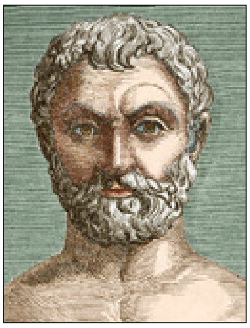
6 Semejanza. Aplicaciones

Un importante personaje

El estudio teórico de la semejanza se suele basar en el teorema de Tales. Recordemos quién fue este personaje.

Tales nació en Mileto (actualmente, en la costa occidental de Turquía), aproximadamente, en el año 640 a. C. Murió con más de 90 años.



Tales de Mileto, el primero de "los siete sabios de Grecia".

Yacimiento arqueológico de Mileto, actual Turquía.

Visitó Egipto y, posiblemente, Babilonia, y aprendió la ciencia práctica acumulada durante siglos por estas civilizaciones. Aportó estos conocimientos, seguramente muy elaborados, al mundo griego.

Fue el primero que exigió que las afirmaciones matemáticas y de otras ciencias fueran avaladas por razonamientos bien fundamentados. Por eso, se le considera el fundador de la ciencia griega.

¿Es de Tales el "teorema de Tales"?

Muy admirado en su época y en siglos posteriores, se le dio el rango del primero de "los siete sabios de Grecia". Esta gran admiración de la que fue objeto hizo que se le mitificara y se le atribuyeran méritos que realmente no eran suyos. Por ejemplo, la predicción de un eclipse. Y la paternidad del teorema que lleva su nombre.

Parece cierto que en Egipto midió la altura de una pirámide comparando su sombra con la que arrojaba, en el mismo instante, una vara vertical. Pero esta aplicación práctica de la semejanza no significa que diera forma al enunciado del teorema, ni mucho menos que lo demostrara.

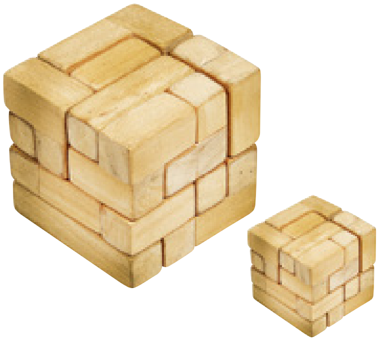
Ambos logros, junto con una adecuada fundamentación y el desarrollo teórico de la semejanza, hay que atribuírselos a **Euclides,** dos siglos y medio posterior.

Euclides demostró el teorema de Tales en el libro VI de "Los Elementos".

Se cuenta que Tales predijo el eclipse de Sol que en 585 a. C. puso fin a la batalla del río Halys, entre medos y lidios.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Semejanza



Dos figuras semejantes tienen la *misma forma*. ¿Cómo se manifiesta esto matemáticamente?

— Los ángulos correspondientes en figuras semejantes son iguales.

— Las longitudes de los segmentos correspondientes en figuras semejantes son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza.**

Figuras semejantes en la vida corriente

Estamos rodeados de reproducciones:

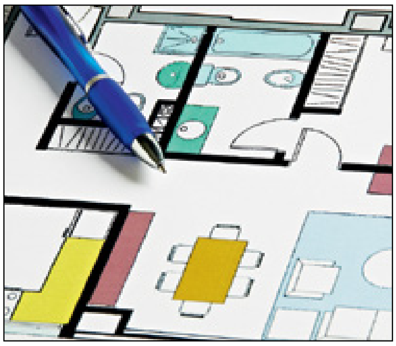
- Con las fotografías, los vídeos, las maquetas de monumentos, las copias de cuadros famosos… se pretende transmitir unas características que se conservan con la semejanza: la imagen, la forma, el color, la belleza del original.
- Con los planos de edificios o ciudades, los mapas… se pretende obtener con precisión medidas, distancias. Por ello, van acompañados de una *escala* con la que se pueden obtener magnitudes de la realidad midiendo sobre ellos.

Escalas

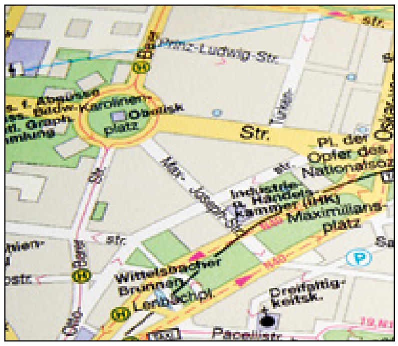
La escala utilizada para un mapa de la Península Ibérica que quepa en un folio es de alrededor de 1:10 000 000.
Para este margen, el mapa está a escala 1:20 000 000.

Escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es, por tanto, la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Por ejemplo, una escala 1:200 significa, como ya sabes, que 1 cm del plano corresponde a 200 cm = 2 m de la realidad.



El plano de una casa suele tener escalas alrededor de 1:100 o 1:200.



El mapa de una ciudad suele tener escalas alrededor de 1:20 000.

Maqueta de una célula eucariota animal. Escala 1 000:1

Escalas en objetos muy pequeños

Hemos visto cómo se utilizan las escalas para representar un objeto o una superficie a un tamaño menor. Pero, ¿qué escala debemos usar para representar un objeto minúsculo a mayor tamaño?

Por ejemplo, en biología se puede representar con una maqueta de 10 cm de diámetro una célula eucariota animal cuyo diámetro real es 10 μm = 0,01 mm. En estos casos, en lugar de expresar la escala con 1:0,001 ponemos 1 000:1. Quiere decir que 1 000 cm en la maqueta corresponden a 1 cm en la realidad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Relación entre las áreas y entre los volúmenes

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

En la web

Refuerza el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes en figuras semejantes.

Ejercicios resueltos

1. ***Gonzalo tiene una maqueta a escala 1:500. Ha tomado estas medidas sobre ella:***

CAMPO DE FÚTBOL: 30 cm de largo y 18 cm de ancho.

DEPÓSITO CILÍNDRICO: 6 cm de diámetro y 10 cm de altura.

Calcular:

a) La superficie del campo de fútbol en la realidad.

b) El volumen real del depósito.

Dimensiones reales:

CAMPO DE FÚTBOL: $\begin{cases} \text{Largo} = 30 \text{ cm} \cdot 500 = 15\,000 \text{ cm} = 150 \text{ m} \\ \text{Ancho} = 18 \text{ cm} \cdot 500 = 9\,000 \text{ cm} = 90 \text{ m} \end{cases}$

DEPÓSITO: $\begin{cases} \text{Radio} = 3 \text{ cm} \cdot 500 = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ \text{Altura} = 10 \text{ cm} \cdot 500 = 5\,000 \text{ cm} = 50 \text{ m} \end{cases}$

a) Superficie del campo de fútbol = $150 \text{ m} \times 90 \text{ m} = 13\,500 \text{ m}^2$

También se puede calcular a partir de su superficie en la maqueta:

$S_{\text{CF real}} = S_{\text{CF maqueta}} \cdot 500^2 = (30 \cdot 18) \text{ cm}^2 \cdot 500^2 = 135\,000\,000 \text{ cm}^2 = 13\,500 \text{ m}^2$

b) Volumen del depósito = $\pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 50 = 35\,343 \text{ m}^3$

También se puede calcular a partir de su volumen en la maqueta:

$V_{\text{depósito real}} = V_{\text{depósito maqueta}} \cdot 500^3 = (\pi \cdot 3^2 \cdot 10) \text{cm}^3 \cdot 500^3 =$

$= 283 \text{ cm}^3 \cdot 500^3 = 35\,375\,000\,000 \text{ cm}^3 = 35\,375 \text{ m}^3$

2. ***En la estación de Atocha de Madrid hay una escultura de Antonio López que muestra la cabeza de un recién nacido con un perímetro craneal de 7 m.***

El perímetro craneal de un bebé al nacer es de unos 35 cm. Calcular:

a) La escala a la que el escultor construyó la cabeza.

b) Si la escultura tiene un volumen de 5,8 m³, ¿cuál será el volumen de la cabeza de un bebé?

a) Para calcular la escala, nos basamos en las medidas relativas al perímetro craneal que proporciona el enunciado. Tendremos en cuenta, además, que las medidas se nos dan en diferentes unidades, metros y centímetros.

7 m = 700 cm de la escultura corresponden a 35 cm en la realidad:

$700 : 35 = 20$

La escala a la que está representada la escultura es 20:1.

Es decir, cada 20 cm de la escultura corresponden a 1 cm de la realidad.

b) Recuerda que cuando una maqueta tiene una escala $1:k$, para hallar el volumen del objeto real hay que multiplicar el de la maqueta por k^3.

En este caso, la escala es $k:1$, y por tanto, hay que dividir el volumen de la maqueta por k^3.

Teniendo en cuenta lo anterior, calculamos:

$$5{,}8 \text{ m}^3 : 20^3 = 5\,800\,000 \text{ cm}^3 : 8\,000 = 725 \text{ cm}^3$$

El volumen de la cabeza de un recién nacido es de unos 725 cm³.

Piensa y practica

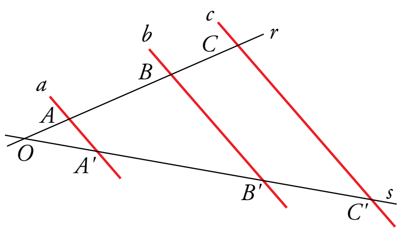
1. Para construir una carpa semiesférica para su maqueta, Gonzalo ha necesitado 402 cm² de tela. Sabiendo que tiene un diámetro de 16 cm, calcula la superficie y el volumen de la carpa en la realidad.

2. La Estatua de la Libertad de Nueva York mide 30,6 m de los pies a la cabeza. Si con ella se reprodujo a una persona cuya estatura era de 170 cm, ¿qué escala utilizaron para su construcción?

En la web Presentación y uso del pantógrafo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Semejanza de triángulos



Teorema de Tales

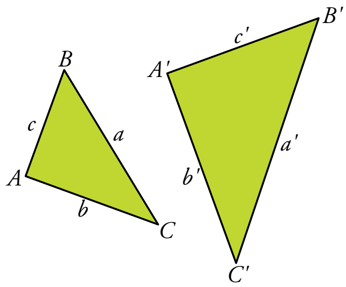
Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \qquad \text{Como consecuencia, se verifica:} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

También ocurre lo recíproco: si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ y las rectas a y b son paralelas, entonces la recta c es paralela a ellas.

El teorema de Tales sirve para estudiar la semejanza de triángulos.

Triángulos semejantes



Dos **triángulos semejantes** tienen:

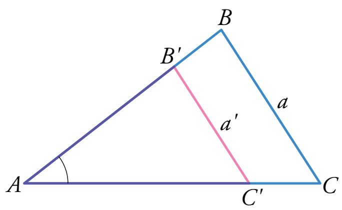
- Sus lados proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{razón de semejanza}$$

- Sus ángulos, respectivamente iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}', \; \hat{B} = \hat{B}', \; \hat{C} = \hat{C}'$$

Triángulos en posición de Tales



Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.

Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos.

Decimos que esos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

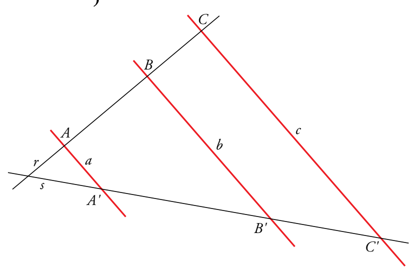
Piensa y practica

1. Las medidas de este dibujo son:

$\overline{AB} = 2{,}3$ cm

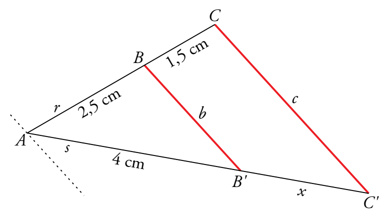
$\overline{BC} = 1{,}5$ cm

$\overline{B'C'} = 2{,}4$ cm



Aplica el teorema de Tales y calcula la longitud de $A'B'$.

2. Para aplicar el teorema de Tales, trazamos por A una recta paralela a b y a c:



Calcula x.

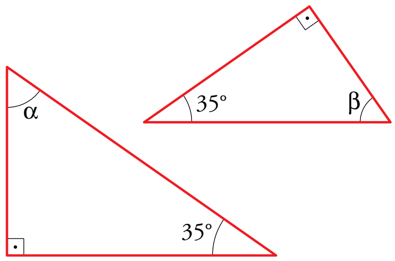
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 La semejanza en los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son particularmente importantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por eso les vamos a dedicar una atención especial. Empecemos por estudiar un criterio de semejanza muy fácil de aplicar.

Criterio de semejanza de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.



Esto es así, pues con ese ángulo y el ángulo recto ya son dos los ángulos iguales y, por tanto, también será igual el tercero.

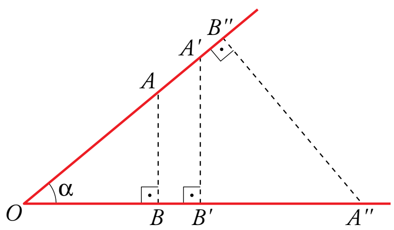
Por ejemplo, los dos triángulos del margen son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual. Podemos asegurar que son semejantes, ya que los otros ángulos, α y β, también son iguales. Lo comprobamos:

$$\left.\begin{array}{l} 90° + 35° + \alpha = 180° \\ 90° + 35° + \beta = 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \beta = 55°$$

Consecuencias del criterio de semejanza anterior

Del criterio anterior obtenemos dos consecuencias importantes:

Todos los triángulos obtenidos al trazar perpendiculares a alguno de los lados de un ángulo son semejantes.

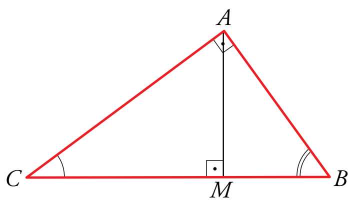


Todos esos triángulos (ABO, $A'B'O$, $A''B''O$) son semejantes por tener el ángulo α común.

Por tanto, sabemos, sin más comprobación (por el criterio anterior), que sus lados son proporcionales.

En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa determina dos triángulos semejantes al original.

En la siguiente figura encontramos tres triángulos rectángulos: ABC, AMB y AMC.



— ABC y AMB son semejantes por compartir el ángulo $\hat{B}$.

— ABC y AMC son semejantes por compartir el ángulo $\hat{C}$.

En la web

Resuelve problemas guiados en los que se aplica la semejanza de triángulos rectángulos.

Observa

Esta segunda propiedad de los triángulos rectángulos también es consecuencia de la primera.

ABC y AMB son semejantes porque son dos triángulos formados sobre el ángulo B al trazar dos perpendiculares a sus lados, AM y CA.

Lo mismo ocurre con ABC y AMC.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

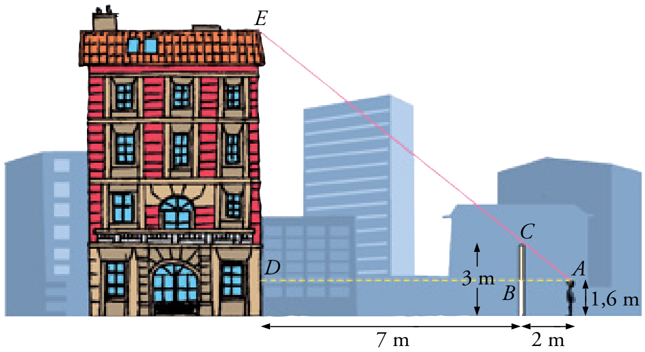
Veamos algunos ejemplos de aplicaciones del criterio de semejanza en triángulos rectángulos.

Problemas resueltos

1. ***Para medir la altura de un edificio, Miguel se sitúa de modo que ve alineados la parte alta de la verja y la del edificio. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.***

a) Explicar por qué los triángulos ABC y ADE son semejantes.

b) Calcular ED y la altura del edificio.

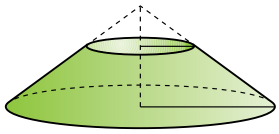


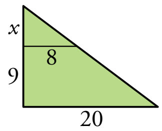
a) Los triángulos ABC y ADE son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

b) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \to \dfrac{\overline{ED}}{3-1{,}6} = \dfrac{2+7}{2} \to \overline{ED} = \dfrac{9 \cdot 1{,}4}{2} = 6{,}3$ m

La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

2. ***Hallar el volumen de un tronco de cono de 9 cm de altura sabiendo que los radios de sus bases miden 20 cm y 8 cm.***





Ampliamos el tronco hasta completar un cono. Llamamos x al incremento de la altura. Tenemos en cuenta la semejanza de los dos triángulos: el pequeño, de catetos 8 y x; y el grande, de catetos 20 y $x + 9$:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+9}{20} \to 20x = 8x + 72 \to 12x = 72 \to x = 6 \text{ cm}$$

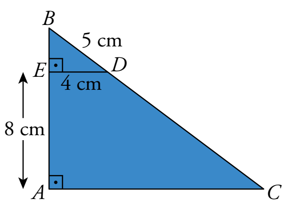
El volumen del tronco de cono es la diferencia de volúmenes de dos conos:

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot (9+6) - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi(6\,000 - 384) = 5\,881{,}06 \text{ cm}^3$$

Piensa y practica

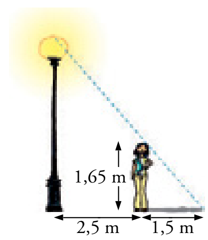
1. Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7,22 m en el momento en que un poste de 1,60 m da una sombra de 67 cm.

2. Halla los lados del triángulo ABC.



3. En el mismo instante y lugar de la actividad 1, ¿qué longitud tendrá la sombra de un edificio que mide 32 m de altura?

4. Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Razón de semejanza. Escalas

1. En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

2. Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

3. En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm^2. ¿Cuál es la superficie real del salón?

4. Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?

5. Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:

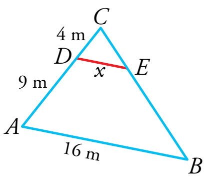
a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

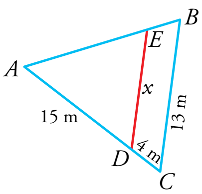
b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2.

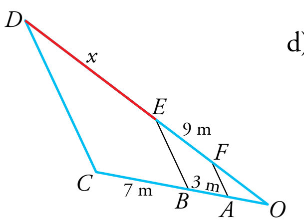
c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm^3 de agua.

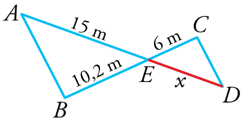
Semejanza de triángulos

6. Identifica triángulos en posición de Tales en cada figura y calcula, en cada caso, la longitud del segmento DE:

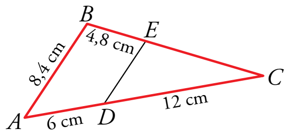
a)


b)


c)


d)


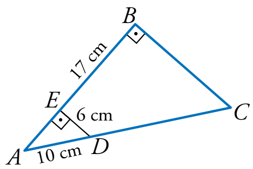
7. En la figura, el segmento DE es paralelo a AB.



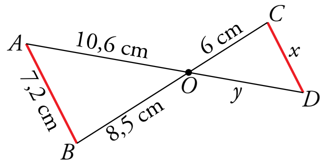
Justifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$.

8. ¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y AED?

Halla el perímetro del trapecio $EBCD$.



9. Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD.



a) Di por qué son semejantes los triángulos AOB y ODC.

b) Calcula x e y.

Aplica lo aprendido

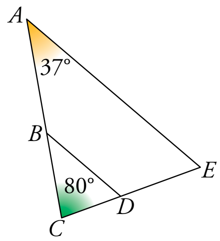
10. Dos depósitos cilíndricos semejantes tienen un volumen de 100 m^3 y 250 m^3, respectivamente. Si la altura del menor es 1,5 m, ¿cuánto mide el radio del mayor?

11. Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm y $\overline{BC}$ = 6,4 cm:

a) Calcula $\overline{CD}$.

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ sin medirlo directamente?

c) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



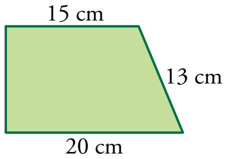
12. En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.

13. La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?

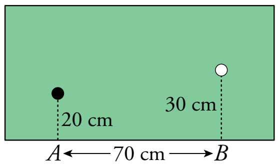
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

14. Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2, ¿cuál es el área del segundo?

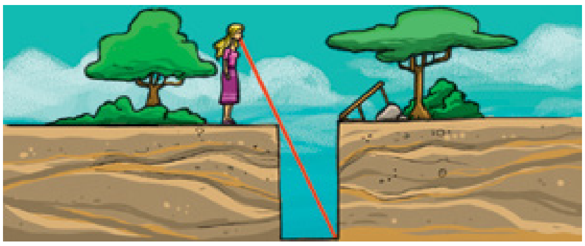
15. Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.



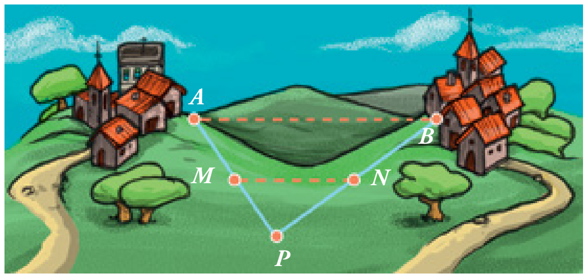
16. ¿En qué punto comprendido entre A y B debe dar la bola blanca para que al rebotar alcance a la bola negra?



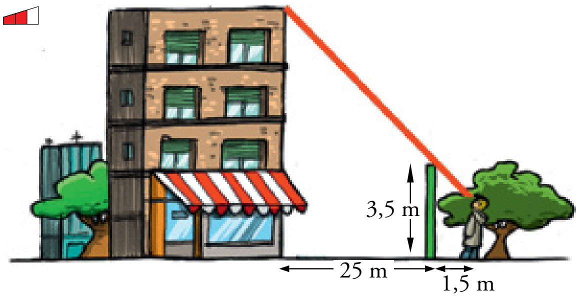
17. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



18. Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$, fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (MN es paralela a AB). Halla la distancia $\overline{AB}$.

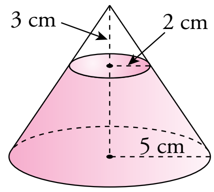


19.



Si Álvaro mide 165 cm de altura, ¿cuánto mide la casa?

20. De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.



Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m^2. ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

2. Comprueba si son semejantes dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen las condiciones siguientes:

a) $\overline{AB} = 10$; $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$

$\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$

b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$

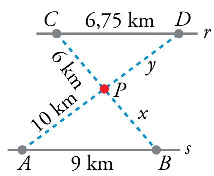
$\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$

c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

3. Álvaro debe situarse a 3 m de un charco para ver la copa de un árbol reflejada en él. Si la distancia del charco al árbol es de 10,5 m y la estatura de Álvaro es de 1,72 m, ¿cuál es la altura del árbol?

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.



5. Un florero tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 8 cm y 12 cm de lado, y altura 16 cm. Calcula su volumen.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....