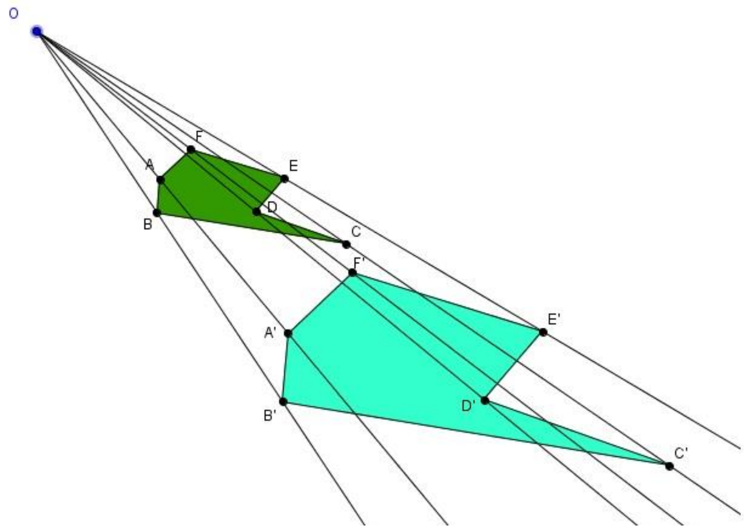


La primera pareja de figuras sí es semejante ya que los ángulos son iguales.

En la segunda pareja, se puede apreciar que el ángulo $\hat{A}$ no es igual en ambas figuras ya que en una es agudo y en la otra obtuso. Por tanto, las figuras no son semejantes.

2. Copia la siguiente figura en tu cuaderno y construye una figura semejante:

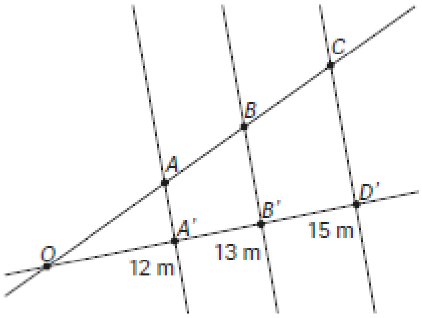




EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 97

3. Utiliza el Teorema de Tales para calcular la medida de los segmentos OA, AB y BC de la siguiente figura sabiendo que $OC = 50$ m:

Según el Teorema de Tales, tenemos que:



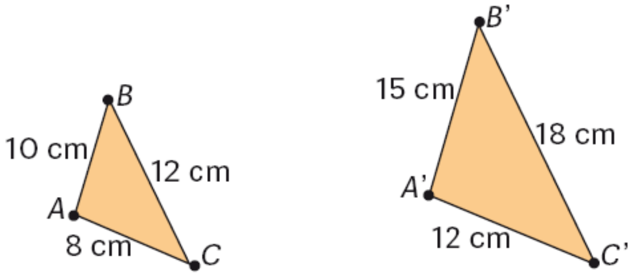
$$\frac{OA}{OC}=\frac{OA'}{OC'}\Rightarrow\frac{OA}{50}=\frac{12}{40}\Rightarrow OA=\frac{50\cdot12}{40}=15\,m$$

$$\frac{AB}{OC}=\frac{A'B'}{OC'}\Rightarrow\frac{AB}{50}=\frac{13}{40}\Rightarrow AB=\frac{50\cdot13}{40}=16,25\,m$$

$$\frac{BC}{OC}=\frac{B'C'}{OC'}\Rightarrow\frac{BC}{50}=\frac{15}{40}\Rightarrow AB=\frac{50\cdot15}{40}=18,75\,m$$

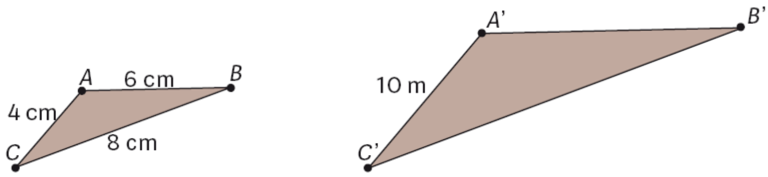
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 98

4. Comprueba si son semejantes los siguientes triángulos:



Los lados son proporcionales, ya que $\frac{15}{10}=\frac{12}{8}=\frac{18}{12}$. Por tanto, ambas figuras son proporcionales.

5. Calcula las medidas de los lados del triángulo sabiendo que los dos triángulos son semejantes.

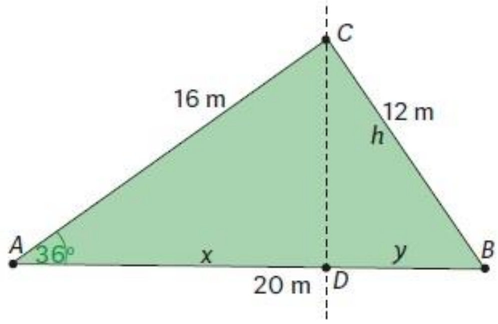


Lado $A'B'\rightarrow\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow\frac{A'B'}{6}=\frac{10}{4}\Rightarrow A'B'=\frac{10\cdot6}{4}=15$

Lado $B'C'\rightarrow\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow\frac{B'C'}{8}=\frac{10}{4}\Rightarrow B'C'=\frac{10\cdot8}{4}=20$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 99

6. Calcula el valor de las incógnitas del siguiente triángulo rectángulo y de todos sus ángulos.



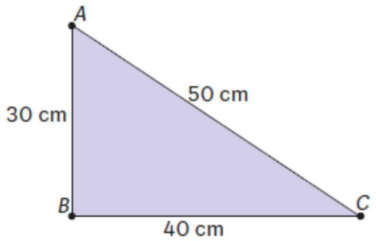
El ángulo C es un ángulo recto. Calculamos el ángulo $B=180º-(90º+36º)=54º$.

Como los triángulos ABC, ACD y BCD tienen dos ángulos iguales, son semejantes, y por tanto:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{16}{20}=\frac{x}{16} \Rightarrow x=\frac{16\cdot 16}{20}=\frac{64}{5}=12,8m$$
$$\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{12}{20}=\frac{x}{12} \Rightarrow x=\frac{12\cdot 12}{20}=\frac{36}{5}=7,2m$$
$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{16}{20}=\frac{h}{12} \Rightarrow x=\frac{16\cdot 12}{20}=\frac{48}{5}=9,6m$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 100

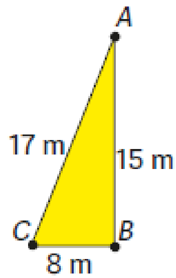
7. Determina la altura sobre la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos:



Sean m y n las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos AB y BC respectivamente. Por el teorema del cateto:

$$AB^2=AC\cdot m \Rightarrow 30^2=50\cdot m \Rightarrow m=18cm$$
$$BC^2=AC\cdot n \Rightarrow 40^2=50\cdot n \Rightarrow n=32cm$$

Aplicando ahora el teorema de la altura:



$h^2=m\cdot n=18\cdot 32=576 \Rightarrow h=\sqrt{576}=24cm$ Sean m y n las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos AB y BC respectivamente. Por el teorema del cateto:

$$AB^2=AC\cdot m \Rightarrow 15^2=17\cdot m \Rightarrow m\simeq 13,23cm$$
$$BC^2=AC\cdot n \Rightarrow 8^2=17\cdot n \Rightarrow n\simeq 3,76cm$$

Aplicando ahora el teorema de la altura:

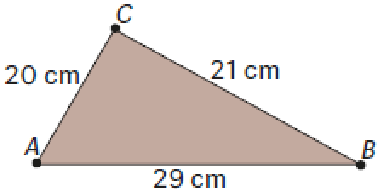
$$h^2=m\cdot n\simeq 49,83 \Rightarrow h\simeq\sqrt{49,83}\simeq 7,06cm$$

Sean m y n las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos AC y BC respectivamente. Por el teorema del cateto:

$$AC^2=AB\cdot m \Rightarrow 20^2=29\cdot m \Rightarrow m\simeq 13,79cm$$
$$BC^2=AB\cdot n \Rightarrow 21^2=29\cdot n \Rightarrow n\simeq 15,21cm$$

Aplicando ahora el teorema de la altura:

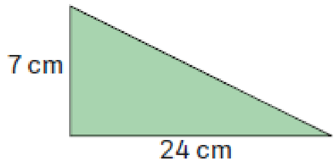
$$h^2=m\cdot n\simeq 209,75 \Rightarrow h\simeq\sqrt{209,75}\simeq 14,48cm$$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 101

8. Calcula el lado que falta y la altura sobre la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos:

Llamando a a la hipotenusa del triángulo, por el Teorema de Pitágoras:



$a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a = \sqrt{625} = 25\,cm$

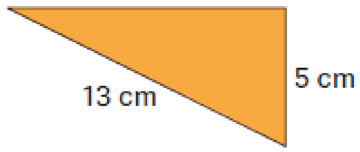
Sean m y n las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos:

$7^2 = 25 \cdot m \Rightarrow m = 1{,}96\,cm$

$24^2 = 25 \cdot n \Rightarrow n = 23{,}04\,cm$

Aplicando el teorema de la altura podemos hallar la altura h sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n = \frac{7^2}{25} \cdot \frac{24^2}{25} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{7^2 \cdot 24^2}{25^2}} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72\,cm$$



En este triángulo, el lado que falta es uno de los catetos, b :

$13^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12\,cm$

Sean m y n las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos:

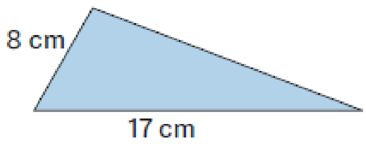
$5^2 = 13 \cdot m \Rightarrow m \simeq 1{,}92\,cm$

$12^2 = 13 \cdot n \Rightarrow n \simeq 11{,}08\,cm$

Aplicando el teorema de la altura podemos hallar la altura h sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n = \frac{5^2}{13} \cdot \frac{12^2}{13} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \frac{5 \cdot 12}{13} \simeq 4{,}62\,cm$$

En el tercer triángulo el lado que falta es uno de los catetos, c :



$17^2 = 7^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15\,cm$

Sean m y n las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos:

$8^2 = 17 \cdot m \Rightarrow m \simeq 3{,}76\,cm$

$15^2 = 17 \cdot n \Rightarrow n \simeq 13{,}24\,cm$

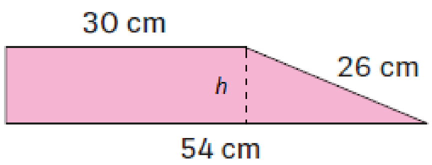
Aplicando el teorema de la altura podemos hallar la altura h sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n = \frac{8^2}{17} \cdot \frac{15^2}{17} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{8^2 \cdot 15^2}{17^2}} = \frac{8 \cdot 15}{17} \simeq 7{,}06\,cm$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 102

9. Determina el área de los siguientes trapecios:

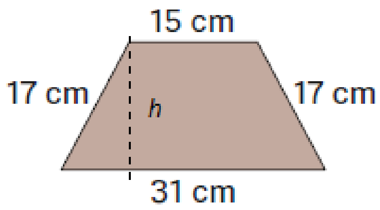
a) Llamando h a la altura del trapecio trazada desde el vértice como se indica en la figura, se forma un triángulo rectángulo de hipotenusa 26 cm y cateto mayor $54 - 30 = 24$ cm. El tercer cateto es la altura, que podemos calcular con el Teorema de Pitágoras:



$26^2 = 24^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10\,cm$ Por tanto, el área del trapecio es:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(54+30)\cdot 10}{2} = 420\,cm^2$$

b) Sea h la altura del trapecio, que es el cateto mayor del triángulo rectángulo que se forma al trazarla desde uno de los vértices superiores tal como se ve en el dibujo, que tiene de hipotenusa 17 cm y de cateto menor $(31-15):2=8$ cm:



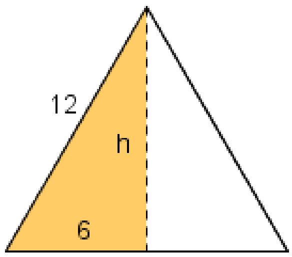
$$17^2 = 8^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{17^2 - 7^2} = \sqrt{225} = 15\,cm$$

Por tanto, el área del trapecio es:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(31+15)\cdot 15}{2} = 345\,cm^2$$

10. Calcula el área de un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

Si trazamos la altura h se forma un triángulo rectángulo con dos vértices del triángulo y el punto medio de la base, tal como se ve en la figura. Por el Teorema de Pitágoras:



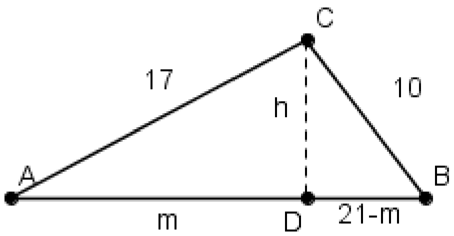
$$12^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\,cm$$

Por tanto, el área del triángulo es:

$$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{12\cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\,cm^2 \simeq 62{,}35\,cm^2$$

11. Calcula el área de un triángulo cuyos lados midan 17,10 y 21 cm.

Si trazamos la altura h desde uno de los vértices, tal como se muestra en la figura, obtenemos dos triángulos rectángulos ACD y BCD. Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en cada uno de ellos obtenemos el siguiente sistema:



$$\begin{cases} h^2 + m^2 = 17^2 \\ h^2 + (21-m)^2 = 10^2 \end{cases}$$

Despejando h^2 en ambas ecuaciones e igualando, obtenemos:

$$17^2 - m^2 = 10^2 - (21-m)^2$$

$$17^2 - m^2 = 10^2 - 21^2 + 42m - m^2$$

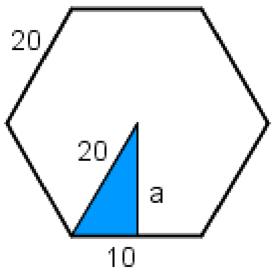
$$17^2 + 21^2 - 10^2 = 42m \Rightarrow m = \frac{630}{42} = 15\,cm$$

De la primera ecuación, se tiene que $h = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8\,cm$.

Por tanto, el área del triángulo es igual a $A = \frac{21\cdot 8}{2} = 84\,cm^2$

12. Calcula el área de un hexágono regular de 20 cm de lado:

Trazando el radio del hexágono y la apotema del hexágono a desde su centro al punto medio de uno de sus lados se forma un triángulo rectángulo como se aprecia en el dibujo. Sabiendo que en un hexágono regular la medida del radio de y del lado coinciden, aplicamos el Teorema de Pitágoras para obtener a:



$$10^2 + a^2 = 20^2 \Rightarrow a = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\,cm$$

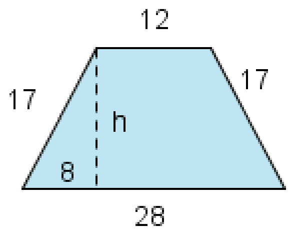
Teniendo en cuenta que el perímetro del hexágono p es igual a 120 cm, el área del hexágono es igual a:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{120 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}\,cm^2 \simeq 1039,23\,cm^2$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 103

13. Calcula el área de un trapecio isósceles de 12 cm de base menor, 28 cm de base mayor y 17 cm de lados iguales.

Trazando la altura desde uno de los vértices superiores se forma un triángulo rectángulo. Aplicamos el Teorema de Pitágoras:



$$17^2 = h^2 + 8^2 \Rightarrow h = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15\,cm$$

El área del trapecio es por tanto:

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(28+12) \cdot 15}{2} = 300\,cm^2$$

14. Antonio mide 168 cm y su sombra en este preciso momento mide 2,1 m. Si la sombra de un árbol que está junto a él mide 7,5 cm, ¿qué altura tiene el árbol?

El triángulo que forma Antonio con su sombra y el rayo de sol es semejante al que forma el árbol. Por tanto:

$$\frac{h}{7,5} = \frac{1,68}{2,1} \Rightarrow h = 6\,m$$

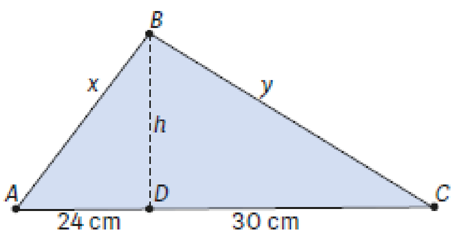
15. Calcula el lado de un rombo de diagonales de 20 cm y 48 cm.

El lado l de un rombo es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma con las semidiagonales.

$$l^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow l = \sqrt{676} = 26\,cm$$

16. Calcula los catetos y la altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo:

Aplicando el teorema del cateto:



$$24^2 = 54 \cdot x \Rightarrow x = \frac{24^2}{54} = \frac{32}{3} = 10,\overset{\frown}{6}\,cm$$

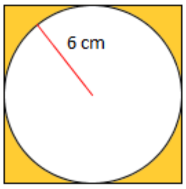
$$30^2 = 54 \cdot y \Rightarrow y = \frac{30^2}{54} = \frac{50}{3} = 16,\overset{\frown}{6}\,cm$$

Aplicando el teorema de la altura:

$$h^2 = 24 \cdot 30 \Rightarrow h = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}\,cm = 26,83\,cm$$

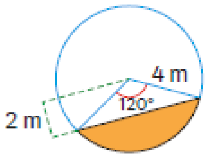
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 104

17. Calcula el área de la región sombreada en cada figura:



a) La figura está formada por un cuadrado de lado 12 cm con un hueco circular de radio 6 cm. Por tanto, su área es el resultado de restar el área del círculo a la del cuadrado:

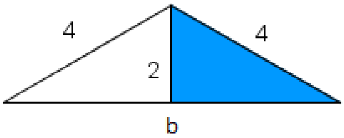
$$A = A_{cuadrado} - A_{círculo} = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 36\pi \simeq 30,9\,cm^2$$



b) En este caso, se trata de un sector circular con un radio de 4 m y un ángulo de 120º al que se le ha suprimido un triángulo isósceles. Puesto que 120º es la tercera parte de 360º, el área del sector circular puede calcularse como la tercera parte del área del círculo del mismo radio:

$$A_{sector} = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{16\pi}{3}\,cm^2$$

Para hallar el área del triángulo isósceles nos fijamos en que la altura trazada desde el vértice formado por los lados iguales divide a la base en dos mitades y forma un triángulo rectángulo, como se ve en la figura. Aplicando el Teorema de Pitágoras:

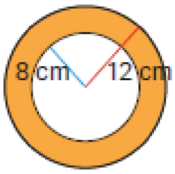


$$4^2 = 2^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = 2^2 \cdot \left(4^2 - 2^2\right) \Rightarrow b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\,cm$$

Por tanto, el área del triángulo es: $A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 4\sqrt{3}\,cm^2$

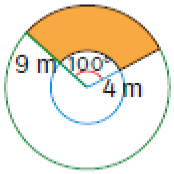
El área de la figura sombreada es, por tanto:

$$A = A_{sector} - A_{triángulo} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \simeq 9,83\,cm^2$$



c) El área de una corona circular se halla restando las áreas de los círculos exterior e interior:

$$A_{corona} = A_R - A_r = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(12^2 - 8^2\right) = 80\pi\,cm^2 \simeq 251,33\,cm^2$$

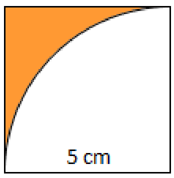


d) La figura es un sector de 100º de una corona circular. Calculamos el área de la corona completa:

$$A_{corona} = A_R - A_r = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(9^2 - 4^2\right) = 65\pi\,cm^2 \simeq 204,2\,cm^2$$

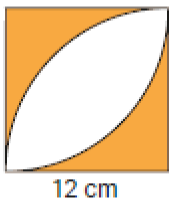
El área de la figura es:

$$A = \frac{100}{360} \cdot 65\pi = \frac{325}{18}\pi\,cm^2 = 56,72\,cm^2$$



e) La figura sombreada es el hueco entre un cuadrado de lado 5 cm y cuarto de un círculo del mismo radio:

$$A = A_{cuadrado} - \frac{A_{círculo}}{4} = 25 - \frac{25\pi}{4} = 5,37\,cm^2$$



f) La figura sombreada es el doble del resultado de restar un cuarto de círculo de radio 12 cm a un cuadrado del mismo lado:

$$A = 2\left(A_{cuadrado} - \frac{A_{círculo}}{4}\right) = 2\left(144 - \frac{144\pi}{4}\right) = 61,81\,cm^2$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 105

18. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma recto cuya base es un cuadrado de 5 cm de lado 10 cm de altura.

Área lateral

El área lateral es la suma del área de sus caras laterales, con forma rectangular de base 5 cm y altura 10 cm (dos bases cuadradas y cuatro caras rectangulares):

$$A_{lateral} = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200\, cm^2$$

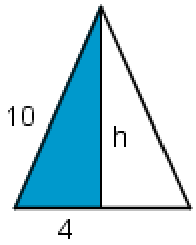
Área total

$$A_{total} = 2A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 5^2 + 200 = 250\, cm^2$$

Volumen

$$V = A_{base} \cdot h = 5^2 \cdot 10 = 250\, cm^3$$

19. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de una pirámide recta que tiene como base un cuadrado de 8 cm de lado y 10 cm de arista lateral.



Área lateral

Las caras laterales tienen forma de triángulo isósceles de base 8 cm. Podemos calcular su altura utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$10^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 4\sqrt{21}\, cm \simeq 18,33\, cm$$

Por tanto:

$$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 4\sqrt{21}}{2} = 64\sqrt{21}\, cm^2 \simeq 1173,14\, cm^2$$

Área total

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \simeq 8^2 + 1173,14 \simeq 1237,14\, cm^2$$

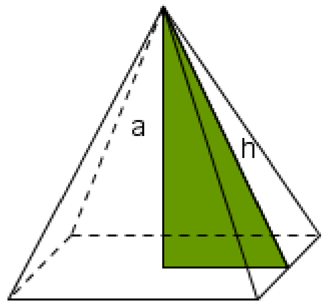
Volumen

La altura a de la pirámide forma un triángulo rectángulo con la altura de una cara h y el segmento que une el centro de la base con el punto medio del lado, que mide su mitad. Por tanto:

$$h^2 = a^2 + 4^2 \Rightarrow a = \sqrt{h^2 - 4^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}\, cm \simeq 8,25\, cm$$

Calculamos el volumen mediante la fórmula:

$$V = \frac{A_{base} \cdot a}{3} = \frac{8^2 \cdot 2\sqrt{17}}{3} \simeq 175,92\, cm^3$$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 106

20. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de las siguientes figuras:

a) **Un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de generatriz**.

Área lateral

La cara lateral es un rectángulo de altura $g = 12\, cm$ y base $L = 2\pi r = 10\pi\, cm$:

$$A_{lateral} = L \cdot g = 120\pi\, cm^2 \simeq 376,99\, cm^2$$

Área total

Para calcular el área total debemos sumar las dos bases al área lateral:

$A = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 50\pi + 120\pi \simeq 534,07\,cm^2$

Volumen

$V = A_{base} \cdot g = \pi r^2 g = 300\pi\,cm^3 \simeq 942,48\,cm^3$

b) **Un cono de 8 cm de radio y 10 cm de generatriz.**

Área lateral

La cara lateral es un sector circular de radio $g = 10\,cm$:

$A_{lateral} = \pi r g = 80\pi\,cm^2 \simeq 251,33\,cm^2$

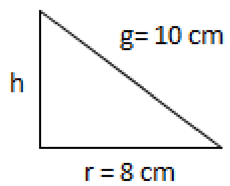
Área total

Para calcular el área total debemos sumar la base al área lateral:

$A = A_{base} + A_{lateral} = 64\pi + 80\pi = 144\pi\,cm^2 \simeq 452,39\,cm^2$

Volumen

Para calcular la altura utilizamos el triángulo rectángulo formado por ella, el radio y la generatriz:



$h^2 = g^2 - r^2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6\,cm$

Por tanto:

$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{384\pi}{3}\,cm^3 \simeq 402,12\,cm^3$$

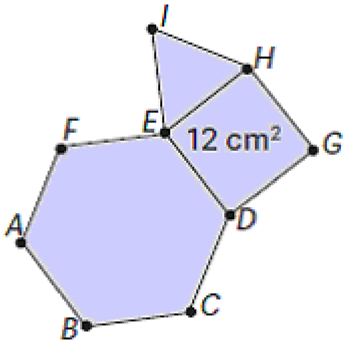
21. Calcula el área y el volumen de una esfera de 8 cm de radio.

Área: $A = 4\pi r^2 = 256\pi\,cm^2 \simeq 804,25\,cm^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2048\pi}{3}\,cm^3 \simeq 2144,66\,cm^3$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 107

22. Calcula el área de cada región sabiendo que el plano está a escala $1:120$ y que el cuadrado tiene un área de 12 cm² en ese plano.

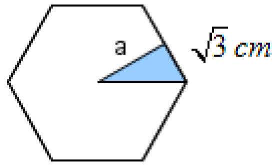


La razón de escala es $\frac{1}{120}$ pero como queremos calcular el área real a partir de la del plano debemos usar su inversa, $r = 120$.

Las áreas de las figuras son proporcionales a las áreas en el plano con razón de proporcionalidad r^2.

El cuadrado $DEHG$ tiene un área en el plano de $12\,cm^2$, luego su área real será: $A_{DEGH} = 12 \cdot r^2 = 172800\,cm^2 = 17,28\,m^2$.

El hexágono tiene como lado el segmento ED, que es también el lado del cuadrado y por tanto: $ED = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,cm$. El perímetro del hexágono es por tanto $p = 12\sqrt{3}\,cm$ y podemos calcular su apotema utilizando el teorema de Pitágoras y el hecho de que su radio mide igual que su lado:



$a^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=3\,cm$

$A_{hexágono}=\dfrac{p\cdot a}{2}=\dfrac{12\sqrt{3}\cdot 3}{2}=18\sqrt{3}\,cm^2$

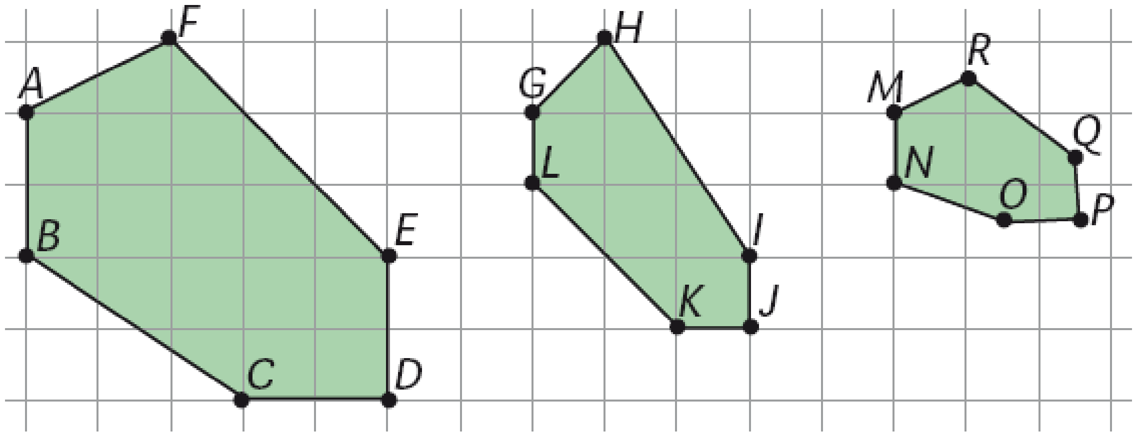
$A_{hexágono(real)}=A_{hexágono}\cdot r^2=448947,57\,cm^2=44,89\,m^2$

En cuanto al triángulo EHI se puede apreciar que su área es la sexta parte del hexágono, luego:

$A_{EHI(real)}=\dfrac{A_{hexágono(real)}}{6}=\dfrac{44,89}{6}=7,48\,m^2$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGINAS 110-112

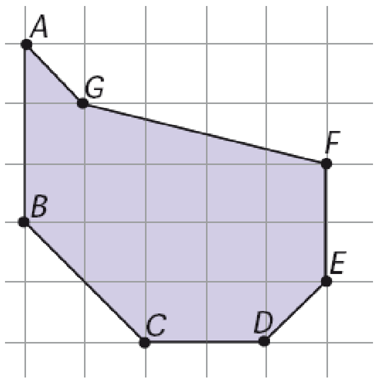
1. Indica cuáles de estas figuras son semejantes y calcula su razón de semejanza:



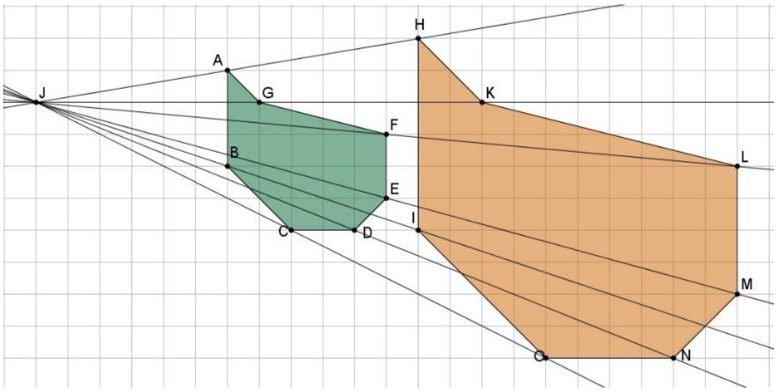
La primera figura y la tercera tienen todos los ángulos iguales, de modo que son semejantes. Midiendo los segmentos correspondientes AB y MN tenemos que $AB=2\cdot MN$ y por tanto la razón de semejanza es $r=2$.

La segunda figura, en cambio, no es semejante a las otras dos, lo que se puede comprobar observando que el ángulo correspondiente al vértice A no es igual que el ángulo G.

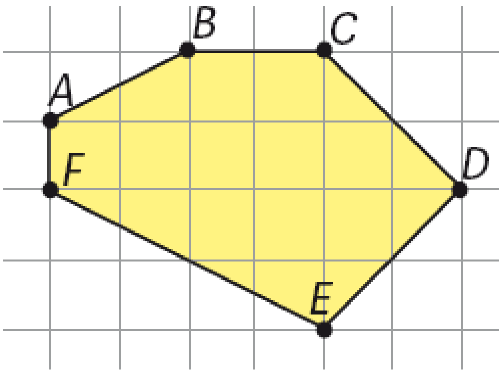
2. Copia la siguiente figura en una hoja cuadriculada y dibuja una figura semejante a esta con razón de semejanza 2.

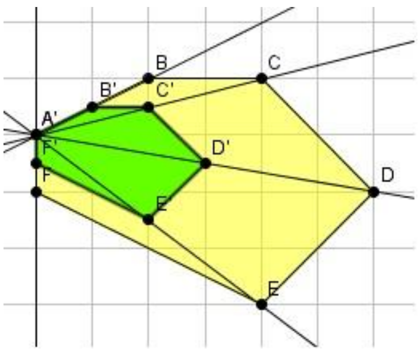


Trazamos un segmento HI paralelo a AB y del doble de su longitud. Trazando las rectas AH y hallamos el punto como su intersección, y desde ese punto trazamos rectas a cada uno de los vértices del polígono original.
Los lados del polígono semejante se trazan mediante paralelas a los lados del polígono original y obtenemos de esta forma una figura semejante con razón $r = 2$.

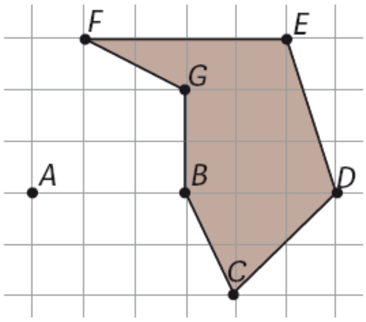


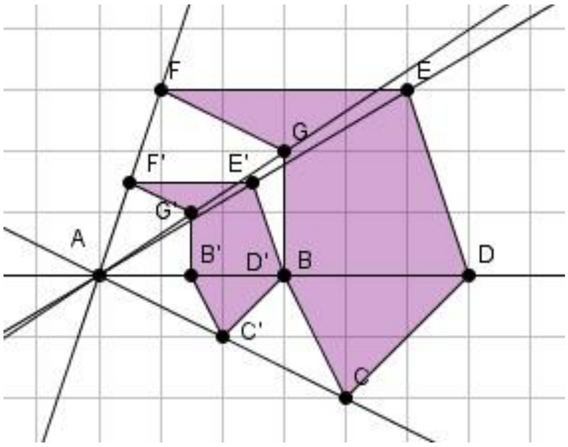
3. **Dada la siguiente figura, construye una figura semejante con razón de semejanza $\frac{1}{2}$ utilizando el vértice A como punto para la proyección.**





4. **Dada la siguiente figura, construye una figura semejante con razón de semejanza $\frac{1}{2}$ utilizando el vértice A como punto para la proyección.**



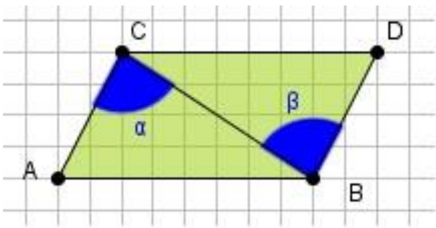


EL TEOREMA DE TALES. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

5. **Dado un triángulo de lados 3,8 cm, 46 mm y 0,48 m, calcula las medidas de un triángulo semejante a éste con razón de semejanza 4,2.**

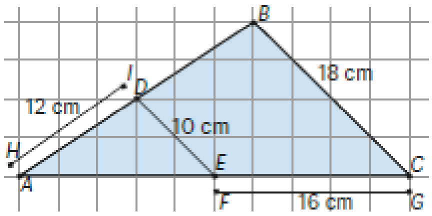
   Las medidas del triángulo semejante serán las del triángulo dado multiplicadas por la razón de semejanza. Por tanto, sus medidas serán: $3{,}8\cdot 4{,}2=15{,}96\,cm$, $46\cdot 4{,}2=193{,}2\,mm$ y $0{,}48\cdot 4{,}2=2{,}016\,m$.

6. **Si trazamos la diagonal de un paralelogramo, ¿los triángulos que se obtienen son semejantes?**



   Los segmentos AB y BD son iguales y también lo son los ángulos α y β, por ser ángulos alternos formada por una secante a dos paralelas. Por tanto, los triángulos ABC y BCD comparten un ángulo y los segmentos que lo forman, y por tanto son iguales (algo más que semejantes).

7. **Dados los siguientes triángulos en forma de Tales, calcula sus lados:**



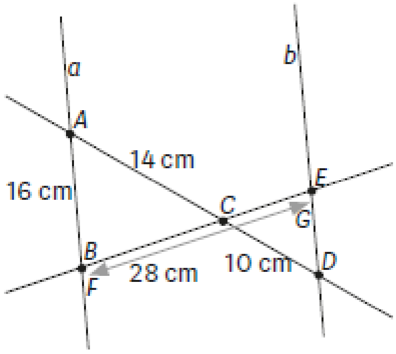
   Llamando x a la longitud del segmento BD e y a la de AE, podemos aplicar el teorema de Tales:

$$\frac{12+x}{12}=\frac{18}{10}\Rightarrow 10(12+x)=216\Rightarrow x=9{,}6\,cm$$

$$\frac{y+16}{y}=\frac{18}{10}\Rightarrow 10(y+16)=18y\Rightarrow y=20\,cm$$

8. Sabiendo que las rectas a y b son paralelas, razona si los triángulos ABC y CDE son semejantes. Calcula los lados CE y ED .

Como las rectas a y b son paralelas, $A=D$ y $B=E$ por ser ángulos alternos interiores producidos por sendas secantes a las paralelas. Los ángulos en el vértice C en cada uno de los triángulos son también iguales por ser ángulos opuestos por el vértice. Por tanto, los triángulos y tienen los tres ángulos iguales y son semejantes.



Utilizando la semejanza entre los triángulos, tenemos que:

$$\frac{CE}{28}=\frac{10}{14}\Rightarrow CE=20\,cm$$

$$\frac{ED}{16}=\frac{10}{14}\Rightarrow ED=\frac{80}{7}\approx 11,43\,cm$$

TEOREMAS DEL CATETO Y DE LA ALTURA

9. Calcula la altura sobre la hipotenusa y los catetos del siguiente triángulo:

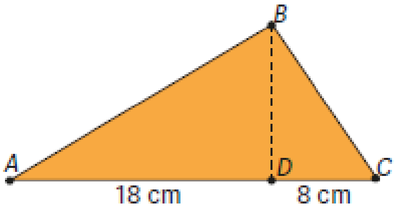
Por el teorema del cateto:

$$AB^2=AC\cdot AD\Rightarrow AB=\sqrt{26\cdot 18}=6\sqrt{13}\,cm$$

$$BC^2=AC\cdot CD\Rightarrow BC=\sqrt{26\cdot 8}=4\sqrt{13}\,cm$$

Aplicando ahora el teorema de la altura:

$$h^2=AD\cdot CD\Rightarrow h=\sqrt{312}=2\sqrt{72}\,cm$$



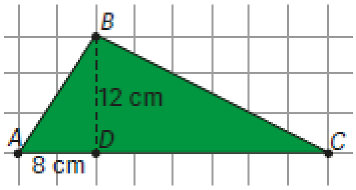
10. Calcula el perímetro de los siguientes rectángulos:

Por el teorema de la altura: $h^2=AD\cdot CD\Rightarrow CD=\dfrac{144}{8}=18\,cm$

Por tanto, $AC=18+8=26\,cm$. Aplicando el teorema del cateto:

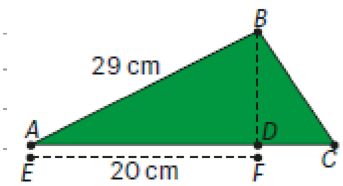
$$AB^2=AC\cdot AD\Rightarrow AB=\sqrt{26\cdot 8}=4\sqrt{13}\,cm$$

$$BC^2=AC\cdot CD\Rightarrow BC=\sqrt{26\cdot 18}=6\sqrt{13}\,cm$$



El perímetro del triángulo es: $p=26+10\sqrt{13}\,cm\approx 62,06\,cm$

Aplicando el teorema del cateto en el otro triángulo:



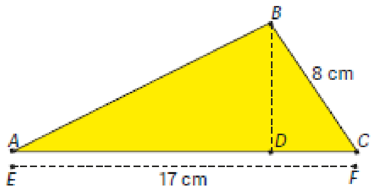
$$AB^2=AC\cdot CD\Rightarrow AC=\frac{29^2}{20}=42,05\,cm$$

Por tanto: $CD=AC-AD=22,05\,cm$ y por el teorema del cateto:

$$BC^2=AC\cdot CD\Rightarrow BC^2=\sqrt{42,05\cdot 22,05}=30,45\,cm$$

El perímetro es: $p=42,05+30,45+29=101,5\,cm$

11. Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:



Por el teorema del cateto: $BC^2 = AC \cdot CD \Rightarrow CD = \dfrac{64}{17}cm$

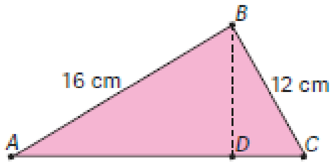
Aplicando el Teorema de Pitágoras en BCD:

$$h^2 = 8^2 - \left(\frac{64}{17}\right)^2 = \frac{64 \cdot 17 - 64}{17^2} = \frac{64 \cdot 16}{17^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{64 \cdot 16}{17^2}} = \frac{32}{17}cm$$

12. Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:

Aplicamos el Teorema de Pitágoras para hallar AC: $AC^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow AC = \sqrt{400} = 20\,cm$

Por el teorema del cateto:



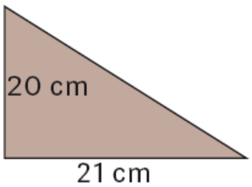
$$AB^2 = AC \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{256}{20} = 12,8\,cm$$

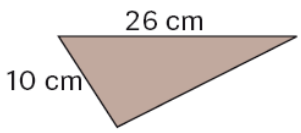
$$BC^2 = AC \cdot CD \Rightarrow CD = \frac{144}{20} = 7,2\,cm$$

Aplicando el teorema de la altura: $h^2 = 12,8 \cdot 7,2 \Rightarrow h = \sqrt{92,16} = 9,6\,cm$

TEOREMA DE PITÁGORAS. ÁREAS

13. Determina el lado que falta de los siguientes triángulos rectángulos:





En el primer triángulo el lado que falta es la hipotenusa, por tanto:

$$a^2 = 21^2 + 20^2 \Rightarrow a = \sqrt{841} = 29\,cm$$

En el segundo triángulo, el lado que falta es uno de los catetos, por tanto:

$$b^2 = 26^2 - 10^2 \Rightarrow b = \sqrt{576} = 24\,cm$$

14. Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm.

Trazando la altura del triángulo obtenemos un triángulo equilátero en el que la altura es uno de los catetos y la mitad de la base es el otro cateto. Por tanto:

$$h^2 = 5^2 - 2,5^2 \Rightarrow h = \sqrt{18,75} \approx 4,33\,cm$$

15. Calcula el perímetro de un rectángulo de diagonal 40 cm; uno de sus lados mide 24 cm.

Como la diagonal de un rectángulo forma un triángulo rectángulo con los lados, cuya hipotenusa es la diagonal, llamando a al lado desconocido, tenemos que:

$$a^2 = 40^2 - 24^2 \Rightarrow a = \sqrt{1024} = 32\,cm$$

Por tanto, el perímetro es: $p = 2 \cdot (32 + 24) = 112\,cm$

16. Calcula el área de un cuadrado cuya de diagonal 7 cm.

Llamando a al lado del cuadrado, por el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + a^2 = 7^2 \Rightarrow 2a^2 = 49 \Rightarrow a^2 = \frac{49}{2}$$

Por tanto, el área es $A = a^2 = \dfrac{49}{2} = 24,5\,cm^2$

17. Calcula la altura de un triángulo isósceles de 8 cm de base y cuyos lados iguales miden 5 cm cada uno.

La altura h forma un triángulo rectángulo con la mitad de la base y uno de los lados iguales. Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{9} = 3\,cm$$

18. Calcula el perímetro de un rombo que tiene por diagonales 10 y 24 cm.

El lado del rombo, a, es la hipotenusa de un triángulo que tiene por catetos las semidiagonales del rombo. Por tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13\,cm$$

Por tanto, el perímetro es: $p = 4a = 52\,cm$

19. Calcula el área de un hexágono regular de 72 cm de perímetro.

El lado del hexágono mide $\dfrac{72}{6} = 12\,cm$ y por tanto su radio también. La apotema a forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio y el otro cateto es la mitad del lado. Por tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow a = 6\sqrt{3}\,cm$$

El área del hexágono es por tanto:

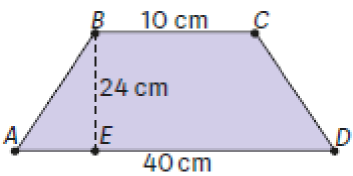
$$A = \frac{p \cdot a}{2} = 216\sqrt{3}\,cm^2 \approx 374,12\,cm^2$$

20. Calcula el área de un pentágono regular de lado 10 cm; el radio es la circunferencia circunscrita es 8,5 cm.

La apotema a forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio y la mitad de un lado el otro cateto. Por tanto: $a^2 = 8,5^2 - 5^2 \Rightarrow a = \sqrt{47,25} \approx 6,87\,cm$. El área del pentágono es:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} \approx \frac{50 \cdot 6,87}{2} \approx 171,85\,cm^2$$

21. Calcula el perímetro del trapecio isósceles que se muestra en la figura:

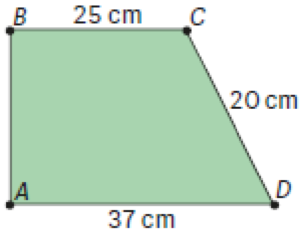


El triángulo ABE es un triángulo rectángulo y su cateto menor mide $(40-10):2 = 15\,cm$. Por tanto:

$$AB^2 = 24^2 + 15^2 \Rightarrow AB = \sqrt{801} = 9\sqrt{89}\,cm$$

El perímetro es: $p = 40 + 10 + 2 \cdot 9\sqrt{89} \approx 219,81\,cm$

22. Calcula el área del trapecio que se muestra en la figura:

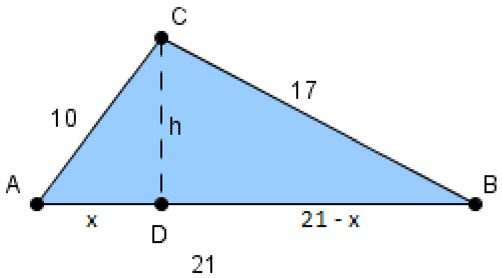


Trazando una vertical desde C formamos un triángulo rectángulo de hipotenusa 20 cm, un cateto la altura h y el cateto menor igual a $37-25=12\,cm$. Aplicando Pitágoras:

$h^2=20^2-12^2 \Rightarrow h=\sqrt{256}=16\,cm$.

Por tanto, el perímetro es: $p=37+20+25+16=98\,cm$

23. Calcula la altura del siguiente triángulo:



Trazando la altura desde C dividimos el segmento AB en dos segmentos, x y $21-x$. Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos ACD y BCD tenemos:

$$\begin{cases} h^2+x^2=10^2 \\ h^2+(21-x)^2=17^2 \end{cases}$$

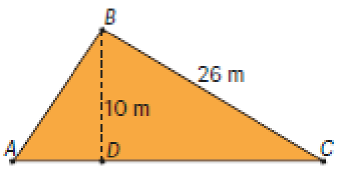
Despejando en la primera ecuación: $h^2=10^2-x^2$ y sustituyendo en la segunda:

$$10^2-x^2+21^2-42x+x^2=17^2$$

$$-42x=-252$$

$$x=6\,cm \quad \Rightarrow \quad h=\sqrt{10^2-6^2}=8\,cm$$

24. Calcula el perímetro del triángulo rectángulo:



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo BDC:

$DC^2=26^2-10^2 \Rightarrow DC=\sqrt{576}=24\,cm$

Por el teorema de la altura:

$10^2=24\cdot AD \Rightarrow AD=\dfrac{100}{24}=\dfrac{25}{6}\,cm$ y por tanto $AC=24+\dfrac{26}{6}=\dfrac{169}{6}\,cm$

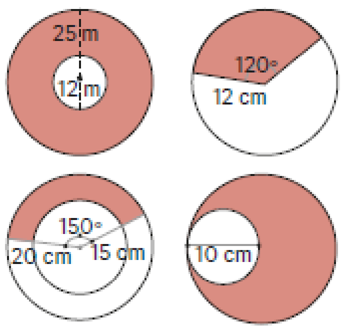
Por el teorema del cateto:

$AB^2=\dfrac{169}{6}\cdot\dfrac{25}{6} \Rightarrow AB=\dfrac{13\cdot 5}{6}=\dfrac{65}{6}\,cm$

Por tanto, el perímetro del triángulo ABC es: $p=26+\dfrac{169}{6}+\dfrac{65}{6}=\dfrac{350}{6}=\dfrac{175}{3}\,cm$

FIGURAS CIRCULARES

25. Calcula el área de la zona sombreada:



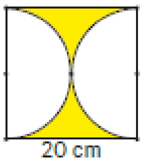
Corona circular: $A=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\left(25^2-12^2\right)=481\pi\,m^2$

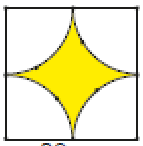
Sector circular: $A=\dfrac{\alpha}{360}\cdot\pi r^2=\dfrac{120}{360}\cdot 144\pi=48\pi\,cm^2$

Sector de una corona: $A=\dfrac{\alpha}{360}\pi\left(R^2-r^2\right)=\dfrac{875}{12}\pi\,cm^2$

Círculo con hueco circular: $A=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\left(10^2-5^2\right)=75\pi\,cm^2$

26. Calcula el área de la zona sombreada:





La figura está compuesta de un cuadrado al que se le han hecho dos huecos semicirculares. Juntando los dos huecos forman un círculo de radio $10\,cm$:

$A = A_{cuadrado} - A_{círculo} = 20^2 - 10^2\pi = 85{,}84\,cm^2$

La segunda figura tiene la misma área ya que juntando los cuatro cuartos de círculo tenemos un círculo del mismo radio.

CUERPOS GEOMÉTRICOS Y DE REVOLUCIÓN

27. Calcula el área lateral y el volumen de un cubo de 10 cm de arista:

Área lateral: $A = 4 \cdot A_{cara} = 4 \cdot 10^2 = 400\,cm^2$

Volumen: $V = a^3 = 10^3 = 1000\,cm^3$

28. Calcula el área lateral y el volumen de un cilindro hexagonal de 20 cm de lado y 10 cm de altura:

Área lateral: $A = 6 \cdot A_{cara} = 6 \cdot 20 \cdot 10 = 1200\,cm^2$

Volumen: $V = A_{base} \cdot h$

Para calcular el área de la base, hay que tener en cuenta que la apotema forma un triángulo rectángulo con la mitad del lado y el radio del hexágono: $a^2 = 20^2 - 10^2 \Rightarrow a = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\,cm$.

Por tanto: $A_{base} = \dfrac{p \cdot a}{2} = \dfrac{120 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}\,cm^2$ y $V = 600\sqrt{3} \cdot 10 = 6000\sqrt{3}\,cm^3$

29. Calcula el volumen de una pirámide recta cuya base es un cuadrado de 15 cm de diagonal y cuyas aristas en las caras triangulares miden 25 cm.

Para calcular el área de la base tenemos en cuenta que la diagonal del cuadrado forma un triángulo rectángulo con dos lados l de modo que, aplicando el Teorema de Pitágoras: $l^2 + l^2 = 15^2$ y por tanto $l = \sqrt{\dfrac{225}{2}} = \dfrac{15}{\sqrt{2}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}\,cm$. El área de la base es: $A_{base} = l^2 = \dfrac{225}{2} = 112{,}5\,cm^2$.

La altura de la pirámide forma, a su vez, un triángulo rectángulo con la mitad de la diagonal de la base y la arista. Por el Teorema de Pitágoras: $h^2 = 25^2 - \left(\dfrac{15}{2}\right)^2 = \dfrac{2275}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{2275}{4}} = \dfrac{5\sqrt{91}}{2}\,cm$.

El volumen de la pirámide es, por tanto: $V = \dfrac{1}{3} A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 112{,}5 \cdot \dfrac{5\sqrt{91}}{2} \approx 894{,}32\,cm^3$

30. Calcula el volumen de una pirámide recta cuya base es un hexágono de 10 cm de lado y cuyas aristas en las caras triangulares miden 12 cm de longitud

Para calcular el área de la base tenemos en cuenta que la apotema a del hexágono forma un triángulo rectángulo con la mitad del lado y con el radio, que es igual al lado.

Aplicando el Teorema de Pitágoras: $a^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,cm$ y por tanto el área de la base es: $A_{base} = \dfrac{p \cdot a}{2} = \dfrac{60 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\,cm^2$.

La altura de la pirámide forma, a su vez, un triángulo rectángulo con el radio de la base y la arista. Por el Teorema de Pitágoras: $h^2 = 12^2 - 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\,cm$.

El volumen de la pirámide es, por tanto: $V = \dfrac{1}{3} A_{base} \cdot h = 100\sqrt{33}\,cm^3 \approx 574{,}56\,cm^3$

31. Calcula el área de un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de altura:

$$A = 2A_{base} + A_{lateral} = 2\pi r\left(r+h\right) = 2\pi \cdot 5 \cdot \left(5+12\right) = 170\pi\,cm^2 \approx 534{,}07\,cm^2$$

32. Calcula el volumen de un cilindro de 20 cm de diámetro y de 15 cm de altura:

El radio de la base es $r = 10\,cm$, luego: $V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 h = 1500\pi\,cm^3 \approx 4712{,}39\,cm^3$

33. Calcula el área de un cono de 24 cm de diámetro y 5 cm de altura:

La generatriz del cono es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio de la base y la altura: $g^2 = r^2 + h^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow g = \sqrt{169} = 13\,cm$

Por tanto: $A = A_{lateral} + A_{base} = \pi r\left(g + r\right) = 300\pi\,cm^2 \approx 942{,}48\,cm^2$.

34. Calcula el volumen de un cono de 12 cm de radio y 15 cm de generatriz:

Como el radio de la base es $r = 12\,cm$, tenemos que $A_{base} = \pi r^2 = 144\pi\,cm^2$.

La altura del cono es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la generatriz y cuyo otro cateto es el radio de la base: $h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{81} = 9\,cm$.

$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144\pi \cdot 9 = 432\pi\,cm^3 \approx 1357{,}17\,cm^3$$

35. Calcula el área y el volumen de una esfera de 15 cm de diámetro:

<u>Área</u>: $A = 4\pi r^2 = 225\pi\,cm^2 \approx 760{,}86\,cm^2$

<u>Volumen</u>: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 562{,}5\pi\,cm^3 \approx 1767{,}15\,cm^3$

ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS SEMEJANTES

36. El área de un cuadrado es 18 cm^2. Calcula el área de un cuadrado semejante a este con razón de semejanza 2,4.

El área se multiplica por el cuadrado de la razón de semejanza: $A = 18 \cdot 2{,}4^2 = 103{,}68\,cm^2$.

37. El perímetro de un paralelogramo es 18 cm. Calcula el perímetro de un paralelogramo semejante a este con razón de semejanza $r=\frac{2}{3}$.

El perímetro, al ser una dimensión lineal, se multiplica por la razón de semejanza: $p=18\cdot\frac{2}{3}=12\,cm$

38. El volumen de una pirámide es 18 cm^3. Calcula el volumen de una pirámide semejante a ésta con razón de semejanza 0,8.

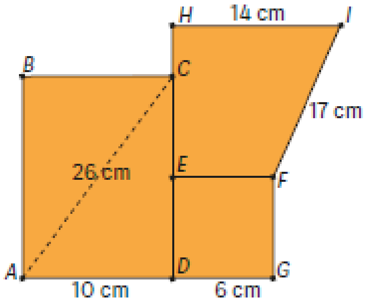
El volumen del cubo se multiplica por el cubo de la razón de semejanza: $V=18\cdot 0,8^3=9,216\,cm^3$.

39. El siguiente plano está a escala $1:25$. Calcula el perímetro y el área de cada habitación.

Habitación $EDGF$: es un cuadrado de lado $6\,cm$. Por tanto, su perímetro en el plano es $p=24\,cm$ y su área $A=36\,cm^2$. El perímetro real de la habitación es: $p=24\cdot 25=600\,cm=6\,m$ y el área: $A=36\cdot 25^2=22500\,cm^2=2,25\,m^2$.

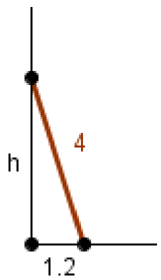
Habitación $ABCD$: El segmento AB forma un triángulo rectángulo con un cateto $BC=10\,cm$ e hipotenusa $AC=26\,cm$. Por tanto: $AB^2=26^2-10^2\Rightarrow AB=\sqrt{576}=24\,cm$. El perímetro real es, por tanto: $p=2(10+24)\cdot 25=1700\,cm=17\,m$ y el área real $A=10\cdot 24\cdot 25^2=150000\,cm^2=15\,m^2$.

Habitación $EFIH$: Trazando la altura h desde F se forma un triángulo rectángulo de hipotenusa $17\,cm$ y de cateto $14-6=8\,cm$. Por tanto: $h^2=17^2-8^2\Rightarrow h=\sqrt{225}=15\,cm$. El perímetro real de la habitación es $p=(17+14+15+6)\cdot 25=1300\,cm=13\,m$. El área del trapecio en el plano es: $A=\frac{(6+14)\cdot 15}{2}=150\,cm^2$ y el real: $A=150\cdot 25^2=93750\,cm^2=9,375\,m^2$



PROBLEMAS

40. Una viga de madera de 4 m está apoyada en la pared y separada de ésta 120 cm. ¿A qué altura estará el punto más alto de la viga?

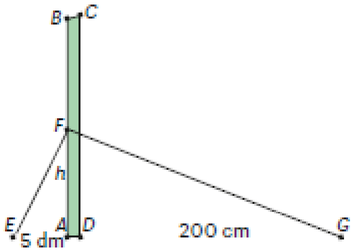


La escalera es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura y la separación hasta la pared. Por tanto:
$h^2=4^2-1,2^2\Rightarrow h=\sqrt{14,56}\approx 3,82\,m$

41. Un triángulo tiene 24 cm^2 de área y uno de sus lados mide 4,8 cm. Calcula el área de un triángulo semejante a este en el que mida 12 cm el lado correspondiente al anterior.

La razón de semejanza es $r=\frac{12}{4,8}=2,5$ y por tanto el área $A'=A\cdot r^2=24\cdot 2,5^2=150\,cm^2$.

42. Un álamo tiene la raíz enferma y para evitar que se caiga lo han afianzado con dos vientos. De esta manera, está perpendicular al suelo y sujeto con dos cables tal como se muestra en la figura. Si el ángulo que forman entre ellos es recto y la distancia de cada cable al árbol es 5 dm y 200 cm, respectivamente, ¿a qué altura está el árbol sujeto? ¿Qué longitud de cable se necesita?



Aplicamos el teorema del cateto al triángulo EFG para calcular la longitud de cada cable:

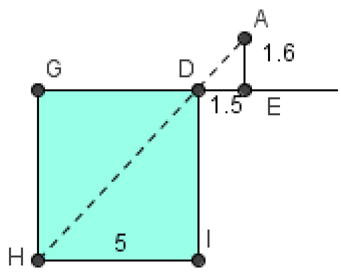
$$EF^2 = 25\cdot 5 \Rightarrow EF = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,dm \approx 11{,}18\,dm$$

$$FG^2 = 25\cdot 20 \Rightarrow EF = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}\,dm \approx 22{,}36\,dm$$

Por tanto, se necesitan en total:

$$5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 15\sqrt{5}\,dm = 33{,}54\,dm$$

43. Ana está mirando el fondo de una piscina desde 1,5 m del borde. Si el ancho de la piscina es de 5 m y Ana mide 160 cm de alto, ¿qué profundidad tiene la piscina?



El triángulo ADE, formado por la mirada de Ana, su altura y su distancia al borde de la piscina, es semejante al triángulo DHI por la igualdad de los ángulos $EAD = IDH$ y $ADE = DHI$. Por tanto:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{HI}} \Rightarrow \overline{DI} = \frac{5\cdot 1{,}6}{1{,}5} = 5{,}\widehat{3}\,m$$

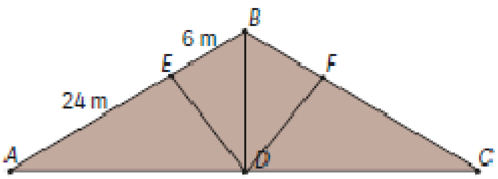
La profundidad de la piscina es de $5{,}\widehat{3}\,m$.

44. Una casa de 8 m de altura proyecta una sombra de 6 m a las 2 de la tarde. Si a esa misma hora Ana tiene una sombra de 123 cm, ¿cuánto mide Ana?

La casa, su sombra y los rayos de sol forman un triángulo semejante al que forman Ana, su sombra y los rayos de sol, ya que el ángulo que forman son iguales. Llamando h a la altura de Ana:

$\dfrac{h}{123} = \dfrac{6}{8} \Rightarrow h = \dfrac{123\cdot 6}{8} = 92{,}25\,cm$. Ana mide $92{,}25\,cm$.

45. Unas escaleras mecánicas tienen un tramo de subida y otro de bajada, y deja un hueco de escalera como el que se muestra en la figura. Si cada kg de pintura da para pintar 5 m^2, ¿cuántos kilogramos de pintura necesitaríamos para dar dos manos de pintura al hueco de escalera?



Podemos calcular el segmento ED aplicando el teorema de la altura al triángulo ABD:

$$ED^2 = 24\cdot 6 \Rightarrow ED = \sqrt{144} = 12\,m$$

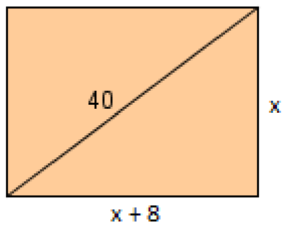
El área del triángulo ABD es $A = \dfrac{30\cdot 12}{2} = 180\,m^2$. Por ser el triángulo BCD igual, en total necesitaremos pintar el equivalente a un área 4 veces el triángulo. Por tanto, necesitaremos un total de $\dfrac{4\cdot 180}{5} = 144\,kg$ de pintura.

46. Dado un triángulo de lados 3,9; 2,7 y 4 m, calcula las medidas que tendrá un triángulo a escala $2:15$.

La razón de semejanza es $r = \dfrac{2}{15}$.

Las medidas serán: $3,9 \cdot \dfrac{2}{15} = 0,52\,m$; $2,7 \cdot \dfrac{2}{15} = 0,36\,m$ y $4 \cdot \dfrac{2}{15} = 0,5\widehat{3}\,m$

47. Rocío tiene una parcela rectangular cuya diagonal mide 40 m y 8 m más de largo que de ancho. ¿Cuántos metros cuadrados mide la parcela?



Llamando x al ancho de la parcela, el largo mide $x+8$ y ambos son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la diagonal. Aplicando el Teorema de Pitágoras:

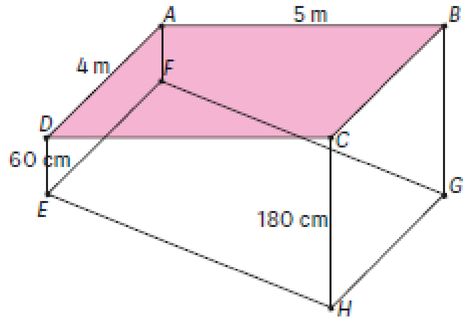
$$x^2 + (x+8)^2 = 40^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 16x + 64 = 1600$$

$$2x^2 + 16x - 1536 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1536}}{4} = \frac{-16 \pm 112}{4} = \begin{cases} x_1 = 24 \\ \cancel{x_2 = -32} \end{cases}$$

La altura mide 24 cm y la base 32 cm y por tanto el área es: $A = 32 \cdot 24 = 768\,m^2$

48. Una piscina de 4 m de ancho y 5 m de largo tiene una profundidad de 60 cm en el punto que menos cubre y de 180 cm en el que más. ¿Cuántos litros de agua caben en la piscina?



Se trata de un prisma de base trapezoidal y altura 4 m. Para calcular la altura a de la base, trazamos una perpendicular a CH desde D formando un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 m y de cateto $180 - 60 = 120\,cm$. Por tanto:

$$h = \sqrt{5^2 - 1,2^2} \approx 4,85\,m.$$

El volumen del prisma es:

$$V = A_{base} \cdot h = \frac{(1,8 + 0,6) \cdot 4,85}{2} \cdot 4 \approx 23,3\,m^3.$$

DESAFÍO PISA- PÁG. 113

DE REFORMAS EN EL PISO

Los padres de Antonio van a realizar una reforma en su vivienda y para hacer un presupuesto aproximado han recopilado los datos que a continuación se muestran.
Para las medidas de las habitaciones, han utilizado los planos de la vivienda y han recogido en la siguiente tabla los datos obtenidos del plano sabiendo que está a escala 3 : 85.

	Cocina	Baño 1	Baño 2	Dormitorio 1	Dormitorio 2	Salón
Largo (mm)	137	88	120	145	155	185
Ancho (mm)	96	91	110	156	160	195

Después han estado viendo los precios para alicatar los baños y la cocina, además de pintar el piso. En las siguientes tablas han recogido los precios por metro cuadrado de cada producto:

	Cocina	Baño 1	Baño 2
Azulejo 1	21,20 €	24,10 €	19,80 €
Azulejo 2	12,50 €	18,30 €	25,20 €
Suelo 1	19,20 €	41,20 €	32,10 €
Suelo 2	23,40 €	38,20 €	28,60 €

	Pintura 1	Pintura 2
Blanco	2,35 €	3,20 €
Color	2,70 €	3,70 €

A todo esto tienen que añadir la mano de obra por alicatar y poner suelo, que tiene de precio 12 €/m2. Cuando se realiza un presupuesto para alicatar o pintar una vivienda, no se descuentan la superficie de puertas y ventanas, sino que se considera que todas las habitaciones están cerradas por completo. Además, la altura media de una habitación es de 2,35 metros.

ACTIVIDAD 1. Pintar de blanco con la pintura 1 el dormitorio 2 cuesta:

A: 98 €. El perímetro de la habitación es: $P = 630\,mm = 630 : \frac{3}{85} = 17,85\,m$, lo que multiplicado por la altura da un área para pintar de $A = 41,95\,m^2$. Multiplicando por el precio de la pintura elegida se obtiene que el coste es de $C = 98\,€$

ACTIVIDAD 2. El baño 1 completo, pintando el techo de blanco, alicatando el baño y cambiando el suelo, cuesta como mucho:

C: 1223 €. El techo mide $A_T = \left(88 : \frac{3}{85}\right) \cdot \left(91 : \frac{3}{85}\right) = 6,43\,m^2$, por lo que pintarlo de blanco, con la pintura más cara, costará: $C_T = 6,43 \cdot 3,20 = 20,57\,€$.

Las paredes del baño 1 tienen un área total de: $A_P = \left[2 \cdot (88 + 91) : \frac{3}{85}\right] \cdot 2,35 = 23,84\,m^2$. Para calcular el coste de alicatar hay que tener en cuenta el coste del azulejo 1 más el de la mano de obra: por lo que alicatarlas con el azulejo 1 costará $C_P = 23,84 \cdot (24,10 + 12) = 860,51\,€$

El suelo tiene un área igual al techo. Poniendo el suelo 1 y sumando la mano de obra, el coste es: $C_S = 6,43 \cdot (41,20 + 12) = 342\,€$.

El coste total es: $C = C_T + C_P + C_S = 1223,09\,€$

ACTIVIDAD 3. Alicatar la cocina con los azulejos más baratos costaría:

A: 760 €. La cocina tiene un área de $A = \left[2 \cdot (137 + 96) : \frac{3}{85}\right] \cdot 2,35 = 31,03\,m^2$, que, multiplicado por el coste del azulejo más baratos y el precio de la mano de obra, da un coste de $C = 31,03 \cdot (12,50 + 12) = 760,18\,€$

ACTIVIDAD 4. Pintar el salón y el dormitorio 1 de color y el techo blanco costará, como mínimo:

B: 356 €. Las paredes del salón tienen un área de $A_S = \left[2\cdot(185+195):\frac{3}{85}\right]\cdot 2,35 = 50,6\,m^2$ y las del dormitorio $A_D = \left[2\cdot(145+156):\frac{3}{85}\right]\cdot 2,35 = 40,08\,m^2$ por lo que pintarlas de color con la pintura más barata costará $C_P = (A_S + A_D)\cdot 2,70 = 244,85\,€$. Los techos del salón y del dormitorio tienen, por otra parte, áreas de $A_{T_S} = 28,96\,m^2$ y $A_{T_D} = 18,16\,m^2$ respectivamente, por lo que pintarlos de blanco costará: $C_T = \left(A_{T_S} + A_{T_D}\right)\cdot 2,35 = 110,73\,€$ para un coste total de $C = C_P + C_T = 355,58\,€$.

ACTIVIDAD 5. Si en colocar 2 m² de suelo se tarda al menos 1 hora y 10 minutos trabajando 8 h/día, el tiempo que se empleará en poner el suelo de todo el piso será de:

B: 7 días. Las dimensiones reales, en metros, de la casa son:

	Cocina	Baño1	Baño2	Dorm 1	Dorm 2	Salón	**Total**
Largo	3,88	2,49	3,40	4,11	4,39	5,24	
Ancho	2,72	2,58	3,12	4,42	4,53	5,53	
Área Suelo	10,56	6,43	10,60	18,16	19,91	28,96	**94,61**

Por tanto, en cambiar todo el suelo se tardarán $t = \frac{94,61}{2}\cdot\frac{7}{6} = 55,19\,h$ y por tanto el número de días es $55,2:8 = 6,9$.

ACTIVIDAD 6. Se ha producido un error y la escala es de 1:30. El tiempo empleado en poner todo el suelo será:

C: 8 días. En este caso las medidas reales de la casa son:

	Cocina	Baño1	Baño2	Dorm 1	Dorm 2	Salón	**Total**
Largo	4,11	2,64	3,60	4,35	4,65	5,55	
Ancho	2,88	2,73	3,30	4,68	4,80	5,85	
Área Suelo	11,84	7,21	11,88	20,36	22,32	32,47	**106,07**

Por tanto, en cambiar todo el suelo se tardarán $t = \frac{106,07}{2}\cdot\frac{7}{6} = 61,9\,h$ y por tanto el número de días es $61,9:8 = 7,7$.