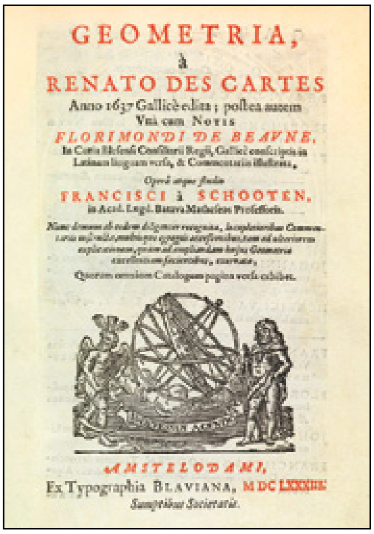
8 Geometría analítica

Dos mentes maravillosas

Con la invención de la geometría analítica se pone de manifiesto, una vez más, que las grandes creaciones humanas son fruto de una época, de un momento histórico cuyas circunstancias lo propician. Solo falta el personaje genial que lo lleve a efecto. En este caso fueron dos franceses, **Descartes** y **Fermat,** quienes la desarrollaron independiente y casi simultáneamente.

René Descartes (1596-1650)

Pierre de Fermat (1601-1665)



GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,

FRANCISCI à SCHOOTEN,

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

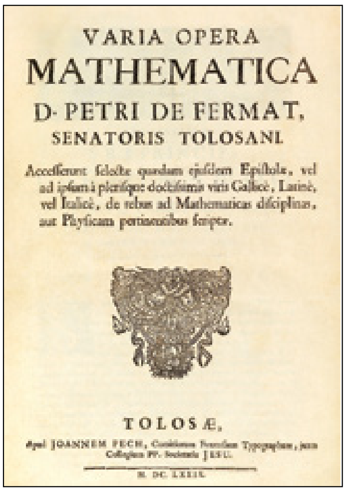
La "Geometría" es la única obra matemática de Descartes, un apéndice de apenas cien páginas de su "Discurso del Método" que cambió para siempre el quehacer matemático.

René Descartes

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático, en su obra *El discurso del Método* incluyó una parte final llamada "Geometría" en la que se detalla cómo se aplica el álgebra a la resolución de algunos problemas geométricos con la ayuda de un sistema de coordenadas. *Coordenadas cartesianas* se llamaron, pues en aquella época los textos científicos se escribían en latín y Descartes latinizó su nombre: *Cartesius.*

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665), abogado, político y matemático por afición, desarrolló un sistema similar al de Descartes: aplicó los métodos algebraicos al tratamiento de figuras geométricas representadas en unos ejes de coordenadas rectangulares. Esto lo describió en 1636, un año antes que Descartes, pero no fue publicado hasta después de su muerte, por lo que su obra no ejerció tanta influencia como la de aquel. Por eso es frecuente atribuir solo a Descartes la invención de la geometría analítica, olvidando la contribución de Fermat que, incluso, llegó un poco antes.



VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

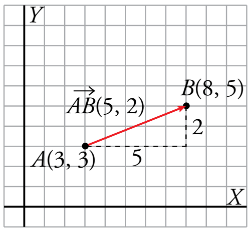
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,

En 1679, el hijo de Fermat publicó la obra "Varia Opera Mathematica", en la que recopiló los estudios matemáticos de su padre.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Vectores en el plano



En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(3, 3)$, $B(8, 5)$.

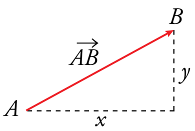
La flecha que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\overrightarrow{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B.

Al vector $\overrightarrow{AB}$ podríamos describirlo del modo siguiente: desde A avanzamos 5 unidades en el sentido de las X y subimos 2 unidades en el sentido de las Y.

Eso se dice más brevemente así: las **coordenadas** de $\overrightarrow{AB}$ son (5, 2). O, mejor, así: $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$. O, simplemente, $\overrightarrow{AB}(5, 2)$.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo:

$$\overrightarrow{AB} = (8, 5) - (3, 3) = (8 - 3, 5 - 3) = (5, 2)$$



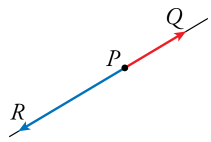
El módulo de un vector $\overrightarrow{AB}(x, y)$, por el teorema de Pitágoras, es:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- El **módulo** de un vector $\overrightarrow{AB}$, es la distancia de A a B. Se designa así: $|\overrightarrow{AB}|$.

  Si las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son (x, y), entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- La **dirección** de un vector es la de la recta en la que se encuentra y la de todas sus paralelas.
- Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos.

Por ejemplo, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son vectores de igual dirección y sentidos opuestos.

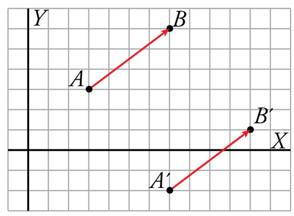


Dos **vectores** son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En tal caso, tienen las mismas coordenadas.

Ejercicio resuelto

Si $A(3, 3)$, $B(7, 6)$, $A'(7, -2)$ y $B'(11, 1)$, comprobar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ son iguales. Calcular sus módulos.

Representándolos, observamos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Pero también podemos comprobarlo mediante sus coordenadas:



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}: (7, 6) - (3, 3) = (4, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB}(4, 3) \\ \overrightarrow{A'B'}: (11, 1) - (7, -2) = (4, 3) \rightarrow \overrightarrow{A'B'}(4, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

Sus módulos, por tanto, también son iguales: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Piensa y practica

1. Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales.

Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

2. Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Notación

Los vectores se designan también mediante una letra minúscula con una flechita encima. Para ello, se suelen utilizar las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, y, si se necesitan más, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

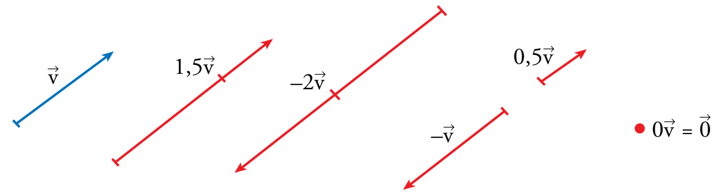
Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k:

$$|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$$

- Dirección: la misma que $\vec{v}$.
- Sentido: el mismo que el de $\vec{v}$ o su opuesto, según k sea positivo o negativo, respectivamente.



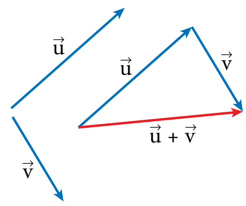
El producto $0\vec{v}$ es igual al **vector cero,** $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección.

El vector $-1\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$.

Las **coordenadas** del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{v}$. Las coordenadas de $\vec{0}$ son (0, 0). Las coordenadas de $-\vec{v}$ son las opuestas de las coordenadas de $\vec{v}$.

Suma de vectores

Para **sumar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo, el de $\vec{v}$.



Las **coordenadas** del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

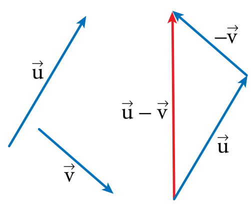
$$\vec{u}(7, -3),\ \vec{v}(4, 5) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (7 + 4, -3 + 5) = (11, 2)$$

Resta de vectores

Para **restar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Las **coordenadas** del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restándole a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$. Por ejemplo:



$$\vec{u}(7, -3),\ \vec{v}(4, 5) \rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (7 - 4, -3 - 5) = (3, -8)$$

Ejercítate

1. a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

2. Representa y halla las coordenadas de los vectores:

$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{p} = \vec{u} - \vec{v}$ y

$\vec{q} = -\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v}$,

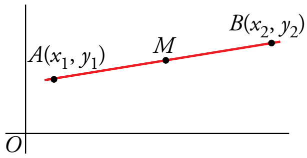
siendo $\vec{u}(3, -1)$ y $\vec{v}(-4, 2)$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Punto medio de un segmento y puntos alineados

Punto simétrico

Si M es el punto medio de AB, se dice que B es el simétrico de A respecto de M.



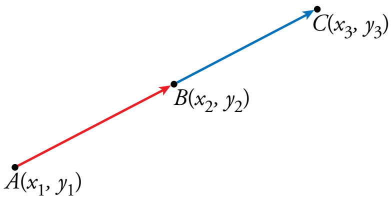
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 1)$ y $B(4, 3)$ es $M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) = (1, 2)$.

Comprobación de que tres puntos están alineados



Los puntos A, B y C están alineados siempre que los vectores

$$\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{BC}$$

tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales.

Notación

El símbolo // puesto entre dos vectores denota que son paralelos; es decir, que tienen la misma dirección.

A, B y C están alineados si $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC}$; es decir, si las coordenadas del vector $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ son proporcionales a las de $(x_3 - x_2,\ y_3 - y_2)$.

Ejercicio resuelto

Comprobar si los puntos A(2, –1), B(6, 1), C(8, 2) están alineados.

$$\overrightarrow{AB} = \big(6 - 2, 1 - (-1)\big) = (4, 2)$$
$$\overrightarrow{BC} = (8 - 6, 2 - 1) = (2, 1)$$

Las coordenadas son proporcionales, pues $2 \cdot (2, 1) = (4, 2)$.

Por tanto, $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC}$ y los puntos están alineados.

Piensa y practica

1. Halla las coordenadas del punto medio de cada segmento:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ b) $C(7, -3)$, $D(-5, 1)$

c) $E(1, 4)$, $F(7, 2)$ d) $G(-3, 5)$, $H(4, 0)$

2. Si conocemos el punto medio del segmento AB, $M(4, 4)$, y uno de los extremos es $A(7, 2)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

3. Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

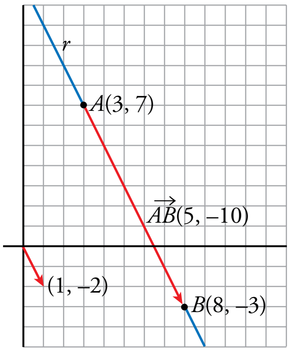
a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$ b) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$

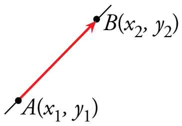
4. Comprueba si $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.

5. Averigua el valor de a para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad





Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_1 + m(x - x_1)$

El vector $\overrightarrow{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, -3)$ tiene como vector dirección a $(5, -10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, -2)$.

La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{-3-7}{8-3} = \dfrac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$; es decir, $y = -2x + 13$

Recuerda

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.

Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\overrightarrow{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \dfrac{b}{a}$

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(–2, 3) y B(6, 7).***	Un vector dirección es $\overrightarrow{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$ Pendiente: $m = \frac{1}{2}$. Ecuación: $y = 3 + (x + 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$
2. ***Hallar la ecuación de la recta que pasa por (5, –3) y tiene por vector dirección (3, 2).***	Su pendiente es: $m = \frac{2}{3}$. Su ecuación es: $y = -3 + \frac{2}{3}(x - 5)$
3. ***Hallar la ecuación de la recta paralela a r: 2x + 5y – 4 = 0 que pasa por:*** ***a) (0, 0) b) (4, –3)***	Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Para ello, despejamos la y y nos fijamos en el coeficiente de la x: $2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\frac{2}{5}$ a) Pasa por (0, 0) y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x$ b) Pasa por (4, –3) y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \frac{2}{5}(x - 4)$

Piensa y practica

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$ b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

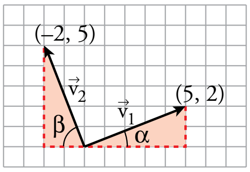
2. Halla la ecuación de la recta que pasa por (7, –5) y tiene por vector dirección (7, –4).

3. Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por (0, –3).

4. Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por (2, 4).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Vector perpendicular a otro



Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando, en la gráfica del margen, que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$. En general:

> Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares.

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \dfrac{b}{a}$ y $m_2 = \dfrac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{-a}{b} = -1$

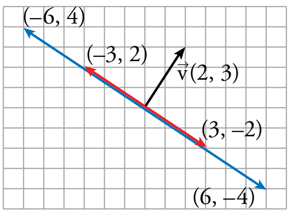
> Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:
>
> $$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(4, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(3, -5)$.***

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \dfrac{b}{a}$. Su ecuación es:

$$y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \;\rightarrow\; y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$$



2. ***Obtener varios vectores perpendiculares a (2, 3).***

$(-3, 2)$ es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son $(3, -2)$, $(-6, 4)$, $(6, -4)$…

3. ***Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a s: $5x - 3y + 15 = 0$, que pasa por $(-7, 2)$.***

Pendiente de s: $y = \dfrac{5}{3}x + 5 \;\rightarrow\; m_1 = \dfrac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \dfrac{3}{5}(x + 7) \;\rightarrow\; y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{11}{5}$

Piensa y practica

5. Da tres vectores perpendiculares a $(-6, 1)$.

6. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

7. La recta r pasa por $(3, 0)$, y la recta s, por $(-5, 3)$. Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.
Halla sus ecuaciones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Rectas paralelas a los ejes coordenados

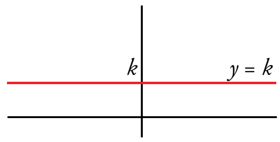
No lo olvides

Vector dirección de la recta $y = k$ es $(a, 0)$.

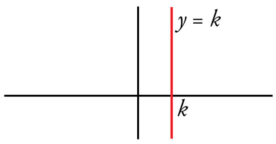
Vector dirección de la recta $x = k$ es $(0, a)$.

Rectas paralelas al eje X

Como sabes, la función constante, $y = k$, se representa mediante una recta paralela al eje X y, por tanto, de pendiente 0. Vectores dirección de estas rectas son $(a, 0)$ para cualquier valor de a distinto de 0.



Rectas paralelas al eje Y

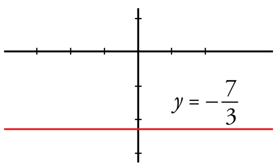


Análogamente, las ecuaciones $x = k$ se representan mediante rectas paralelas al eje Y. (Sin embargo, estas rectas no son la representación de funciones, porque a un valor de x, el k, le corresponden más de uno –¡todos!– los valores de Y).

Vectores dirección de las rectas $x = k$ son $(0, a)$ para $a \neq 0$.

Ejercicios resueltos

1. ***Dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a la recta de ecuación $3y + 7 = 0$. Representarla.***

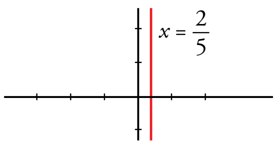


$3y + 7 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{7}{3}$

Vectores paralelos: (1, 0), (2, 0), (–1, 0), …

Vectores perpendiculares: (0, 1), (0, 2), (0, –1), …

2. ***Representar la recta $5x - 2 = 0$ y dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a ella.***

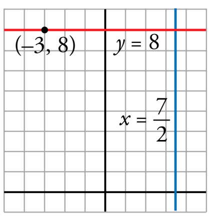


$5x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

Vectores paralelos: (0, 1), (0, 2), (0, –1), …

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0), (–1, 0), …

3. ***Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a $2x - 7 = 0$, que pasa por $(-3, 8)$.***



$2x - 7 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7}{2}$ es paralela al eje Y.

Por tanto, la recta r es paralela al eje X: $y = k$.

Como r pasa por $(-3, 8)$, su ecuación es $y = 8$.

Piensa y practica

1. Representa r y s y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a ellas:

r: $5x - 7 = 0$ $\quad$ s: $3 + 4y = 0$

2. Las rectas r y s pasan por el punto $(5, -3)$. r es paralela a $5y + 17 = 0$, y s es perpendicular a ella. Representa r y s y da sus ecuaciones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Posiciones relativas de dos rectas

Gráficamente, dos rectas pueden cortarse o no. Si no se cortan, son paralelas.

Pero si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones, es posible que se dé un tercer caso: que sean la misma recta y, al mostrar distinto aspecto algebraico, no se aprecie a simple vista.

Para averiguar la posición relativa de dos rectas dadas por sus ecuaciones, se resuelve el sistema formado por ellas.

Ejercicio resuelto

Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) r***:*** $5x - 4y + 10 = 0$

s***:*** $y = 2x + 1$

b) r ***pasa por (2, –1) y (8, 2).***

s ***pasa por (2, 5) y su pendiente es –1.***

c) r ***pasa por (3, 8) y (8, 3).***

s***:*** $x + y = 11$

d) r ***pasa por (2, 4) y (4, 7).***

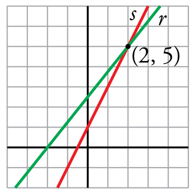
s***:*** $y = \frac{3}{2}x - 2$

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 10 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow 5x - 4(2x + 1) + 10 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 8x - 4 + 10 = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$

$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow y = 5$

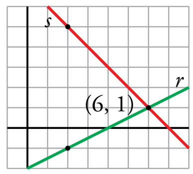
Las rectas se cortan en el punto (2, 5).



b) Un vector dirección de r es $(8, 2) - (2, -1) = (6, 3) \,//\, (2, 1)$. Su pendiente es, por tanto, $m = 1/2$.

$r: y = -1 + \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

$s: y = -(x - 2) + 5$



$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ Resolviendo el sistema se obtiene el punto de corte, (6, 1).

c) Un vector dirección de r es $(8, 3) - (3, 8) = (5, -5) \,//\, (1, -1)$. Su pendiente es, por tanto, $m = -1$.

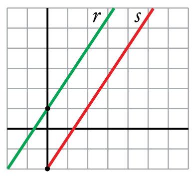
$r: y = 8 - (x - 3) \rightarrow y = -x + 11 \rightarrow x + y = 11$

r y s son la misma recta.

d) Un vector dirección de r es $(4, 7) - (2, 4) = (2, 3)$. Pendiente, $m = 3/2$.

$r: y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

r es paralela a s porque tienen la misma pendiente, 3/2, pero distintas ordenadas en el origen: 1 y –2, respectivamente.



Piensa y practica

1. Di la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r: 8x + 2y - 14 = 0$, $s: 5x - y - 20 = 0$

b) $r: 3x - 2y - 14 = 0$

s: pasa por (1, –2) y por (10, 1).

c) r: pasa por (–1, 4) y (7, –2).

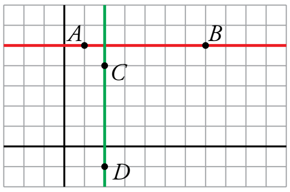
$s: 3x + 4y = 0$

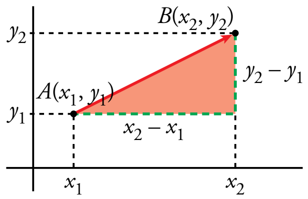
d) r: pasa por (2, –1) y (8, 2).

s: su pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por (0, –2).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Distancia entre dos puntos





Si dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada, hallar su distancia es muy fácil. Por ejemplo, en el gráfico:

$dist(A, B) = 6; \quad dist(C, D) = 5$ (basta con contar cuadritos)

O bien, mediante sus coordenadas: $dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$

$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$

Para dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su distancia se obtiene hallando el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula también es válida si los puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada.

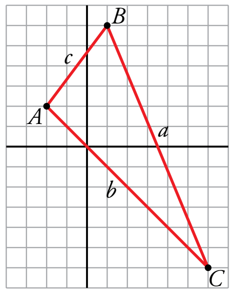
Ejercicios resueltos

1. ***Calcular los lados del triángulo de vértices A(–2, 2), B(1, 6), C(6, –6).***

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6-1)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(6+2)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11{,}31$



2. ***a) Hallar las longitudes de los lados del cuadrilatero cuyos vértices son A(2, 1), B(4, 6), C(–1, 4) y D(–3, –1).***

b) Probar que es un rombo.

c) Calcular su área.

a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1-4)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

b) Comparamos las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (2, 1) = (2, 5) \qquad \overrightarrow{DC} = (-1, 4) - (-3, -1) = (2, 5)$

El cuadrilátero tiene los lados iguales y paralelos dos a dos. Es un rombo.

c) Calculamos su diagonales:

$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$; $d' = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{(4+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{98}$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot d'}{2} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{98}}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ u}^2$$

Piensa y practica

1. Halla la distancia entre A y B.

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

2. Aplica el teorema de Pitágoras para comprobar que el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(5, 6)$ es rectángulo. ¿Es también isósceles?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

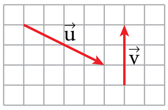
Practica

Vectores y puntos

1. Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$.

2. Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\vec{AB}(-3, 2)$, $\vec{AC}(5, 1)$ y $\vec{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos B, C y D?

3. a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

4. Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:

a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

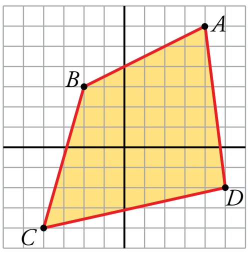
b) Calcula las coordenadas de este vector:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

5. a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla los puntos medios de AC y de BD.

b) Halla las coordenadas de $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ y comprueba que son las mismas.

6. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.



7. Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento AB, halla el punto B en cada uno de los siguientes casos:

a) $A(-1, 5)$ b) $A(6, -4)$ c) $A(-4, -7)$

8. Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:

a) $P(-2, 0)$ b) $Q(2, -3)$ c) $O(0, 0)$

Rectas

9. Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ y su pendiente es -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

10. Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

11. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $(2, -1)$ b) $(-1, -3)$ c) $(2, 0)$

12. Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por $(0, -3)$.

13. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

14. Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

15. Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

16. Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Distancias

17. Calcula, en cada caso, la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

18. a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(6, 4)$.

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

19. Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

20. Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo.

Aplica lo aprendido

21. Averigua el valor de k para que se cumpla:

$$\left(\frac{6}{5}, -2\right) = k(-3, 5)$$

22. Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula x e y para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$.

23. Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de m y n para que se verifique: $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$.

24. Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

25. Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

26. Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.

27. Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:

a) r: $2x + 7 = 0$ b) r: $-y + 4 = 0$

28. Estudia si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares:

r: $3x - 5y + 15 = 0$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.

29. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

30. Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

31. Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

Autoevaluación

1. Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.

2. Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

3. Comprueba si los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, 6)$ están alineados.

4. Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

5. Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$

6. Estudia la posición relativa de estas rectas:

r: $2x + y - 2 = 0$ s: $x + \frac{1}{2}y = 1$

7. Halla el punto de intersección de las siguientes rectas:

$3x + 8y - 7 = 0$ y $4x + 2y - 31 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....