1 Números reales

Números racionales

Los *números naturales* han sido utilizados por todas las civilizaciones desde la más remota antigüedad.

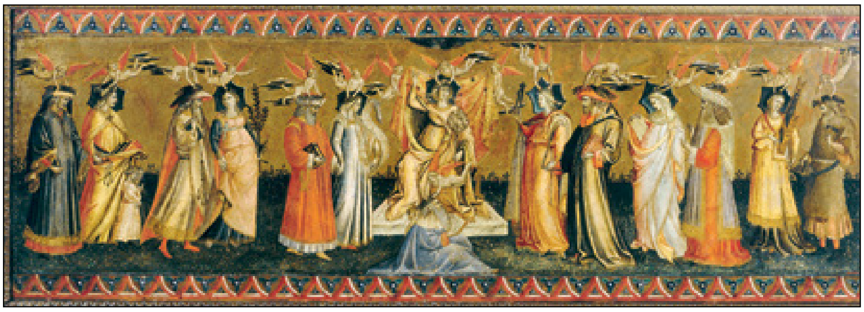
El papel de los negativos, y, sobre todo, del cero, resultó más difícil de concebir. Por ello, los *números enteros* no acabaron de tomar forma hasta finales del siglo VII, en la India. De allí nos llegaron por medio de los árabes en el siglo IX, junto con el sistema de numeración decimal-posicional.

Las *fracciones* se empezaron a utilizar desde muy antiguo, pero su uso al estilo actual se acabó de consolidar hacia el siglo XIV.

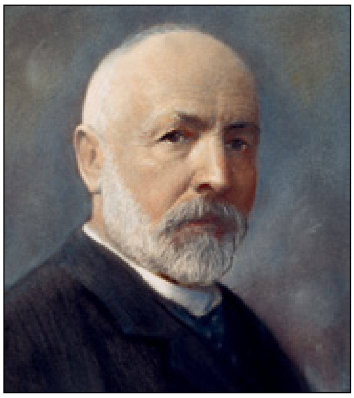
Antiguo observatorio astronómico en Ujjain (India). En esta ciudad vivió Brahmagupta (598-670), matemático y astrónomo indio que sistematizó por primera vez el cálculo con números negativos y el cero.

Los irracionales

Los números *irracionales* fueron descubiertos por los pitagóricos aproximadamente en el siglo V antes de nuestra era. Sin embargo, más que como números fueron tomados como magnitudes geométricas. Esta forma de tratarlos se extendió durante casi dos milenios.



"Las Siete Artes Liberales", Giovanni da Ponte. La segunda pareja empezando por la derecha representa a la Aritmética, portando una tabla de cálculo, junto con Pitágoras.



El conjunto de los números reales

Es muy reciente, pues, la idea de que todos estos números forman parte de un único conjunto con estructura y características muy interesantes. El concepto de *número real*, como ahora lo manejamos, se fue concibiendo y construyendo al evolucionar el estudio de las funciones. Su formalización definitiva se debe al alemán **Cantor** (1871).

Georg Cantor (1845-1918), matemático alemán considerado el padre de la teoría de conjuntos.

6

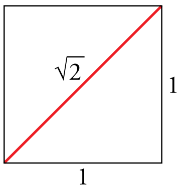
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Números irracionales

Números racionales son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es exacta o periódica.

Números irracionales son los no racionales, es decir, los que no pueden obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica. Por ejemplo, $\pi = 3{,}14159265359\ldots$

Hay infinitos números irracionales, algunos de los cuales son especialmente interesantes. Veamos algunos.



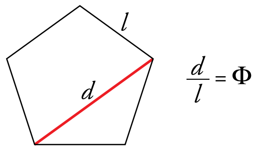
El valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es irracional.

Irracionales expresados mediante radicales

Si p no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{p}$ es irracional.

Y, en general, si p no es una potencia n-ésima exacta, $\sqrt[n]{p}$ es un número irracional. Por ejemplo, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ y $\sqrt[5]{10}$ son números irracionales.

El número de oro: $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$



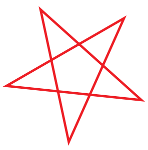
La diagonal de un pentágono de lado unidad es el número $\left(\sqrt{5}+1\right) : 2$ que, evidentemente, es irracional. Además, es, históricamente, el primer número del que se tuvo conciencia de que lo era.

En el siglo v a. C., los griegos pitagóricos descubrieron con sorpresa (y casi con espanto) que la diagonal del pentágono y su lado no guardaban una proporción exacta. Hasta entonces se creía que todo el universo se regía por los números naturales y las proporciones entre ellos (fracciones), pero al descubrir que no era así les pareció que el caos se asomaba a su mundo. Por eso, llamaron irracional (contraria a la razón) a esta relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Más adelante, los artistas griegos consideraron que la proporción $\Phi : 1$ resultaba especialmente armoniosa, por lo que la llamaron **proporción áurea,** y a Φ, **número áureo.**

El nombre, Φ (fi, letra F en griego), es la inicial de **Fidias,** escultor griego del siglo v a. C. que utilizó reiteradamente esta proporción.

Estrella pitagórica



Esta figura, formada con las cinco diagonales de un pentágono regular, era el símbolo de los pitagóricos.

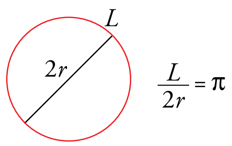
El número π

Como sabes, π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Este número lo conoces y lo utilizas desde hace muchos años.

Has utilizado para él las siguientes aproximaciones: 3,14, redondeando por defecto, o 3,1416, redondeando por exceso. Si le preguntas su valor a una calculadora (π suele compartir tecla con EXP), te dará muchas cifras: $\boxed{3.14159265359}$

Se trata de un número irracional y, por tanto, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

π es la letra griega correspondiente a la “P”. ¿Por qué este nombre? La palabra griega *perifereia* significa circunferencia (la periferia del círculo).



Observa

A diferencia de $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, Φ, y otros números irracionales, el número π no se puede representar de forma exacta sobre la recta real.

En la web

Curiosidades sobre el número π y otros irracionales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Números reales: la recta real

Ejercítate

1. a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2. a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:

$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama **conjunto de números reales** y se designa por $\mathbb{R}$.

Es decir, tanto los **racionales** como los **irracionales** son números **reales.** Y estos son todos. Con el conjunto $\mathbb{R}$ podemos completar la tabla de conjuntos numéricos:

- REALES $\mathbb{R}$
  - RACIONALES $\mathbb{Q}$
    - ENTEROS $\mathbb{Z}$
      - NATURALES $\mathbb{N}$ → $0,\ 4,\ \frac{24}{6},\ \sqrt{121}$
      - ENTEROS NEGATIVOS → $-11,\ -\frac{27}{3},\ \sqrt[3]{-8}$
    - FRACCIONARIOS → $5{,}84;\ \frac{1}{2};\ 5{,}\widehat{83};\ -\frac{3}{10}$
  - IRRACIONALES → $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \Phi,\ \pi,\ -\sqrt{5}+2,\ \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que se hacen con los racionales: suma, resta, multiplicación y división (salvo por el cero) y se mantienen las mismas propiedades. También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

La recta real

Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, *a cada punto de la recta le corresponde un número real.* Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real.**

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ \frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi-1$

NATURALES, $\mathbb{N}$	$24;\ 28/7 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$24;\ -5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
FRACCIONARIOS	$0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ 3/5$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ 3/5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
IRRACIONALES	$\sqrt{7};\ \pi-1$

Piensa y practica

1. Sitúa cada uno de los siguientes números en una tabla como la del ejercicio resuelto anterior. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (HAZLO EN TU CUADERNO).

$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi-3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

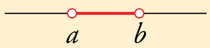
3 Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas

En el mundo científico, con frecuencia es necesario precisar el ámbito de validez de una cierta variable. Por ejemplo, "el periodo de tiempo comprendido entre 3 s y 11 s". Para ello, hemos de aprender a designar algunos tramos de la recta real con una nomenclatura adecuada.

Intervalo abierto

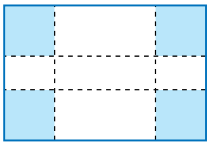
El **intervalo abierto** (a, b) es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, sin incluir ni a ni b: $\{x /\ a < x < b\}$.

Se representa así:



Por ejemplo, el intervalo $(-2, 1)$ está formado por los números reales comprendidos entre -2 y 1, sin incluir ni -2 ni 1: $\{x /\ -2 < x < 1\}$.

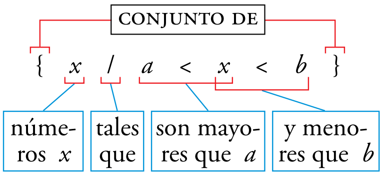
Otro ejemplo: para construir una caja con una cartulina de 10 cm × 15 cm, hemos de cortar de sus esquinas cuatro cuadrados iguales y, después, plegar. El lado de los cuadrados debe ser, pues, menor que 5 cm $\rightarrow$ $(0, 5)$.



Intervalo abierto

$(a, b) = \{x /\ a < x < b\}$

La expresión anterior se lee así:



Intervalo cerrado

El **intervalo cerrado** $[a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, ambos incluidos: $\{x /\ a \le x \le b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $[-2, 1]$ está formado por los números reales comprendidos entre -2 y 1, incluyendo el -2 y el 1: $\{x /\ -2 \le x \le 1\}$.

Otro ejemplo: solo admitimos paquetes que pesen 2 kg o más, pero que no superen los 5 kg $\rightarrow$ $[2, 5]$.

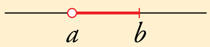
Intervalo cerrado

$[a, b] = \{x /\ a \le x \le b\}$

Intervalo semiabierto

- El **intervalo** $(a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo b pero no a: $\{x /\ a < x \le b\}$.

  Se representa así:



- El **intervalo** $[a, b)$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo a pero no b: $\{x /\ a \le x < b\}$.

  Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $(3, 4]$ está formado por los números reales comprendidos entre 3 y 4, incluyendo el 4 pero no el 3: $\{x /\ 3 < x \le 4\}$.

Otro ejemplo: en esta guardería se admiten niños que hayan cumplido 1 año pero que aún no tengan 4 años $\rightarrow$ $[1, 4)$.

Intervalo semiabierto

$(a, b] = \{x /\ a < x \le b\}$

$[a, b) = \{x /\ a \le x < b\}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

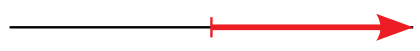
Semirrectas

$(-\infty, a) = \{x \,/\; x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \,/\; x \le a\}$

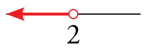
$(a, +\infty) = \{x \,/\; x > a\}$

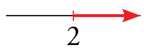
$[a, +\infty) = \{x \,/\; x \ge a\}$



Semirrectas y recta real

$(-\infty, a)$	son los números menores que a: $\{x \,/\; x < a\}$.
$(-\infty, a]$	son los números menores que a y el propio a: $\{x \,/\; x \le a\}$.
$(a, +\infty)$	son los números mayores que a: $\{x \,/\; x > a\}$.
$[a, +\infty)$	son los números mayores que a y el propio a: $\{x \,/\; x \ge a\}$.

- $(-\infty, 2)$ es el conjunto $\{x \,/\; x < 2\}$ $\rightarrow$ 

- $[2, +\infty)$ es el conjunto $\{x \,/\; x \ge 2\}$ $\rightarrow$ 

- Para votar, hay que tener 18 años cumplidos $\rightarrow$ $[18, +\infty)$. Naturalmente el $+\infty$, en este contexto real, hay que relativizarlo.

La propia recta real se representa en forma de intervalo así: **$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.**

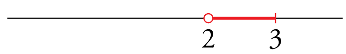
Ejercicios resueltos

1. ***Escribir en forma de intervalo y representar:***

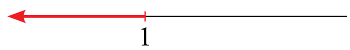
a) $2 < x \le 3$ ***b)*** $x \le 1$

c) $x > 0$

a) Intervalo semiabierto $(2, 3]$



b) Semirrecta $(-\infty, 1]$



c) Semirrecta $(0, +\infty)$

2. ***Escribir en forma de desigualdad y representar:***

a) $[-2, 0]$ ***b)*** $[-1, +\infty)$

c) $(0, 1)$

a) $\{x \,/\, -2 \le x \le 0\}$

b) $\{x \,/\, x \ge -1\}$

c) $\{x \,/\, 0 < x < 1\}$

3. ***¿Para qué valores de x son válidas las expresiones siguientes?***

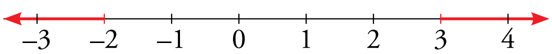
a) $\sqrt{x-3}$

b) $\sqrt{(x+2)(x-3)}$

a) $\sqrt{x-3}$ puede efectuarse siempre que x valga 3 o más: semirrecta $[3, +\infty)$.

b) La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es cero o positivo. Y esto ocurre cuando uno de los factores es cero, ambos son negativos o ambos son positivos. Es decir, si $x \le -2$ o si $x \ge 3$.

$(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$



Piensa y practica

En la web: Practica la representación de intervalos en la recta real.

1. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que –5.

2. Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x \,/\; 3 \le x < 5\}$ b) $\{x \,/\; x \ge 0\}$

c) $\{x \,/\; -3 < x < 1\}$ d) $\{x \,/\; x < 8\}$

3. Escribe en forma de desigualdad y representa:

a) $(-1, 4]$ b) $[0, 6]$ c) $(-\infty, -4)$ d) $[9, +\infty)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Raíces y radicales

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

Se llama **raíz n-ésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical;** a, **radicando,** y n, **índice** de la raíz.

Cuando manejes expresiones como esta, habrá ocasiones en las que debas calcular el valor numérico. Para ello, deberás tener en cuenta la definición, como en las que se proponen en este margen, o bien recurrir a la calculadora. Pero en otros casos deberás mantener el radical, simplificarlo, operar con otros radicales, etcétera.

Algunas peculiaridades de las raíces

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, solo existen sus raíces de índice impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, cuando escribimos $\sqrt{4}$ nos referimos a la positiva: $\sqrt{4} = 2$.

  En general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Atención

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Forma exponencial de los radicales

Los radicales se pueden expresar como potencias:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ pues } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ pues } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt[6]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2 = (3^{3/6})^2 = 3^{6/6} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

En la web

Actividades para recordar las propiedades de las potencias.

Piensa y practica

1. Expresa en forma exponencial cada una de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{x}$ b) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$

c) $\sqrt[15]{a^6}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

2. Calcula.

a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$ f) $36^{3/2}$

3. Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$ b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$ d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3}$ f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Operaciones con radicales

Los radicales tienen una serie de propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura. Las iremos enumerando en el margen de esta página. Todas ellas son consecuencias inmediatas de conocidas propiedades de las potencias.

Y prestaremos especial atención a las operaciones que con ellas se propician.

Propiedad 1

$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, pues:

$\sqrt[np]{a^p} = a^{p/np} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Propiedad 2

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, pues:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} =$

$= a^{1/n} \cdot b^{1/n} =$

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Propiedad 3

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, pues:

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Propiedad 4

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$, pues:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = (a^{1/n})^p = a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$

Propiedad 5

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, pues:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/m \cdot n} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Expresando los radicales en forma de potencia, vemos que, a veces, se pueden simplificar. Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Hemos aplicado la propiedad 1 (ver margen).

EXTRACCIÓN DE FACTORES FUERA DE UNA RAÍZ

Para simplificar algunos radicales, y para sumarlos y restarlos, a veces será necesario sacar factores fuera de una raíz. Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Hemos aplicado la propiedad 2 (ver margen).

PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO ÍNDICE

Por ejemplo:

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{15 \cdot 20} = \sqrt{300}$$

Hemos aplicado la propiedad 2 (ver margen).

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{15}{20}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Hemos aplicado la propiedad 3 (ver margen).

POTENCIA DE UN RADICAL

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \sqrt{2^{12}} = 2^{12/2} = 2^6 = 64$$

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

Hemos aplicado la propiedad 4 (ver margen).

RAÍZ DE UN RADICAL

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

Hemos aplicado la propiedad 5 (ver margen).

12

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Recuerda

Solo se pueden sumar los radicales idénticos.

En la web

• Empareja expresiones con radicales y potencias.
• Suma y resta de radicales.

En la web

Actividades para reforzar tus conocimientos sobre radicales.

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Únicamente pueden sumarse radicales idénticos. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ \sqrt{7}-\sqrt[3]{7}\end{array}\right\}$$ Solo pueden realizarse de forma aproximada, o bien hay que dejarlas indicadas.

Sí puede simplificarse la expresión siguiente:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

Hay casos en los que la posibilidad de simplificar una suma de radicales queda oculta. Previamente, deberemos sacar los factores que podamos fuera de las raíces, o simplificarlas. Por ejemplo:

$$\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{50}=\sqrt{2^5}+\sqrt{3^2\cdot 2}-\sqrt{5^2\cdot 2}=$$
$$=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{8}+\sqrt[4]{4}=\sqrt{2^3}+\sqrt[4]{2^2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

Eliminación de un radical del denominador

Observa

Se multiplica el denominador por el radical necesario para que desaparezca la raíz:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2;\ \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}=7$$

Lógicamente, el numerador se multiplica por la misma expresión.

Es costumbre en los resultados matemáticos en los que intervienen radicales evitar que estos estén en el denominador. Veamos unos casos en los que esto se consigue de forma sencilla.

En cada caso, nos haremos esta pregunta: *¿por qué expresión he de multiplicar el denominador para que el producto no tenga radicales?* Una vez encontrada la expresión, también multiplicaremos por ella el numerador para que el resultado final no varíe.

1.er CASO: RAÍCES CUADRADAS. Por ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.º CASO: OTRAS RAÍCES. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}=\frac{1\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}}=\frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{\sqrt[5]{7^3}}{7} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{7}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Piensa y practica

1. Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$
d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2. Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 b^5 c}}{\sqrt{ab^3 c^3}}$
d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ e) $\left(\sqrt{x}\right)^3\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)$ f) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^8$

3. Reduce.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

4. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3 b^5 c}$ c) $\sqrt[3]{64}$

5. Efectúa.

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$

6. Suprime el radical del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$
d) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

En la web Practica el producto y el cociente de expresiones con $a+b\sqrt{c}$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Números aproximados. Errores

Observa

a) 34 m tiene 2 cifras significativas.

b) 0,0863 hm^3 tiene 3 cifras significativas.

c) 53 000 *l* es posible que solo tenga 2 cifras significativas si los ceros del final solo han servido para designar el número. En tal caso, lo mejor sería poner 53 miles de litros.

Observa

a) $\begin{cases} \text{Medición: } 34 \text{ m} \\ \text{Error absoluto} < 0,5 \text{ m} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Medición: } 0,0863 \text{ hm}^3 \\ \text{Error abs.} < 0,00005 \text{ hm}^3 \\ \text{Es decir, error abs.} < 50 \text{ m}^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Medición: } 53 \text{ miles de } l \\ \text{Error absoluto} < 500\ l \end{cases}$

Observa

Los errores relativos de las mediciones anteriores son:

a) $\text{E.r.} < \dfrac{0,5}{34} < 0,015 = 1,5\,\%$

b) $\text{E.r.} < \dfrac{0,00005}{0,0863} < 0,0006 = 0,06\,\%$

c) $\text{E.r.} < \dfrac{500}{53\,000} < 0,0095 < 0,01 = 1\,\%$

Aproximación y errores

En las aplicaciones prácticas se suelen manejar números aproximados. Recordemos algunos conceptos y procedimientos con los que se controla su uso.

Se llaman **cifras significativas** las que se usan para expresar un número aproximado. Solo se deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste y de modo que sean relevantes para lo que se desea transmitir.

Por ejemplo, si al medir la capacidad de una piscina se obtiene 718 900 *l*, sería más razonable decir que tiene 719 m^3, utilizando solo 3 cifras significativas. Pero si la medición no fue muy fina, lo propio sería decir 720 m^3 o, mejor, 72 decenas de m^3.

Error absoluto de una medida aproximada es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

$$\text{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|$$

El valor exacto, generalmente, es desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo: **el error absoluto es menor que…** Una cota del error absoluto se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.

En el ejemplo anterior (capacidad de la piscina: 719 m^3), la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto *es menor que medio metro cúbico* (error < 0,5 m^3).

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real. Es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan. El error relativo también se suele expresar en tantos por ciento (%).

En el ejemplo, el error relativo es menor que $\dfrac{0,5}{719} < 0,0007 = 0,07\,\%$

Ejercicios resueltos

1. ***Expresar con un número razonable de cifras significativas las siguientes cantidades:***

a) Visitantes en un año a una pinacoteca: 183 594.

b) Asistentes a una manifestación: 234 590.

c) Número de bacterias en 1 dm^3 de cierto preparado: 302 593 847.

a) Puede ser razonable que esta cantidad se dé con tanta precisión, pues los asistentes a un museo pagan una entrada que, lógicamente, se contabiliza. Suponemos que ese número, 183 594, es el de entradas vendidas.

No obstante, para cierto tipo de comunicaciones podría simplificarse la cifra: “casi doscientos mil”, “más de ciento ochenta mil” son valoraciones adecuadas.

b) Es imposible que nadie haya contado los manifestantes con tanta precisión. Aunque la cifra no esté “hinchada” o “achicada” por razones sectarias, no se puede afinar tanto en estas valoraciones. Razonable sería decir, por ejemplo, “más de doscientos mil”, o bien “entre 200 000 y 250 000”.

c) Una o, como mucho, dos cifras significativas es lo que este tipo de cantidades permite afinar: 3 cientos de millones de bacterias o 30 decenas de millones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2. ***Dar una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido en cada una de las valoraciones que se han dado en las cantidades del ejercicio anterior.***

a) Si decimos que el número de visitantes es 180 mil (o mejor, 18 decenas de miles) cometemos un error absoluto de 183 594 – 180 000 = 3 594 personas. Lo sabemos con precisión porque conocemos la cantidad exacta. Sin embargo, quien reciba la información (18 decenas de miles) deberá entender que puede haber un error de hasta 5 unidades de la primera cifra no utilizada: 5 000 personas. Resumiendo:

Valoración: 180 mil

Error absoluto < 5 000

Error relativo $< \dfrac{5\,000}{180\,000} < 0{,}028 < 0{,}03 \rightarrow$ E.r. $< 0{,}03 = 3\,\%$

b) Valoración: 200 000

Error absoluto < 50 000

Error relativo $< \dfrac{50\,000}{200\,000} = 0{,}25 = 25\,\%$

c) Valoración: 3 cientos de millones = 300 millones

Error absoluto < 0,5 decenas de millones = 5 millones

Error relativo $< \dfrac{5}{300} < 0{,}017 < 0{,}02 \rightarrow$ E.r. $< 0{,}02 = 2\,\%$

Números en notación científica

Los números $3{,}845 \cdot 10^{15}$ y $9{,}8 \cdot 10^{-11}$ están en notación científica porque:

— Están descritos mediante dos factores: un número decimal y una potencia de 10.

— El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.

— La potencia de 10 es de exponente entero.

El primero, $3{,}845 \cdot 10^{15}$ = 3 845 000 000 000 000, es un número “grande”.

El segundo, $9{,}8 \cdot 10^{-11}$ = 0,000000000098, es un número “pequeño”.

Esta forma de expresión resulta muy cómoda para tratar con cantidades aproximadas muy grandes o muy pequeñas, pues:

- De un solo golpe de vista se aprecia el “tamaño” del número. Se ve en el segundo factor y lo da el exponente del 10.
- Se constata la precisión con la que se da la cantidad. Depende del número de cifras significativas del primer factor.

Por ejemplo, apreciamos que $7{,}6 \cdot 10^8$ y $7{,}603 \cdot 10^8$ son aproximadamente iguales (“tamaños muy parecidos”) pero la segunda está dada con más precisión.

Ejercítate

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 340 000 b) 0,00000319

c) $25 \cdot 10^6$ d) $0{,}04 \cdot 10^9$

e) $480 \cdot 10^{-8}$ f) $0{,}05 \cdot 10^{-8}$

Otro ejemplo

$7{,}6 \cdot 10^8$ y $7{,}60 \cdot 10^8$, aparentemente iguales, no lo son, pues la segunda es más precisa y está dada con una cifra significativa más.

Piensa y practica

1. Efectúa. Después, repasa con la calculadora:

a) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-6})$

b) $(2{,}52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6})$

c) $7{,}92 \cdot 10^6 + 3{,}58 \cdot 10^7$

d) $6{,}43 \cdot 10^{10} + 8{,}113 \cdot 10^{12} - 8 \cdot 10^{11}$

2. La distancia de la Tierra al Sol es 149 000 000 km.

a) Exprésala en notación científica.

b) Exprésala en cm con dos cifras significativas.

c) Exprésala en cm con cuatro cifras significativas.

d) Acota los errores absoluto y relativo en los tres casos anteriores.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Números racionales e irracionales

1. a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos enteros?

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2. a) Clasifica en racionales o irracionales.

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

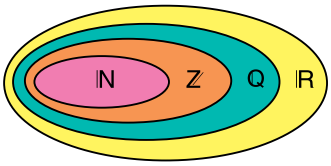
c) ¿Cuáles son números reales?

3. Sitúa los siguientes números en un diagrama como el adjunto:

$1;\ 7{,}\widehat{23};\ 1-\sqrt{2};$

$3{,}5;\ \frac{11}{9};\ \sqrt{\frac{1}{4}};$

$\sqrt{6};\ \frac{\pi}{4};\ -104$



Intervalos y semirrectas

4. Escribe los siguientes conjuntos de números en forma de intervalo o semirrecta:

a) Mayores que 2 y menores que 7.

b) Comprendidos entre –1 y 3, ambos incluidos.

c) Mayores o iguales que 5.

d) Menores que 10.

5. Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:

$A = [-2, 4]$ $\quad B = (1, 6)$ $\quad C = [-7, -3)$

$D = (0, 5]$ $\quad E = (-\infty, 1]$ $\quad F = (-1, +\infty)$

6. Representa gráficamente y expresa como intervalo o semirrecta estas desigualdades:

a) $-3 \le x \le 2$ $\quad$ b) $5 < x$ $\quad$ c) $x \ge -2$

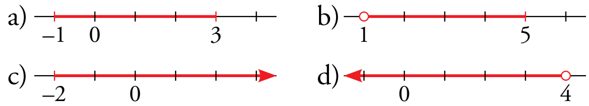
d) $-2 \le x < 3/2$ $\quad$ e) $4 < x < 4{,}1$ $\quad$ f) $-3 \le x$

7. Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:

a) $(1;\ 2{,}5)$ $\quad$ b) $[-2, 3]$ $\quad$ c) $[-7, 0)$

d) $[-3, +\infty)$ $\quad$ e) $(2, +\infty)$ $\quad$ f) $(-5, 2]$

8. Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:



9. a) Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:

$$-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ -4;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$$

b) ¿Cuál de estos intervalos representa a los números incluidos en A y en B?

$(-3, 5)$ $\quad [2, 7)$ $\quad [5, 7]$ $\quad (5, 7)$

Potencias y raíces

10. Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x^2}$ $\quad$ b) $\sqrt{2}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{10^6}$ $\quad$ d) $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ $\quad$ f) $\sqrt[4]{a}$ $\quad$ g) $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ $\quad$ h) $\sqrt[15]{a^5}$

11. Pon en forma de raíz.

a) $5^{1/2}$ $\quad$ b) $(-3)^{2/3}$ $\quad$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ $\quad$ e) $(a^{1/2})^{1/3}$ $\quad$ f) $(a^{-1})^{3/5}$

12. Resuelve, sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{343}$ $\quad$ c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0{,}25}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{8^4}$ $\quad$ f) $\sqrt[3]{0{,}001}$

13. Obtén con la calculadora.

a) $\sqrt[3]{-127}$ $\quad$ b) $\sqrt[5]{0{,}2^{-3}}$ $\quad$ c) $\sqrt[4]{1{,}5^3}$

d) $12^{-2/3}$ $\quad$ e) $\sqrt[6]{3^{-5}}$ $\quad$ f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$

14. Calcula.

a) $25^{1/2}$ $\quad$ b) $27^{1/3}$ $\quad$ c) $125^{2/3}$ $\quad$ d) $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ $\quad$ f) $16^{5/4}$ $\quad$ g) $49^{3/2}$ $\quad$ h) $8^{5/3}$

15. Expresa los radicales como potencias de exponente fraccionario y efectúa como en el ejemplo resuelto:

- $\mathbf{\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{2} = 2^{3/4} : 2^{1/3} = 2^{3/4 - 1/3} = 2^{5/12}}$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ $\quad$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{9}$ $\quad$ c) $3\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[4]{5}$ $\quad$ e) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$ $\quad$ f) $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Radicales

16. Simplifica.

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ e) $\sqrt[6]{125}$ f) $\sqrt[5]{3^{15}}$

17. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[10]{a^8}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2\,b^2}$ e) $\sqrt[3]{a^6\,b^6}$ f) $\sqrt[6]{a^2\,b^4}$

18. Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

19. Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}$ d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}$

20. Divide y simplifica.

a) $\sqrt{7}:\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}:\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}}:\sqrt[3]{\dfrac{45}{4}}$

21. Reduce a un solo radical.

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

22. Calcula y simplifica si es posible.

a) $(\sqrt{2})^{10}$ b) $(\sqrt[3]{2})^4$ c) $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ f) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

23. **Ejercicio resuelto**

Expresa como un solo radical:

$$\sqrt{63}-5\sqrt{28}+\sqrt{112}$$

Descomponemos en factores cada radicando:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{63}=\sqrt{3^2\cdot 7}=3\sqrt{7}\\ \sqrt{28}=\sqrt{2^2\cdot 7}=2\sqrt{7}\\ \sqrt{112}=\sqrt{2^4\cdot 7}=4\sqrt{7}\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}3\sqrt{7}-5\cdot 2\sqrt{7}+4\sqrt{7}=\\ =3\sqrt{7}-10\sqrt{7}+4\sqrt{7}=\\ =-3\sqrt{7}\end{array}$$

24. Efectúa.

a) $2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-7\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}$

c) $\sqrt{32}+3\sqrt{50}-2\sqrt{8}$ d) $3\sqrt{2}+\sqrt{18}-3\sqrt{8}$

25. Efectúa.

a) $\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28}-\sqrt{7}+\sqrt{63}$ d) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}$

26. Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ e) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

27. Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

Números aproximados. Notación científica

28. Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de estas aproximaciones sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:

a) 128 mil euros b) 25 millones de euros

c) 648 500 € d) 3 200 €

29. Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

30. Escribe en notación científica.

a) 752 000 000 b) 0,0000512

c) 0,000007 d) 15 000 000 000

31. Expresa en notación científica.

a) $32\cdot 10^5$ b) $75\cdot 10^{-4}$ c) $843\cdot 10^7$

d) $458\cdot 10^{-7}$ e) $0{,}03\cdot 10^6$ f) $0{,}0025\cdot 10^{-5}$

32. Calcula mentalmente.

a) $(1{,}5\cdot 10^7)\cdot(2\cdot 10^5)$ b) $(3\cdot 10^6):(2\cdot 10^{11})$

c) $(4\cdot 10^{-7}):(2\cdot 10^{-12})$ d) $\sqrt{4\cdot 10^8}$

33. Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3{,}5\cdot 10^7)\cdot(4\cdot 10^8)$ b) $(5\cdot 10^{-8})\cdot(2{,}5\cdot 10^5)$

c) $(1{,}2\cdot 10^7):(5\cdot 10^{-6})$ d) $(6\cdot 10^{-7})^2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Aplica lo aprendido

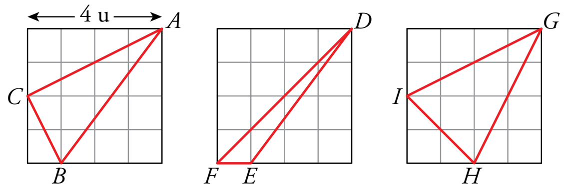
34. El volumen de un cilindro de 5 cm de altura es $60\,\pi$ cm^3.

a) ¿Cuánto mide su radio?

b) Calcula su área lateral. Da en ambos casos el valor exacto (utiliza radicales y π).

35. Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 de generatriz. Da el valor exacto.

36. Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.



37. Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.

38. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ b) $\sqrt[3]{k} = -2$ c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{3}{2}$

d) $\sqrt[k]{-125} = -5$ e) $\sqrt[3]{k} = -1$ f) $\sqrt[k]{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{7}{8}$

39. Da una cota del error absoluto de estas aproximaciones y compara sus errores relativos:

a) $8 \cdot 10^5$ b) $5{,}23 \cdot 10^6$ c) $1{,}372 \cdot 10^7$

d) $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ e) $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ f) $4 \cdot 10^{-5}$

40. El presupuesto destinado a infraestructuras para cierta región es de 3 430 millones de euros.

a) Expresa la cantidad en notación científica.

b) Da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido al tomar dos cifras significativas.

41. El consumo de agua en España es, aproximadamente, de 142 litros por habitante y día.

¿Cuál es el consumo anual, en metros cúbicos, de toda la población? Da el resultado en notación científica con una cota del error absoluto y otra del error relativo.

42. Durante los años de la crisis financiera, una vivienda, que costaba 250 000 € en 2008, se fue devaluando un 4 % anual durante 5 años. A partir de 2013 subió un 3,5 % hasta que se vendió 2 años después.

a) ¿Cuál fue el precio de venta? Exprésalo en miles de euros y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido.

b) ¿Cuál fue el índice de variación? Di si corresponde a un aumento o a una disminución.

Autoevaluación

1. Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y reales:

$$7{,}53;\ \sqrt{64};\ \frac{\sqrt{7}}{2};\ -5;\ \frac{\pi}{4};\ 3{,}2\widehat{3};\ \frac{7}{11}$$

2. a) Escribe como intervalo y representa $-3 < x \le 5$.

b) Escribe como desigualdad y representa $(-\infty, 8]$.

c) Escribe en forma de intervalo y representa "los números mayores que –1".

d) Expresa como una desigualdad el conjunto de números representado:

3. Simplifica y, si es posible, extrae factores:

a) $\sqrt[3]{2^{15}}$ b) $\sqrt[n]{6^{10}}$ c) $\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{18}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

4. Halla el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 7$ b) $\sqrt[k]{-125} = -5$ c) $\sqrt[3]{2^{15}} = k$

5. Opera:

a) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$

6. Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{7}}$

7. Expresa en notación científica y, con ayuda de la calculadora, opera. Escribe el resultado con tres cifras significativas.

$$\frac{1500000 \cdot 25 \cdot 10^{17}}{0{,}00007 \cdot (2000)^4}$$

Después, da una cota del error absoluto y otra del error relativo del valor aproximado obtenido.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....