4 Funciones. Características

Evolución del concepto de función

El concepto de función ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo. ¿Qué requisitos se le ha ido exigiendo a dicho concepto?

— Una función relaciona dos variables.

— Las funciones describen fenómenos naturales. (“Las leyes de la naturaleza son relaciones de dependencia entre *dos cantidades*”).

— Las relaciones funcionales pueden ser descritas mediante fórmulas (relaciones algebraicas).

— Las funciones pueden ser representadas gráficamente.

Sello de la antigua URSS conmemorando el 400.º aniversario del nacimiento de Galileo (1564-1642).

Aportaciones de grandes matemáticos

Galileo (finales del siglo XVI) utiliza por primera vez la experimentación cuantitativa (diseña, experimenta, mide, anota) para establecer relaciones numéricas que describan fenómenos naturales.

Descartes (siglo XVII), con su algebrización de la geometría, propicia que las funciones puedan ser representadas gráficamente.

Leibniz, en 1673, utiliza por primera vez la palabra *función* para designar estas relaciones.

Euler, entre 1748 y 1755, fue perfilando el concepto, al que dio precisión y generalidad, admitiendo, finalmente, que una relación entre dos variables puede ser función aunque no haya una expresión analítica que la describa. El propio Euler fue quien aportó la nomenclatura $f(x)$.

Monumento en honor del matemático y filósofo alemán Leibniz (1646-1716), en el campus de la Universidad de Leipzig.

Academia de Ciencias de San Petersburgo, Rusia, en cuya revista de investigación, “Commentarii”, Euler introdujo por primera vez la notación $f(x)$, en un artículo publicado en 1736.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Conceptos básicos

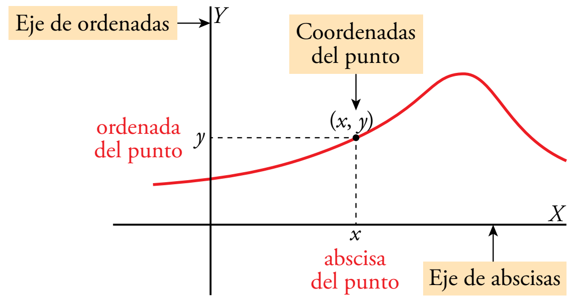
Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se las llama x e y:

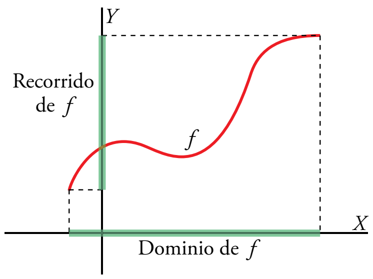
x es la **variable independiente.** y es la **variable dependiente.**

La relación entre las variables mediante la función f asocia a cada valor de x **un único** valor de y. Se expresa así:

$$y = f(x)$$

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica.





Se llama **dominio de definición** de una función, f, y se designa por *Dom f*, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales hay un x tal que $f(x) = y$.

Ejercicio resuelto

Explicar por qué es función la siguiente relación:

Se deja caer una bola y se mide la altura a la que se encuentra en distintos instantes.

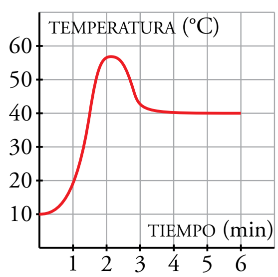
Se ligan dos variables: el *tiempo*, t, medido en segundos, y el *espacio recorrido*, e, medido en metros.

La primera es la variable independiente. La segunda es la variable dependiente.

En cada instante, la bola se encuentra a una cierta altura. Es decir, para cada valor de t hay un único valor de e. Por tanto, e es una función que depende de t: $e = f(t)$.

Piensa y practica

1. Esta gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que se mantiene un rato abierto.

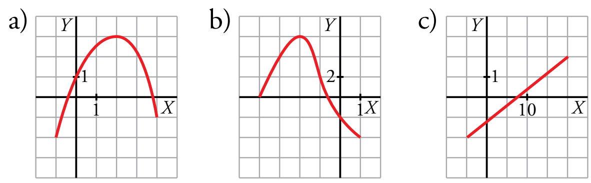


a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

2. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones:



3. Representa una función cuyos dominio y recorrido sean, respectivamente, $[-2, 5]$ y $[2, 7]$. Inventa otra con dominio $[0, 5]$ y recorrido $\{1\}$.

En la web Modelización del llenado de recipientes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Cómo se presentan las funciones

Tanto en el estudio de las matemáticas como en otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su **gráfica,** por una **tabla de valores,** por una **fórmula** o mediante una descripción verbal (**enunciado**).

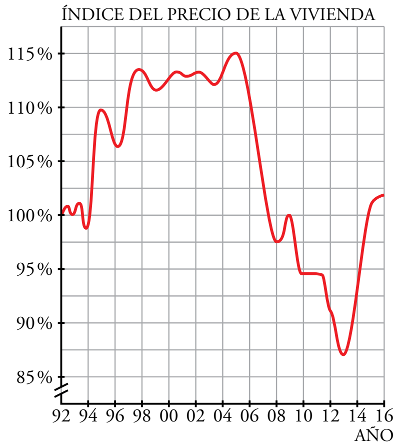
Observa

La gráfica de una función permite apreciar su comportamiento global con un simple golpe de vista.

Mediante su gráfica

La función de la derecha viene dada por su gráfica. Describe el precio de la vivienda en los últimos años en una cierta región.

Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su representación gráfica. Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.



Mediante un enunciado

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada. Veamos dos ejemplos de funciones que relacionan la *altura sobre el nivel del mar* con el *tiempo transcurrido*:

- Félix salió por la mañana de su casa de campo, siguió un camino que llevaba a la cima de una montaña, comió arriba y volvió justo antes de anochecer.
- María salió de su casa, en la playa, a las 9 a.m. Caminó 45 min hasta la cima de una colina que está a 250 m de altura sobre el nivel del mar, se quedó 10 min contemplando las vistas y tardó 30 min en volver a casa.

En la web

"Dos caminantes": lectura de gráficas.

Piensa y practica

1. Vamos a analizar la gráfica de arriba correspondiente al precio de la vivienda:

a) ¿Qué quiere decir que la gráfica arranque en el 100 %? ¿Te parece razonable?

b) El máximo fue del 115 %. ¿En qué momento ocurrió? Contesta aproximadamente.

c) ¿Cuál fue el mínimo? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿Cuál fue el índice del precio en el 2006?

2. Fíjate en las funciones *altura sobre el nivel del mar - tiempo transcurrido* que se han descrito más arriba referentes a las excursiones realizadas por Félix y María.

a) Representa la gráfica correspondiente a Félix.

b) Representa la gráfica correspondiente a María.

c) Si compararas las dos gráficas anteriores con las de tus compañeros, ¿cuáles serían más parecidas, las de Félix o las de María? Explica por qué.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Mediante una tabla de valores

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Ejemplo

Pedro quiere hacer 45 fotocopias; Ana, 64, y Ariadna, 110.

- Pedro debe pagar:
  $45 \cdot 0{,}10 = 4{,}50$ €
- Ana: $64 \cdot 0{,}09 = 5{,}76$ €
- Ariadna: $110 \cdot 0{,}08 = 8{,}80$ €

Ejemplo 1

La siguiente tabla muestra las ofertas que ofrece una reprografía para distintas cantidades de fotocopias.

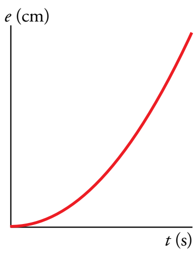
FOTOCOPIAS AUTOMÁTICAS FORMATO DIN A-4	PRECIO POR UNIDAD (€)
De 1 a 49 fotocopias	0,10 €
De 50 a 99 fotocopias	0,09 €
De 100 a 199 fotocopias	0,08 €
200 o más fotocopias	0,07 €

Así, si quieres hacer 49 fotocopias te costará $49 \cdot 0{,}10 = 4{,}90$ €; sin embargo, si haces 52 fotocopias, te saldrá más barato: $52 \cdot 0{,}09 = 4{,}68$ €. Es curioso, ¿no?

Mediante su expresión analítica o fórmula

La **expresión analítica** es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero para visualizarla se requiere un minucioso estudio posterior. Veamos algunos ejemplos:

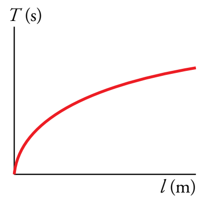
Ejemplo 2



Una bola que se deja caer por un plano levemente inclinado lleva una aceleración de 20 cm/s^2.

La distancia, e, en centímetros, que recorre en función del tiempo, t, en segundos, viene dada por la fórmula $e = 10t^2$.

Ejemplo 3



El periodo, T, de un cierto péndulo viene dado en función de su longitud, l (en m), por la fórmula $T = \sqrt{4l}$.

El periodo es el tiempo, en segundos, que tarda en dar una oscilación, ida y vuelta.

Ejercicio resuelto

En el EJEMPLO 1:

a) Como mínimo, ¿cuántas fotocopias pedirás para que te salga más caro que hacer 49?

b) Quieres hacer 187 copias. ¿Cuántas copias debes pedir para pagar lo menos posible?

a) Hacer 49 fotocopias cuesta 4,90 €. Con esa cantidad, y a un precio de 0,09 € por unidad, se pueden hacer $4{,}90 : 0{,}09 = 54{,}44$.

Es decir, hay que hacer 55 fotocopias o más para que salga más caro que hacer 49.

b) Por 187 fotocopias deberías pagar $187 \cdot 0{,}08 = 14{,}96$ €. Si pides 200 (pasas al rango de 0,07 € por unidad), el precio es $200 \cdot 0{,}07 = 14$ €. Por tanto, conviene pedir 200 copias.

Piensa y practica

3. En el EJEMPLO 1, ¿cuántas fotocopias debes pedir como mínimo para que te salga más caro que hacer 199?

4. En el EJEMPLO 2, calcula la distancia que recorre la bola en 1 s, 2 s y 3 s. ¿Cuánto tarda en recorrer 2 m?

5. En el EJEMPLO 3:

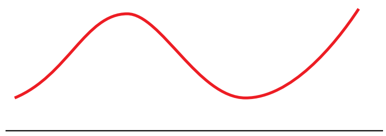
a) Calcula el periodo de un péndulo de 1 m de largo.

b) ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo periodo es de 6 segundos?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

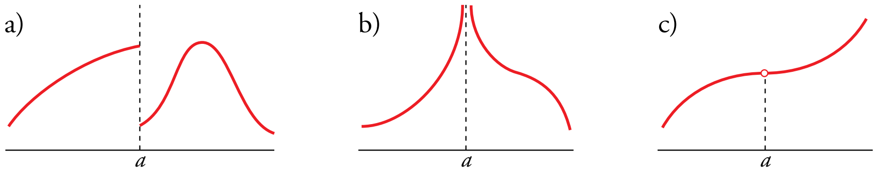
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Funciones continuas. Discontinuidades



FUNCIÓN CONTINUA

La función del margen es continua en todo su dominio de definición. Sin embargo, las tres funciones siguientes son discontinuas:



¿Por qué son discontinuas?

a) Presenta un salto en el punto de abscisa a.

b) Tiene ramas infinitas en el punto a. Es decir, los valores de la función crecen indefinidamente cuando la x se aproxima a a.

c) Le falta un punto. Es decir, no está definida en $x = a$.

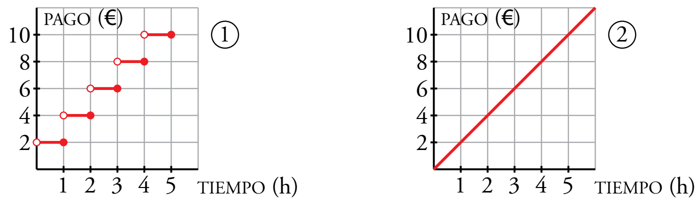
> Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo.
>
> Una función es **continua en un intervalo** $[a, b]$ si no presenta ninguna discontinuidad en él.

Ten en cuenta

El intervalo en el cual se define una función continua puede ser cerrado, abierto o semiabierto.

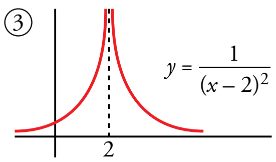
Ejemplos

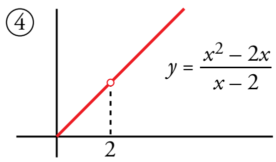
Hay muchos aparcamientos que siguen cobrando "por horas". Esto quiere decir que solo por entrar ya se paga 1 h. Si se está 1 h y 10 min se pagan 2 h. La primera de las dos gráficas siguientes describe esta forma de pago. Es una función con varios puntos de discontinuidad por saltos.



Los usuarios prefieren que las tarifas se rijan por la función cuya gráfica es la ②. Evidentemente, es continua. Las siguientes presentan ejemplos de discontinuidad:

Esta, porque tiene ramas infinitas. Y esta, porque le falta un punto.





Observación importante

En una función continua, a "pequeñas" variaciones de la x corresponden variaciones también "pequeñas" de la y. Mientras que en los puntos de discontinuidad (con salto) una pequeña variación de la x (un minuto más en el aparcamiento) puede producir una variación grande (2 €) en la y.

Observa

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x$$

Es decir, $y = x$ si $x \neq 2$, porque no podemos dividir por cero. Por eso dejamos un hueco en ese punto.

Piensa y practica

1. Construye una función similar a la ①, pero para el caso de que se pague 1 € cada media hora. ¿Cuál de las opciones de pago te parece más justa?

2. Analiza la función ③ para valores "próximos a 2". Comprueba que cuando x vale 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la y toma valores "muy grandes".

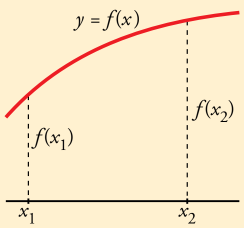
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Crecimiento, máximos y mínimos

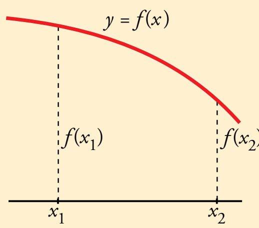
La función f es **creciente** en este intervalo porque:

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$

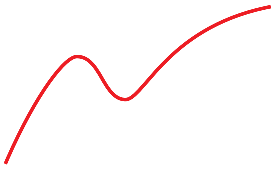


Análogamente, la función f es **decreciente** en este intervalo porque:

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$



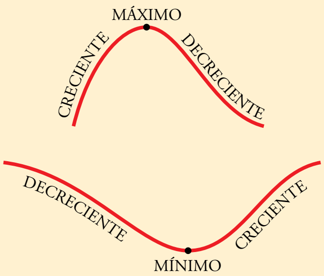
Una función puede ser creciente en unos intervalos y decreciente en otros.



La función puede tomar en otros puntos valores mayores que un máximo relativo y menores que un mínimo relativo.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

Análogamente, si f tiene un **mínimo relativo** en un punto, es decreciente antes del punto y creciente a partir de él.



Ejercicio resuelto

Indicar los intervalos en los que es creciente y en los que es decreciente la función de la derecha dada gráficamente.

¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

La función está definida en el intervalo [–7, 11].

Es creciente en los intervalos [–7, –3] y [1, 11].

Es decreciente en el intervalo [–3, 1].

Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa –3. Su valor es 2.

Tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa 1. Su valor es –5.

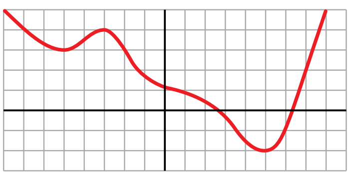
Hay puntos en los que la función toma valores menores que en el mínimo relativo. Por ejemplo, para $x = -7$, la función toma el valor –6.

Piensa y practica

1. Observa la función de la derecha y responde:

a) ¿En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente?

b) ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

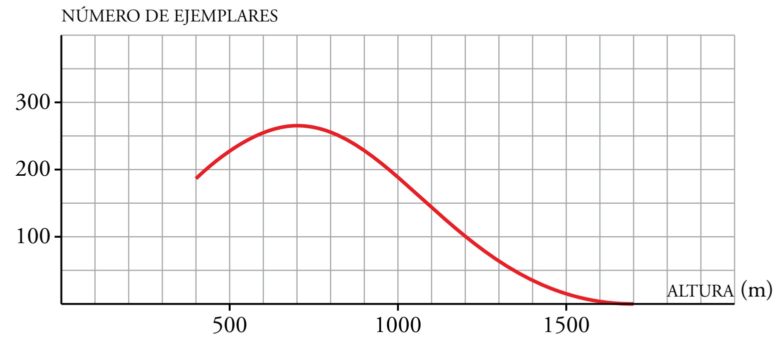


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

5 Tendencia y periodicidad

La siguiente gráfica muestra la *cantidad media de ejemplares por hectárea* que hay de una cierta especie de planta a distintas alturas:



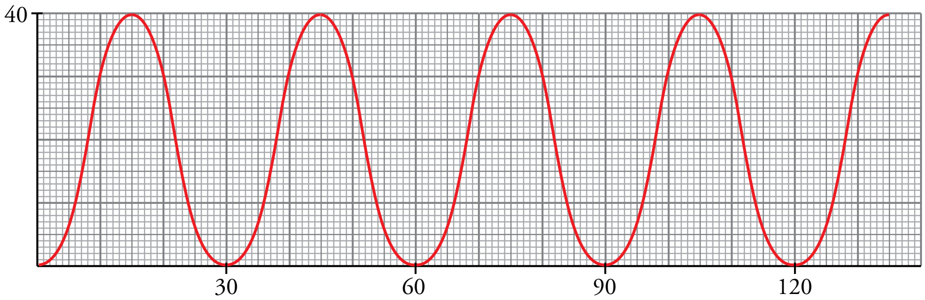
Observamos que, a partir de una cierta altura, cuanto más se sube menos ejemplares se encuentran. Y que, a partir de 1600 m, casi no hay plantas de este tipo. Podemos afirmar que:

> *Cuando la altura aumenta por encima de los 1600 m, el número de plantas tiende a cero.*

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportan lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Periodicidad

Observamos la variación de la altura de un cestillo de una noria cuando esta da una vuelta. Tarda medio minuto (30 segundos), y en ese tiempo sube, llega al punto más alto, baja y llega al suelo. Pero este movimiento se repite una y otra vez. Su representación gráfica es esta:

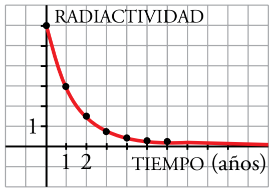


En esta función, lo que ocurre en el intervalo [0, 30] se repite reiteradamente. Se trata de una *función periódica* de *periodo* 30.

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo.**

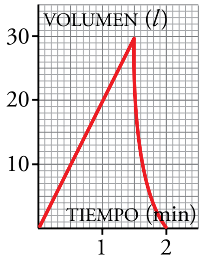
Entrénate

1. La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.



¿A cuánto tiende la radiactividad con el paso del tiempo?

2. La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.



a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min II) 40 min 30 s

III) 1 h 9 min 30 s

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

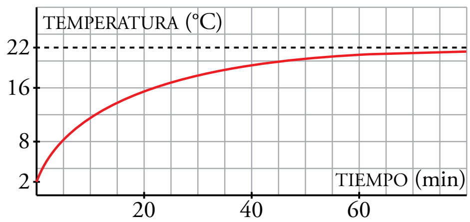
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1. Hemos sacado de la nevera un vaso con agua. Esta gráfica muestra la temperatura del agua (en grados centígrados) al pasar el tiempo:

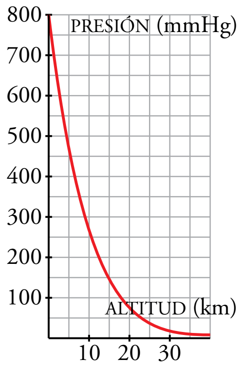


a) ¿Qué temperatura hay dentro de la nevera? ¿Y fuera?

b) Sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C. Dibuja una gráfica que muestre la temperatura del agua al pasar el tiempo.

2. La presión atmosférica a nivel del mar es, por término medio, de 760 mm de mercurio (mmHg).

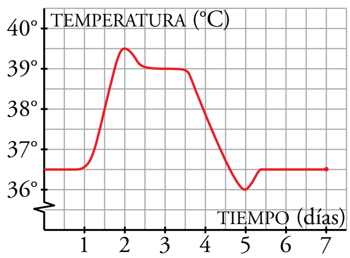
En la gráfica se aprecia cómo varía al aumentar la altura.



a) ¿A cuánto tiende la presión cuando la altura aumenta?

b) ¿Qué presión sufre el exterior de un avión que vuela a 10 km de altura?

3. Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo? ¿Qué temperaturas alcanza?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

Enunciados, fórmulas y tablas

4. Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en $[-2, 3]$. Para ello, completa en tu cuaderno:

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

¿Cuál es el recorrido de la función?

5. Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido cada 5 min las distancias recorridas y ha obtenido estos datos:

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) En unos mismo ejes, dibuja la gráfica *distancia-tiempo* de los tres nadadores. Descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento?

c) Calcula la velocidad media de cada uno.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada función?

6. La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él y, además, decrece cada vez más despacio.

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

b) ¿Cuál es la tendencia?

7. Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor a un ritmo de un 20 % anual, aproximadamente.

a) Haz una tabla de valores que dé el valor, en años sucesivos, de un coche que costó 12 000 €.

b) Represente gráficamente la función *años transcurridos-valor del coche.*

c) Encuentra una fórmula que permita hallar el precio del coche en función de los años transcurridos.

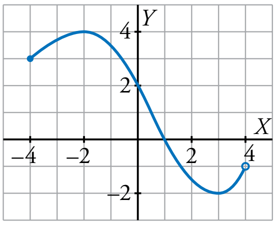
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Características de una función

8. Observa la gráfica de la función y responde:



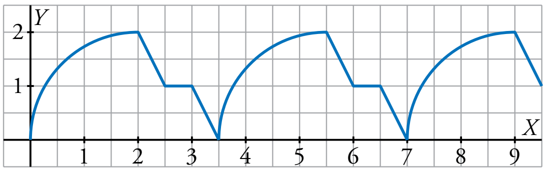
a) ¿Cuáles son su dominio de definición y su recorrido?

b) ¿Tiene máximo y mínimo relativos? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

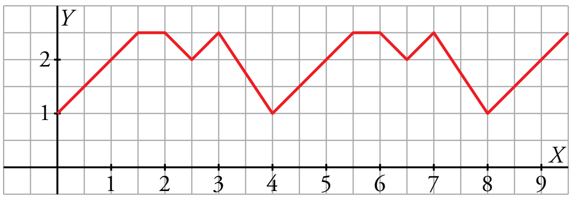
c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿En qué intervalos es la función creciente y en cuáles es decreciente?

9. Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.

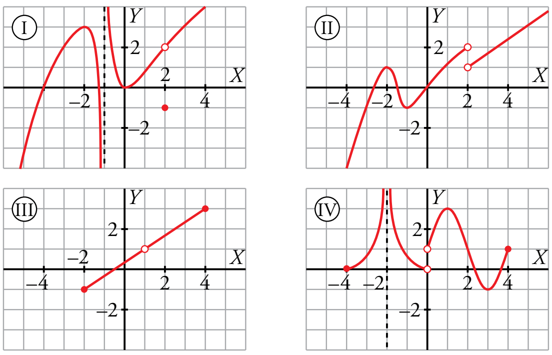


10. Explica por qué es periódica esta función:



Da su periodo y los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

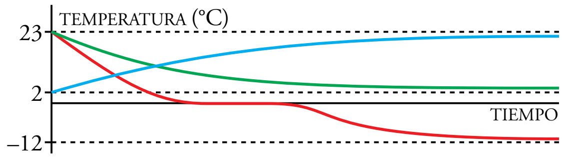
11. Observa estas gráficas discontinuas y contesta:



¿Cuáles son los puntos de discontinuidad? Explica la razón de discontinuidad en cada punto.

Resuelve problemas

12. Observa las siguientes gráficas de funciones:



a) Relaciona cada curva con estos enunciados sobre la temperatura de un vaso de agua:

I. Cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Cuando se saca de la nevera y se deja en la mesa.

III. Cuando pasa de la mesa al congelador.

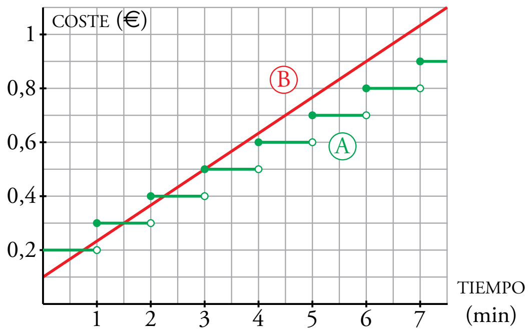
b) ¿A qué temperatura está la casa? ¿Y el congelador? ¿Y la nevera?

13. Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 h siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 h.

a) Representa la curva de glucemia en el tramo desde que ingiere la glucosa hasta que vuelve a su nivel normal.

b) Indica en qué momentos alcanza su máximo y en cuáles su mínimo.

14. Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:



a) Determina cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías.

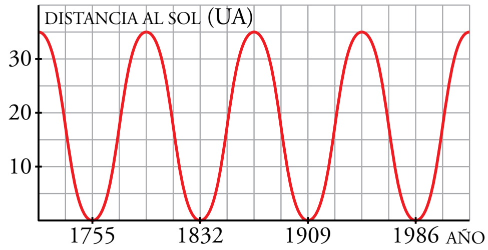
b) ¿Y una llamada de media hora?

c) Razona por qué elegirías una u otra compañía.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

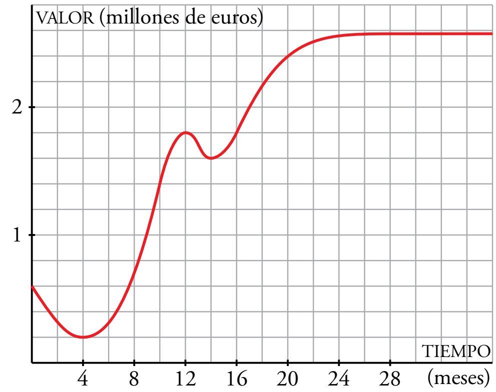
15. La órbita del cometa Halley es una elipse muy excéntrica, uno de cuyos focos es el Sol. Esta función relaciona la distancia del cometa al Sol con el tiempo:



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol?

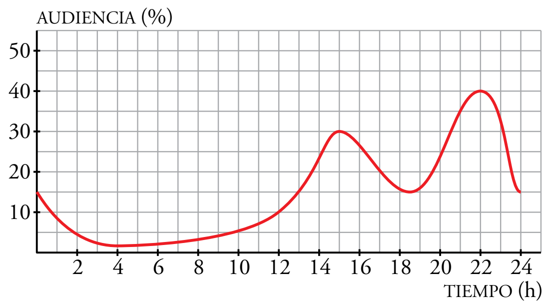
16. La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que se fundó.



Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.

Autoevaluación

1. Esta curva muestra la audiencia de televisión en un día de diario.



a) Descríbela, teniendo en cuenta los momentos más significativos.

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

c) Dibuja en tu cuaderno la curva que crees que puede corresponder a un domingo.

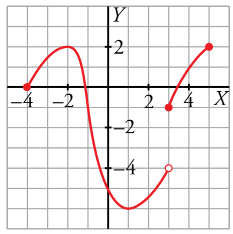
d) Dibuja en tu cuaderno la curva del 31 de diciembre.

2. Representa la función $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, definida en $[0, 5]$, dándole a x valores enteros.

Supón que y es el valor en bolsa, en millones de euros, de una empresa que acaba de cambiar de dirección, y que x es el número de meses transcurridos desde que cambió de dirección.

Describe su evolución en estos cinco meses, señalando crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

3. Observa la gráfica y halla:



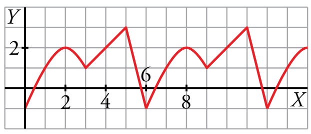
a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

4. a) ¿Es periódica esta función?



¿Cuál es su periodo?

b) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas:

$$x = 2;\ \ x = 4;\ \ x = 40;\ \ x = 42$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.