1 Números reales

LEE Y APRENDE

¿Qué representan los números de los 10 primeros versos?

Los números de los primeros versos son los primeros decimales del número Pi.

¿Qué quiere decir la autora al afirmar *¡Oh, qué corta es la cola del cometa…!*?

La autora considera que la cola de un cometa es pequeña comparada con el número de decimales del número Pi.

ANALIZA Y REFLEXIONA

¿Qué características tiene el número Pi? ¿A qué conjuntos de números pertenece?

El número Pi tiene infinitos decimales que no siguen ningún patrón numérico.

El número Pi pertenece al conjunto de los números irracionales.

¿Conoces algún otro número con las mismas características?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. **Señala si los siguientes números son racionales o irracionales.**

a) **5,372 727 272…** **c)** **3,545 445 444 5…**

b) **0,127 202 002 000…** **d)** **8,666 126 712 67…**

a) Racional **c)** Irracional

b) Irracional **d)** Racional

2. **Indica todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer estos números.**

$$\frac{3}{5};\ -\sqrt{2};\ 1,2525...;\ 2,010010001...;\ -4;\ 0,2\widehat{6}$$

Enteros: –4

Irracionales: $-\sqrt{2}$; 2,010010001…

Racionales: –4; $\frac{3}{5}$; 1,2525…; $0,2\widehat{6}$

Reales: Todos

3. **Di si estas frases son verdaderas o falsas.**

a) **Todo número decimal es racional.**

b) **El número $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pertenece a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.**

c) **El número –1 pertenece al intervalo $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right)$.**

d) **Existe la fracción $\frac{a}{b} = 3,414114111411114...$**

a) Verdadera.

b) Verdadera, porque $\sqrt{\frac{12}{3}} = 2$

c) Falsa, porque $\left(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8}\right) = (-5, -2)$

d) Falsa, porque 3,414114… es un número irracional.

4. Calcula estos valores absolutos.

a) $|-7 + 2|$

b) $|7 - |-9||$

c) $||-5| - |-8||$

d) $||-9| + |2| \cdot |-5||$

a) $|-7 + 2| = |-5| = 5$

b) $|7 - |-9|| = |7 - 9| = |-2| = 2$

c) $||-5| - |-8|| = |5 - 8| = |-3| = 3$

d) $||-9| + |2| \cdot |-5|| = |9 + 2 \cdot 5| = |9 + 10| = |19| = 19$

5. Aproxima $\sqrt{10}$ = 3,162 277 66… con tres cifras significativas y calcula el error absoluto y el error relativo.

3,162 277 66… ≈ 3,16

$E_A = |3{,}162\,277\,66 - 3{,}16| = 0{,}002\,277\,66 \Rightarrow E_R = \dfrac{0{,}002\,277\,66}{3{,}162\,277\,66} = 0{,}000\,720\,259 \Rightarrow 0{,}07\ \%$

6. Actividad resuelta.

7. Encuentra todos los números *x* que verifican estas igualdades.

a) $|x - 1| = 2$

b) $|x + 2| = 5$

c) $|3 - x| = \dfrac{4}{5}$

a) Como $|x - 1| = 2 = d(x, 1)$, se buscan los números que distan 2 unidades de 1.

$x = 1 + 2 = 3$ y $x = 1 - 2 = -1$

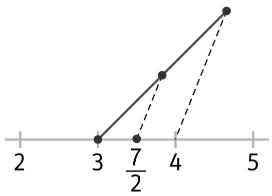
b) Como $|x + 2| = |x - (-2)| = 5 = d(x, -2)$, se buscan los números que distan 5 unidades de –2.

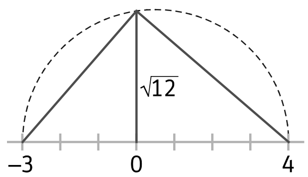
$x = -2 + 5 = 3$ y $x = -2 - 5 = -7$

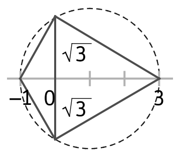
c) Como $|3 - x| = \dfrac{4}{5} = d(3, x) = d(x, 3)$, se buscan los números que distan $\dfrac{4}{5}$ unidades de 3.

$x = 3 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{19}{5}$ y $x = 3 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{11}{5}$

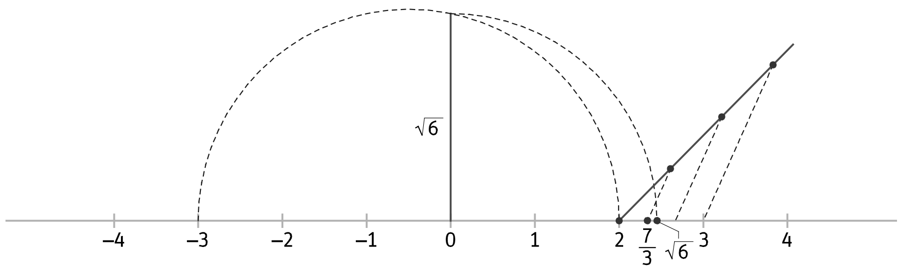
8. Representa en la recta real los números $\dfrac{7}{2}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$.







9. ¿Qué es mayor, $\sqrt{6}$ o $\dfrac{7}{3}$? Para averiguarlo, representa estos números en la recta real.



$\sqrt{6} > \dfrac{7}{3}$

10. Escribe como semirrectas o intervalos las siguientes desigualdades.

a) $x \geq -3$ **b)** $-5 \leq x < 7$ **c)** $x < 7$ **y** $x > -8$ **d)** $8 > x$ **e)** $7 < x$ **y** $x \geq 9$ **f)** $x < -3$ **y** $x \geq 1$

a) $[-3, +\infty)$ **b)** $[-5, 7)$ **c)** $(-8, 7)$ **d)** $(-\infty, 8)$ **e)** $[9, +\infty)$ **f)** $\varnothing$

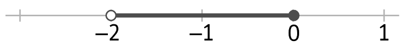
11. Expresa con desigualdades y gráficamente los siguientes intervalos y semirrectas.

a) $[-1, +\infty)$ **b)** $(-2, 0]$ **c)** $(-\infty, 3)$ **d)** $[4, 8]$

a) $[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$

c) $(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\}$

b) $(-2, 0] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 0\}$



d) $[4, 8] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 \leq x \leq 8\}$

12. Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $E[1, 2] = [-1, 3]$ **b)** $E(0, 1) = [-1, 1]$ **c)** $E(-2, 3) = (-5, 0)$ **d)** $E(4, 2) = (3, 5)$

a) Verdadera

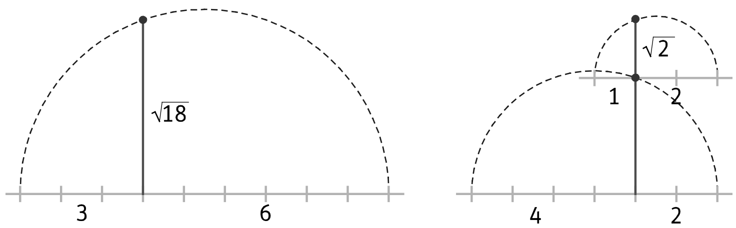
b) Falsa porque $E(0, 1) = (-1, 1)$

c) Falsa, porque $E(-2, 3) = (-5, 1)$

d) Falsa, porque $E(4, 2) = (2, 6)$

13. En el siglo XII, el matemático indio Bhaskara aseguró que: $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$

Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ **y otro de longitud** $\sqrt{18}$ **, y compruébalo.**



14. Responde en cada caso, expresando el resultado como un intervalo y como una desigualdad.

a) ¿Qué números reales están a la vez en los intervalos $(-7, 5]$ y $[-6, 3]$?

b) ¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty]$?

a) $[-6, 3] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -6 \leq x \leq 3\}$

b) $\{-5, -4, -3, -2\} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -5 \leq x \leq -2\}$

15. Escribe los siguientes números como potencias cuya base sea un número primo.

a) 8, 125, 243, 1024, 2401

b) $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

a) $8 = 2^3$; $125 = 5^2$; $243 = 3^5$; $1024 = 2^{10}$; $2401 = 7^4$

b) $\frac{1}{625} = 5^{-4}$; $\frac{1}{343} = 7^{-3}$; $\frac{1}{256} = 2^{-8}$; $\frac{1}{81} = 3^{-4}$; $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

16. Haz estas operaciones con potencias.

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$ **c)** $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 4^0 = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{2^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 = \frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{3^4}{2^6} = 3$

c) $5^{-3}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 = 5^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^{-3} \cdot 5^4 = 5$

17. Actividad resuelta.

18. Calcula *x* en cada una de estas igualdades.

a) $2 \cdot 16^2 \cdot 32^{-7} = 2^x$ **c)** $10^{2x} \cdot 10\,000 = 0{,}001$

b) $3 \cdot 27^2 \cdot 9^{-7} = 3^x$ **d)** $100^{2x} \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}1^{-2}$

a) $2 \cdot 16^2 \cdot 32^{-7} = 2 \cdot 2^8 \cdot 2^{-35} = 2^{-26} \Rightarrow x = -26$

b) $3 \cdot 27^2 \cdot 9^{-7} = 3 \cdot 3^6 \cdot 3^{-14} = 3^{-7} \Rightarrow x = -7$

c) $10^{2x} \cdot 10\,000 = 0{,}001 \Rightarrow 10^{2x} \cdot 10^4 = 10^{-3} \Rightarrow 10^{2x+4} = 10^{-3} \Rightarrow 2x + 4 = -3 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

d) $100^{2x} \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}1^{-2} \Rightarrow 10^{4x} \cdot 10^{-3} = 10^2 \Rightarrow 10^{4x-3} = 10^2 \Rightarrow 4x - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

19. Simplifica al máximo estas expresiones.

a) $\frac{4 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-3}}$ **b)** $\frac{25 \cdot (10^2)^{-5} \cdot 121}{11 \cdot 75 \cdot 10^{-9}}$

a) $\frac{4 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{-6} \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{30}$ **b)** $\frac{25 \cdot (10^2)^{-5} \cdot 121}{11 \cdot 75 \cdot 10^{-9}} = \frac{5^2 \cdot 10^{-10} \cdot 11^2}{11 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 10^{-9}} = \frac{11}{3 \cdot 10} = \frac{11}{30}$

20. Expresa como potencia de 10 y opera.

a) $\frac{(0{,}0001^{-2})^3 \cdot 100^2}{0{,}1 \cdot 10000 \cdot 10^{-5}}$ **b)** $\frac{(0{,}0001^2)^{-2} \cdot 10^6}{(1000^{-1})^{-5} \cdot 10^{-3}}$

a) $\frac{(0{,}0001^{-2})^3 \cdot 100^2}{0{,}1 \cdot 10000 \cdot 10^{-5}} = \frac{(10^{-4})^{-6} \cdot 10^4}{10^{-1} \cdot 10^4 \cdot 10^{-5}} = 10^{30}$ **b)** $\frac{(10^{-4})^{-4} \cdot 10^6}{(10^3)^5 \cdot 10^{-3}} = 10^{10}$

21. Actividad resuelta.

22. ¿Qué es mayor 31^{11} o 17^{14}?

Ayuda: piensa en 16 y 32 y ten en cuenta que $31^{11} < 32^{11}$ y $16^{14} < 17^{14}$.

$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} = \frac{2^{56}}{2} = \frac{(2^4)^{14}}{2} = \frac{16^{14}}{2} < 16^{14} < 17^{14}$

Por tanto, $31^{11} < 17^{14}$

23. Expresa en notación científica.

a) La distancia media de Plutón al Sol: 5 913 500 000 km

b) La masa de un átomo de hidrógeno: 0,000 000 000 000 000 000 000 001 661 g

a) 5 913 500 000 km = $5{,}9135 \cdot 10^{9}$ km

b) 0,000 000 000 000 000 000 000 001 661 gr = $1{,}661 \cdot 10^{-24}$ g

24. Copia en tu cuaderno y completa:

Escritura decimal	Escritura $n \cdot 10^p$	Notación científica
25 000 000	●●●	●●●
0,000 0043	●●●	●●●
●●●	$\mathbf{29 \cdot 10^{-3}}$	●●●
●●●	$\mathbf{438 \cdot 10^{5}}$	●●●
●●●	●●●	$\mathbf{3{,}48 \cdot 10^{-4}}$
●●●	●●●	$\mathbf{1{,}3 \cdot 10^{5}}$

Escritura decimal	Escritura $n \cdot 10^p$	Notación científica
25 000 000	$25 \cdot 10^{6}$	$2{,}5 \cdot 10^{7}$
0,000 0043	$43 \cdot 10^{-7}$	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$
0,029	$\mathbf{29 \cdot 10^{-3}}$	$2{,}9 \cdot 10^{-2}$
43 800 000	$\mathbf{438 \cdot 10^{5}}$	$4{,}38 \cdot 10^{7}$
0,000 348	$348 \cdot 10^{-6}$	$\mathbf{3{,}48 \cdot 10^{-4}}$
130 000	$13 \cdot 10^{4}$	$\mathbf{1{,}3 \cdot 10^{5}}$

25. María tiene que dar la respuesta de una actividad en notación científica, pero el profesor le dice que su respuesta no está bien. ¿Cuál es la respuesta correcta en notación científica?

La respuesta correcta sería $0{,}25 \cdot 10^{16} = 2{,}5 \cdot 10^{15}$.

26. Actividad resuelta.

27. Si $a = 2{,}3 \cdot 10^{8}$, $b = 5{,}1 \cdot 10^{7}$, $c = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$, resuelve las siguientes operaciones y escribe el resultado en notación científica.

a) $a + b$ **b)** $a \cdot b$ **c)** $a \cdot c$ **d)** $\frac{a}{c}$

a) $a + b = 2{,}3 \cdot 10^{8} + 5{,}1 \cdot 10^{7} = 2{,}3 \cdot 10^{8} + 0{,}51 \cdot 10^{8} = 2{,}81 \cdot 10^{8}$

b) $a \cdot b = (2{,}3 \cdot 10^{8}) \cdot (5{,}1 \cdot 10^{7}) = 11{,}73 \cdot 10^{15} = 1{,}173 \cdot 10^{16}$

c) $a \cdot c = (2{,}3 \cdot 10^{8}) \cdot (4{,}6 \cdot 10^{-5}) = 10{,}58 \cdot 10^{3} = 1{,}058 \cdot 10^{4}$

d) $\frac{a}{c} = \frac{2{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}6 \cdot 10^{-5}} = 0{,}5 \cdot 10^{13} = 5 \cdot 10^{12}$

28. Actividad interactiva.

29. Calcula mentalmente y escribe en tu cuaderno el valor de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[55]{1}$ **d)** $\sqrt[40]{-1}$ **g)** $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[4]{81}$ **e)** $\sqrt[3]{-1000}$ **h)** $\sqrt[4]{0{,}0001}$

c) $-\sqrt[6]{64}$ **f)** $-\sqrt{36}$ **i)** $\sqrt[4]{-81}$

a) 1 **d)** No es real. **g)** 2

b) ±3 **e)** –10 **h)** ±0,1

c) –2 **f)** –6 **i)** No es real.

30. Expresa los siguientes radicales como potencias y simplifícalos.

a) $\sqrt[3]{729}$ **c)** $\sqrt{125}$ **e)** $\sqrt[10]{81}$

b) $\sqrt[4]{1024}$ **d)** $\sqrt[6]{8}$ **f)** $\sqrt[12]{15\,625}$

a) $\sqrt[3]{729} = \left(3^6\right)^{\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$ **c)** $\sqrt{125} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt[10]{81} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9}$

b) $\sqrt[4]{1024} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt[6]{8} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$ **f)** $\sqrt[12]{15\,625} = \left(5^6\right)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

31. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) $25^{\frac{3}{2}}$ **c)** $343^{\frac{2}{3}}$ **e)** $16^{0,25}$ **g)** $27^{0,\hat{3}}$

b) $49^{\frac{5}{2}}$ **d)** $125^{\frac{4}{3}}$ **f)** $81^{0,75}$ **h)** $625^{0,25}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} = 125$ **c)** $343^{\frac{2}{3}} = \left(7^3\right)^{\frac{2}{3}} = 49$ **e)** $16^{0,25} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2$ **g)** $27^{0,\hat{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3$

c) $49^{\frac{5}{2}} = \left(7^2\right)^{\frac{5}{2}} = 16\,807$ **d)** $125^{\frac{4}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{4}{3}} = 625$ **f)** $81^{0,75} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 27$ **h)** $625^{0,25} = \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 5$

32. Expresa como un solo radical.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$ **c)** $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 : \sqrt[5]{27}$

b) $\sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{512}} \cdot \sqrt[6]{64}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{24}$ **c)** $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 : \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^4} : \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = 2$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{512}} \cdot \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^9} \cdot \sqrt[6]{2^6} = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

33. Aplica las propiedades de los radicales y simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}}$ **d)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} = \sqrt[24]{2^2} = \sqrt[12]{2}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^6}}} = \sqrt[4]{2}$ **d)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$

34. Explica cómo expresiones tan distintas como $2^{0,5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ pueden ser equivalentes.

$8^{\frac{1}{6}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{0,5} = \sqrt{2}$

35. Actividad resuelta.

36. Reduce a índice común y ordena de mayor a menor los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[6]{6}$

b) $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[10]{20}$

a) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[24]{4^6} = \sqrt[24]{2^{12}} = \sqrt[24]{2^4 \cdot 4^4}$, $\sqrt[8]{8} = \sqrt[24]{8^3} = \sqrt[24]{2^9}$ y $\sqrt[6]{6} = \sqrt[24]{6^4} = \sqrt[24]{2^4 \cdot 3^4} \Rightarrow \sqrt[8]{8} < \sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[5]{5} = \sqrt[10]{25}$ y $\sqrt{2} = \sqrt[10]{32} \Rightarrow \sqrt[10]{20} < \sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$

37. Escribe las siguientes expresiones de la forma que se indica en cada caso.

a) Con radicales: $x^{\frac{2}{3}}$, $\left(8x^{\frac{1}{3}}\right)^2$ **y** $(3+a)^{\frac{1}{3}}$

b) Con exponentes fraccionarios: $\sqrt[3]{2a^2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **y** $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

a) $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$, $\left(8x^{\frac{1}{3}}\right)^2=8^2x^{\frac{2}{3}}=64\sqrt[3]{x^2}$ y $(3+a)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3+a}$

b) $\sqrt[3]{2a^2}=(2a^2)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{x}}=\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{6}}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

38. ¿Cuál es el error en esta falsa igualdad? $\sqrt{-1}=\sqrt[2\cdot 4]{(-1)^4}=\sqrt[8]{1}=1$

La propiedad fundamental no está bien aplicada en este caso, pues esta solo es válida si el radicando es mayor o igual que cero y, en este caso, no lo es.

39. Demuestra las propiedades de los radicales utilizando exponentes fraccionarios.

1. $\sqrt[n]{ab}=(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. Si $a\geq 0$, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a^m}$

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

40. Extrae factores y simplifica al máximo estos radicales.

a) $\sqrt{3000}$ **b)** $\sqrt[3]{600}$ **c)** $\sqrt[4]{810}$

a) $\sqrt{3000}=\sqrt{10^2\cdot 30}=10\sqrt{30}$

b) $\sqrt[3]{600}=\sqrt[3]{2^3\cdot 75}=2\sqrt[3]{75}$

c) $\sqrt[4]{810}=\sqrt[4]{2\cdot 3^4\cdot 5}=3\sqrt[4]{10}$

41. Introduce factores dentro de cada radical.

a) $3\sqrt{5}$ **b)** $4a\sqrt[3]{2a^2}$ **c)** $\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$

a) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$

b) $4a\sqrt[3]{2a^2}=\sqrt[3]{4^3a^3 2a^2}=\sqrt[3]{128a^5}$

c) $\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^4\cdot 5}{5^4\cdot 3}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^3}{5^3}}=\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$

42. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}$ **b)** $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{392}$ **c)** $\sqrt[4]{2187}:\sqrt{108}$ **d)** $\sqrt{12}:\left(\sqrt[3]{32}:\sqrt[6]{2}\right)$

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}=6\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{392}=\sqrt[15]{4^5}\cdot\sqrt[15]{392^3}=\sqrt[15]{2^{10}}\cdot\sqrt[15]{(2^3\cdot 7^2)^3}=\sqrt[15]{2^{10}}\cdot\sqrt[15]{2^9\cdot 7^6}=\sqrt[15]{2^{19}\cdot 7^6}=2\sqrt[15]{2^4\cdot 7^6}=2\sqrt[15]{1\,882\,384}$

c) $\sqrt[4]{2187}:\sqrt{108}=\sqrt[4]{2187}:\sqrt[4]{108^2}=\sqrt[4]{3^7}:\sqrt[4]{(2^2\cdot 3^3)^2}=\sqrt[4]{3^7}:\sqrt[4]{2^4\cdot 3^6}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{2^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

d) $\sqrt{12}:\left(\sqrt[3]{32}:\sqrt[6]{2}\right)=\sqrt[6]{12^3}:\left(\sqrt[6]{32^2}:\sqrt[6]{2}\right)=\sqrt[6]{(2^2\cdot 3)^3}:\left(\sqrt[6]{(2^5)^2}:\sqrt[6]{2}\right)=\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}:\left(\sqrt[6]{2^{10}}:\sqrt[6]{2}\right)=\sqrt[6]{\dfrac{3^3}{2^3}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

43. Opera y simplifica.

a) $\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{75}$

b) $3\sqrt{20}-2\sqrt{80}-\sqrt{45}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{32}+5\sqrt{18}-\sqrt{2^7}$

d) $-\sqrt{3^5}+\sqrt{3^2\cdot 2^5}-\sqrt{2}$

a) $\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{75}=2\sqrt{3}-4\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 5\sqrt{3}=(2-12+15)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{20}-2\sqrt{80}-\sqrt{45}=3\cdot 2\sqrt{5}-2\cdot 4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(6-8-3)\sqrt{5}=-5\sqrt{5}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{32}+5\sqrt{18}-\sqrt{2^7}=\frac{3}{2}\cdot 4\sqrt{2}+5\cdot 3\sqrt{2}-8\sqrt{2}=6\sqrt{2}+15\sqrt{2}-8\sqrt{2}=13\sqrt{2}$

d) $-\sqrt{3^5}+\sqrt{3^2\cdot 2^5}-\sqrt{2}=-9\sqrt{3}+12\sqrt{2}-\sqrt{2}=-9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$

44. Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones fraccionarias.

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

e) $\frac{2}{5-\sqrt{23}}$

f) $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

a) $\frac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}=\frac{10\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}\cdot\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}=\frac{10\cdot\sqrt[3]{25}}{5}=2\sqrt[3]{25}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}{\sqrt[3]{12}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{12^4}}{\sqrt[3]{12^3}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(2^2\cdot 3\right)^4}}{12}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{2^8\cdot 3^4}}{12}=\frac{\sqrt[6]{3^7\cdot 2^8}}{12}=\frac{6\sqrt[6]{12}}{12}=\frac{\sqrt[6]{12}}{2}$

d) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}=2\sqrt{5}+2\sqrt{7}$

e) $\frac{2}{5-\sqrt{23}}=\frac{2\left(5+\sqrt{23}\right)}{\left(5-\sqrt{23}\right)\cdot\left(5+\sqrt{23}\right)}=\frac{2\left(5+\sqrt{23}\right)}{25-23}=\frac{2\left(5+\sqrt{23}\right)}{2}=5+\sqrt{23}$

f) $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{7\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{7\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=7\sqrt{3}-7\sqrt{2}$

45. Calcula el valor de *x* en la siguiente expresión: $\sqrt{18}\cdot x=\sqrt{50}\cdot x+7\sqrt{2}$

$\sqrt{18}\cdot x=\sqrt{50}\cdot x+7\sqrt{2}\Rightarrow 3\sqrt{2}\cdot x=5\sqrt{2}\cdot x+7\sqrt{2}\Rightarrow 3\cdot x=5\cdot x+7\Rightarrow x=-\frac{7}{2}$

46. Si $a=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{6}\right)$ **y** $b=3-\sqrt{6}$ **son los catetos de un triángulo rectángulo, halla la hipotenusa.**

$h^2=a^2+b^2=\left(\sqrt{3}\left(1+\sqrt{6}\right)\right)^2+\left(3-\sqrt{6}\right)^2=3\left(1+2\sqrt{6}+6\right)+\left(9-6\sqrt{6}+6\right)=3+6\sqrt{6}+18+9-6\sqrt{6}+6=36\Rightarrow h=6$

47. Actividad interactiva.

48. Calcula los logaritmos en base 2 de los siguientes números.

a) **–4**

b) **2**

c) $\frac{1}{8}$

d) **1024**

e) $\sqrt[3]{32}$

f) $8 \cdot 16 \cdot 2^5$

a) $\log_2(-4)$: no existe

b) $\log_2 2 = 1$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

d) $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

e) $\log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$

f) $\log_2(8 \cdot 16 \cdot 2^5) = \log_2(2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5) = \log_2 2^{12} = 12$

49. Sin utilizar la calculadora, halla la primera cifra de los siguientes logaritmos.

a) **log 450**

b) **log 37**

c) **log 0,03**

d) $\log_3 10$

e) $\log_5 75$

f) $\log_2 \frac{1}{3}$

a) Como log 100 = 2 y log 1000 = 3, la primera cifra de log 450 es 2.

b) Como log 10 = 1 y log 100 = 2, la primera cifra de log 37 es 1.

c) Como log 0,1 = $\log \frac{1}{10} = -1$, la primera cifra de log 0,03 es –1.

d) Como $\log_3 9 = 2$ y $\log_3 27 = 3$, la primera cifra de $\log_3 10$ es 2.

e) Como $\log_5 25 = 2$ y $\log_5 125 = 3$, la primera cifra de $\log_5 75$ es 2.

f) Como $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ y $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, la primera cifra de $\log_2 \frac{1}{3}$ es –1.

50. Actividad resuelta.

51. Calcula el valor de *x* en estas igualdades.

a) $\log 1\,000\,000 = x$

b) $\log_x 0,5 = -1$

c) $\log(-100) = x$

d) $\log_2 x = 5$

e) $\log_7 \frac{1}{49} = x$

f) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = \log 1\,000\,000 = \log 10^6 = 6$

b) $\log_x 0,5 = -1 \Rightarrow \log_x \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x = 2$

c) log (–100) no existe

d) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$

e) $\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

f) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x \Rightarrow x = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

52. Actividad resuelta.

53. Tomando log 8 = 0,903, calcula:

a) **log 80**

b) **log 0,8**

c) **log 2**

d) **log 1,25**

e) **log 64**

f) $\log \sqrt[3]{800}$

a) log (80) = log (8 · 10) = log 8 + log 10 = 1,903

b) log 0,8 = $\log \frac{8}{10}$ = log 8 – log 10 = –0,097

c) log 2 = $\log (2^3)^{\frac{1}{3}} = \log 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 8 = 0,301$

d) log 1,25 = $\log \frac{10}{8}$ = log 10 – log 8 = 0,097

e) log 64 = log 8^2 = 2 · log 8 = 2 · 0,903 = 1, 806

f) $\log\left(\sqrt[3]{800}\right) = \log 8^{\frac{1}{3}} + \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\log 8 + \frac{2}{3}\log 10 = 0,968$

54. Transforma los siguientes logaritmos en sumas y restas de log *A* y log *B*.

a) $\log\dfrac{\sqrt{B}}{10A}$

b) $\log\dfrac{B^3}{\sqrt{A}}-\log A^2$

a) $\log\dfrac{\sqrt{B}}{10A}=\log\sqrt{B}-\log(10A)=\log B^{\frac{1}{2}}-\log 10-\log A=\dfrac{1}{2}\log B-1-\log A$

b) $\log\dfrac{B^3}{\sqrt{A}}-\log A^2=\log B^3-\log\sqrt{A}-2\log A=3\log B-\log A^{\frac{1}{2}}-2\log A=3\log B-\dfrac{1}{2}\log A-2\log A=3\log B-\dfrac{5}{2}\log A$

55. Calcula $2^{\log_2 7}$ y $\log_{19}\sqrt{19}$.

$x=2^{\log_2 7}\Rightarrow\log_2 x=\log_2 2^{\log_2 7}\Rightarrow\log_2 x=\log_2 7\cdot\log_2 2\Rightarrow x=7$

$\log_{19}\sqrt{19}=\log_{19}19^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_{19}19=\dfrac{1}{2}$

56. Actividad interactiva.

57. Transforma las siguientes expresiones en sumas y restas.

a) $X=\dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}}$

b) $Y=\dfrac{a^3\sqrt{b}}{100\sqrt[3]{c}}$

a) $\log X=\log\dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}}=\log a+\log\left(b^{\frac{2}{3}}\right)-\log\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=\log a+\dfrac{2}{3}\log b-\dfrac{1}{3}\log a=\dfrac{2}{3}\log a+\dfrac{2}{3}\log b$

b) $\log Y=\log\dfrac{a^3\sqrt{b}}{100\sqrt[3]{c}}=\log a^3+\log b^{\frac{1}{2}}-\log 100-\log\sqrt[3]{c}=3\log a+\dfrac{1}{2}\log b-2-\log c^{\frac{1}{3}}=3\log a+\dfrac{1}{2}\log b-2-\dfrac{1}{3}\log c$

58. Calcula el valor de *A* sin usar la calculadora: log *A* = log 8 – 2log 3 + log 16

log *A* = log 8 – 2log 3 + log 16 = log 8 – $\log 3^2$ + log 16 = log $\dfrac{8\cdot 16}{9}$ = log $\dfrac{128}{9}$ luego *A* = $\dfrac{128}{9}$

59. Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 14$

b) $\log_3 32$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

d) $\log_5 10$

a) $\log_2 14=\dfrac{\log 14}{\log 2}=3{,}8074$

b) $\log_3 32=\dfrac{\log 32}{\log 3}=3{,}1546$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12=\dfrac{\log 12}{\log\frac{1}{2}}=-3{,}5850$

d) $\log_5 10=\dfrac{\log 10}{\log 5}=1{,}4307$

60. Halla *x* usando la calculadora para que se cumpla que $3^x = 7$.

$3^x=7\Rightarrow\log 3^x=\log 7\Rightarrow x\log 3=\log 7\Rightarrow x=\dfrac{\log 7}{\log 3}\approx 1{,}77$

61. En una bolsa hay 30 bolas blancas, 20 verdes y 45 negras. Halla el porcentaje de bolas de cada color.

Blancas: $\dfrac{30}{95}=0{,}32\Rightarrow 32\ \%$ Verdes $\dfrac{20}{95}=0{,}21\Rightarrow 21\%$ Negras $\dfrac{45}{95}=0{,}47\Rightarrow 47\ \%$

62. Indica el índice de variación porcentual y el porcentaje de aumento o disminución.

"Las ventas han pasado de 15 000 a 18 000 ejemplares"

$I = \dfrac{18\,000}{15\,000} = 1{,}2 \Rightarrow$ Aumento del 20 %

63. Indica qué porcentaje aumenta o disminuye una cantidad al multiplicarla por los números siguientes.

a) 0,9 **b) 1,2** **c) 0,02** **d) 2,02**

a) Disminuye un 10 % **b)** Aumenta un 20 % **c)** Disminuye un 98 % **d)** Aumenta un 102 %

64. Halla el capital final en que se convierten 650 € en tres años a un interés simple del 2,25%.

$C_F = 650\left(1 + \dfrac{2{,}25 \cdot 3}{100}\right) = 693{,}875$ €

65. La población de un país aumenta por término medio un 8 % anual. Si actualmente hay 20 millones de habitantes en dicho país y el ritmo de crecimiento se considera constante, ¿qué población estimas que tendrá dentro de 30 años?

Población en 30 años (en millones) = $20 \cdot (1{,}08)^{30} = 201{,}25$.

Habrá 201,25 millones de habitantes.

66. ¿Qué capital debe depositarse a un interés compuesto del 5 % para convertirse en 10 000 € al cabo de un año?

$10\,000 = C_I(1 + 0{,}05) \Rightarrow C_I = \dfrac{10\,000}{1 + 0{,}05} = 9524$ €

67. Un banco ofrece un interés compuesto del 6 % anual en su cuenta de ahorro con la condición de que cada año ingreses 1000 €.

Si aceptas la oferta y retiras tu dinero a los 5 años, ¿cuánto dinero deberá entregarte el banco?

1er año: $1000 \cdot 1{,}06 = 1060$ euros

2º año: $2060 \cdot 1{,}06 = 2183{,}6$ euros

3er año: $3183{,}6 \cdot 1{,}06 = 3374{,}616$ euros

4º año: $4374{,}616 \cdot 1{,}06 = 4637{,}09296$ euros

5º año: $5637{,}09296 \cdot 1{,}06 = 5975{,}32$ euros

68. Halla el capital final en que se convierten 750 € en cuatro años a un interés simple del 12 %. ¿Y si el interés que se aplica es compuesto?

Interés simple: $C_F = 750\left(1 + \dfrac{12 \cdot 4}{100}\right) = 1110$ €

Interés compuesto: $C_F = 750 \cdot (1 + 0{,}12)^4 = 1180{,}14$ €

69. ¿A qué tanto por ciento anual hay que colocar 50 000 € para que se conviertan en 182 124 euros al cabo de 15 años?

$182\,124 = 50\,000(1 + x)^{15} \Rightarrow x = \sqrt[15]{\dfrac{182\,124}{50\,000}} - 1 = 0{,}09$

Al 9 % anual

70. Actividad resuelta.

71. ¿Cuántos años debe estar impuesto un capital si a un interés compuesto del 5 % anual se convierte en 1,25 veces el capital depositado inicialmente?

$1{,}25C_I = C_I(1 + 0{,}05)^t \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}05} = 4{,}57$

Cuatro años y medio, aproximadamente

72. ¿A qué tanto por ciento debe colocarse un capital cualquiera para duplicarlo en 15 años?

$2C_I = C_I(1 + r)^{15} \Rightarrow r = \sqrt[15]{2} - 1 = 0{,}047$

Debe imponerse al 4,7 %.

73. Halla durante cuántos años se ha colocado un capital de 2800 € a un interés simple del 5 % para obtener al final del periodo 3920 €. ¿Y si se deposita a un interés compuesto del 5 %? ¿Qué observas?

Interés simple: $3920 = 2800\left(1 + \dfrac{5 \cdot t}{100}\right) \Rightarrow 1{,}4 = 1 + \dfrac{5 \cdot t}{100} \Rightarrow t = \dfrac{(1{,}4 - 1) \cdot 100}{5} = 8$ años

Interés compuesto: $3920 = 2800 \cdot (1 + 0{,}05)^t \Rightarrow 1{,}4 = 1{,}05^t \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}4}{\log 1{,}05} = 6{,}9$ años

Si se deposita a un interés compuesto se necesitan menos años para obtener el mismo beneficio.

74. Escribe tres fracciones que den lugar a números racionales con desarrollo decimal finito.

Por ejemplo, $\dfrac{3}{2} = 1{,}5;\ \dfrac{7}{4} = 1{,}75$ y $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$

75. Escribe dos números irracionales cuya suma sea un número racional y dos números irracionales cuya suma sea otro número irracional.

$\sqrt{2}$ y $5 - \sqrt{2}$ son números irracionales y, su suma, $\sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5$ es un número racional.

0,1001000… y 0,2002000…son irracionales y, su suma, 0,1001000… + 0,2002000… = 0,3003000… es irracional.

76. Encuentra un número racional y otro irracional comprendidos entre $\dfrac{17}{26}$ y $\dfrac{18}{26}$.

$\dfrac{17}{26} = \dfrac{34}{52} \cong 0{,}654$ y $\dfrac{18}{26} = \dfrac{36}{52} \cong 0{,}692$

Un número racional comprendido entre $\dfrac{17}{26}$ y $\dfrac{18}{26}$ podría ser $\dfrac{35}{52}$ y uno irracional, 0,6656665666656…

77. Indica todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer estos números.

2,4747…; $-\sqrt{9}$; $\dfrac{2}{7}$; $\dfrac{35}{5}$; 12,121121112…; –4; $3{,}0\widehat{5}$

Enteros: $-\sqrt{9}$; $\dfrac{35}{5}$; –4

Irracionales: 12,121121112…

Racionales: $-\sqrt{9}$; $\dfrac{35}{5}$; –4; 2,4747…; $\dfrac{2}{7}$; $3{,}0\widehat{5}$

Reales: Todos

78. En la siguiente cadena de contenidos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.

$1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad -1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

79. Realiza las siguientes operaciones.

a) $|7 - |-9||$

b) $||-8| - |10||$

c) $|-1 + |-7| - |-3||$

d) $||-3| + |-2| \cdot |-5||$

e) $\left|-\frac{1}{2} + 3\right|$

f) $|-9| \cdot |5 - 3| - |-4| : |-2|$

a) $|7 - |-9|| = |7 - 9| = |-2| = 2$

b) $||-8| - |10|| = |8 - 10| = |-2| = 2$

c) $|-1 + |-7| - |-3|| = |-1 + 7 - 3| = |3| = 3$

d) $||-3| + |-2| \cdot |-5|| = |3 + 2 \cdot 5| = |13| = 13$

e) $\left|-\frac{1}{2} + 3\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{6}{2}\right| = \left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$

f) $|-9| \cdot |5 - 3| - |-4| : |-2| = 9 \cdot 2 - 4 : 2 = 18 - 2 = 16$

80. Encuentra todos los valores de *x* que verifican las siguientes igualdades.

a) $|x| = 4$

b) $|x| = -1$

c) $|x + 5| = 2$

d) $|x - 2| = 10$

e) $|5 - x| = \frac{1}{5}$

f) $\left|\frac{5}{2} + x\right| = 3$

a) Como $|x| = 4 = d(x, 0)$, se buscan los números que distan 4 unidades de 0.

$x = 0 + 4 = 4$ y $x = 0 - 4 = -4$

b) No existe ningún número cuyo valor absoluto sea negativo.

c) Como $|x + 5| = |x - (-5)| = 2 = d(x, -5)$, se buscan los números que distan 2 unidades de -5.

$x = -5 + 2 = -3$ y $x = -5 - 2 = -7$

d) Como $|x - 2| = 10 = d(x, 2)$, se buscan los números que distan 10 unidades de 2.

$x = 2 + 10 = 12$ y $x = 2 - 10 = -8$

e) Como $|5 - x| = \frac{1}{5} = d(5, x) = d(x, 5)$, se buscan los números que distan $\frac{1}{5}$ unidades de 5.

$x = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$ y $x = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$

f) Como $\left|\frac{5}{2} + x\right| = \left|x + \frac{5}{2}\right| = \left|x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| = 3 = d\left(x, -\frac{5}{2}\right)$, se buscan los números que distan 3 unidades de $-\frac{5}{2}$.

$x = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{5}{2} - 3 = -\frac{11}{2}$

81. Redondea dejando dos cifras significativas y calcula el error absoluto y el error relativo cometido con la aproximación.

a) 3,140101…

b) $\frac{4}{9}$

c) $\sqrt{35}$

a) $3{,}140\,101\ldots \approx 3{,}1 \Rightarrow E_A = |3{,}140\,101 - 3{,}1| = 0{,}040\,101$ y $E_R = \frac{0{,}040\,101}{3{,}140\,101} = 0{,}012\,8 \Rightarrow 1{,}28\%$

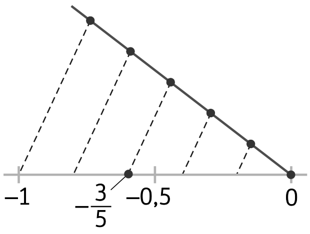
b) $\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots \approx 0{,}44 \Rightarrow E_A = |0{,}44\ldots - 0{,}44| = 0{,}004\ldots$ y $E_R = \frac{0{,}004\ldots}{0{,}44\ldots} = 0{,}009 \Rightarrow 0{,}9\%$

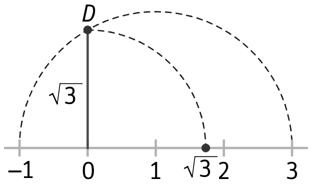
c) $\sqrt{35} = 5{,}916\,07\ldots \approx 5{,}9 \Rightarrow E_A = |5{,}916\,07\ldots - 5{,}9| = 0{,}016\,08$ y $E_R = \frac{0{,}016\,08}{5{,}916\,07} = 0{,}002\,7 \Rightarrow 0{,}27\%$

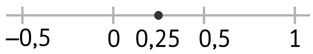
82. Interpreta $|x - 2| = |x + 1|$ como una igualdad entre distancias y encuentra el único número *x* que la verifica.

$d(x, 2) = |x - 2| = |x + 1| = d(x, -1) \Rightarrow x = 0{,}5$

83. Representa en la recta real $-\frac{3}{5}$, $\sqrt{3}$ y $0{,}25$.



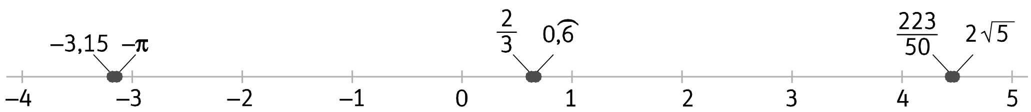




84. Representa gráficamente los siguientes números reales y ordénalos de menor a mayor.

$$-\pi; \quad 2\sqrt{5}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{223}{50}; \quad -3{,}15; \quad 0{,}\widehat{6}$$

Representamos gráficamente los números:



Por tanto, $-3{,}15 < -\pi < \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$

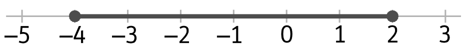
85. ¿Qué intervalo equivale al entorno *E*[3, 7]?

E[3, 7] = [–4, 10]

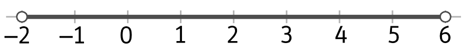
86. Representa estos entornos en la recta e indica los intervalos que determinan, su centro y su radio.

a) ***E*(2, 4)** **b)** ***E*[–1, 3]** **c)** ***E*(3, 1)**

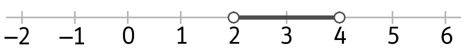
a) *E*(2, 4) = (–2, 6) Centro = 2 y Radio = 4



b) *E*[–1, 3] = [–4, 2] Centro = –1 y Radio = 3

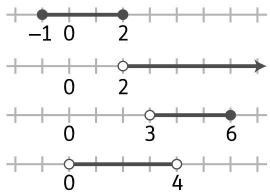


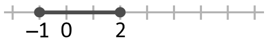
c) *E*(3, 1) = (2, 4) Centro = 3 y Radio = 1

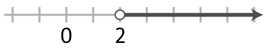


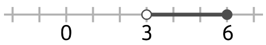
87. Relaciona en tu cuaderno las diferentes expresiones de estos intervalos y semirrectas.

[–1, 2]	**$x > 2$**	
(2, +∞)	**$0 < x < 4$**	
(3, 6]	**$-1 \le x \le 2$**	
(0, 4)	**$3 < x \le 6$**	



[–1, 2] ⇒ $-1 \le x \le 2$ ⇒ 

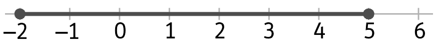
(2, +∞) ⇒ $x > 2$ ⇒ 

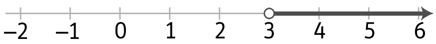
(3, 6] ⇒ $3 < x \le 6$ ⇒ 

(0, 4) ⇒ $0 < x < 4$ ⇒ 

88. Representa en la recta real el intervalo [–2, 5] y la semirrecta (3, +∞).

Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.

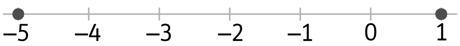


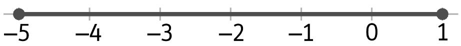


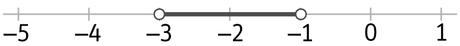
Sí existe intervalo común a ambos: $(3,5]$

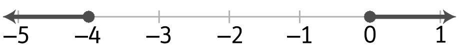
89. Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuya distancia al punto –2 sea:

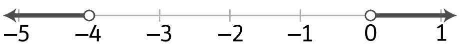
a) Igual a 3	**c) Mayor que 2**	**e) No menor que 2**
b) Menor que 1	**d) No mayor que 3**	**f) Entre 2 y 5**

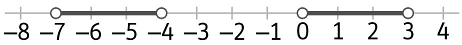
a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

f) 

90. Actividad resuelta.

91. Encuentra aquellos números *x* tales que $|x-3| < 4$.

Como $|x-3| < 4 \Rightarrow d(x, 3) < 4$, se buscan los números cuya distancia al 3 es menor que 4.

Los números son los pertenecientes al intervalo (–1, 7).

92. Escribe el intervalo formado por los números x que verifican simultáneamente:

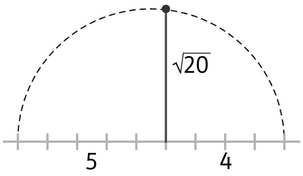
- ***x* está en el entorno abierto de centro 4 y radio 2.**
- **$|x-1| \le 3$**

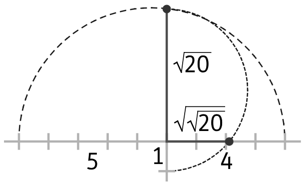
Por la primera condición, *x* debe estar comprendido entre 2 y 6.

Por la segunda condición, *x* debe estar comprendido entre 1 + 3 = 4 y 1 – 3 = –2.

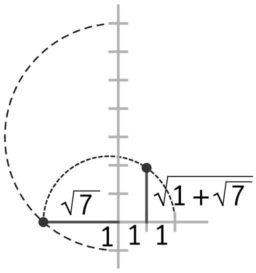
Luego se trata del intervalo (2, 4].

93. Representa en la recta real $\sqrt{20}$ y $\sqrt{\sqrt{20}}$.





94. Representa un segmento que mida $\sqrt{1+\sqrt{7}}$.



95. Realiza estas operaciones con potencias.

a) $9^{-1}\cdot 9^2 : 9^{-3}$ **b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-2}$ **c)** $3^{-3}\cdot(9^{-2})^2$

a) $9^{-1}\cdot 9^2 : 9^{-3} = 9^4$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^8$

c) $3^{-3}\cdot(9^{-2})^2 = 3^{-3}\cdot 9^{-4} = 3^{-3}\cdot(3^2)^{-4} = 3^{-3}\cdot 3^{-8} = 3^{-11}$

96. Simplifica al máximo estas expresiones.

a) $\frac{12\cdot 10^{-1}\cdot 20^4}{50\cdot\left(16^{-2}\right)^{-3}}$ **b)** $\frac{\left(18^2\right)^{-2}\cdot 81}{6^3\cdot 108\cdot(24)^{-4}}$

a) $\frac{12\cdot 10^{-1}\cdot 20^4}{50\cdot\left(16^{-2}\right)^{-3}} = \frac{3\cdot 2^2\cdot 10^{-1}\cdot 2^4\cdot 10^4}{5\cdot 10\cdot\left(2^4\right)^6} = \frac{3\cdot 10^2}{5\cdot 2^{18}} = \frac{3\cdot 2^2\cdot 5^2}{5\cdot 2^{18}} = \frac{3\cdot 5}{2^{16}} = \frac{15}{65\,536}$

b) $\frac{\left(18^2\right)^{-2}\cdot 81}{6^3\cdot 108\cdot(24)^{-4}} = \frac{\left(2\cdot 3^2\right)^{-4}\cdot 3^4}{2^3\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\left(2^3\cdot 3\right)^{-4}} = \frac{2^3}{3^6} = \frac{8}{729}$

97. Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 5 182 000 000 000 **c) 835 000 000 000 000**

b)0,000 000 000 369 **d) 0,000 000 000 003 51**

¿Cuál tiene un orden de magnitud superior?

a) $5{,}182\cdot 10^{12}$ **b)** $3{,}69\cdot 10^{-10}$ **c)** $8{,}35\cdot 10^{14}$ **d)** $3{,}51\cdot 10^{-12}$

Tiene mayor orden de magnitud el número $8{,}35\cdot 10^{14}$.

98. Si $a = 1{,}4 \cdot 10^5$, $b = 0{,}2 \cdot 10^7$, $c = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$, escribe $a \cdot b$, $a \cdot c$, $a + b$ y $\frac{a}{b}$ en notación científica.

$a \cdot b = (1{,}4 \cdot 10^5) \cdot (0{,}2 \cdot 10^7) = 0{,}28 \cdot 10^{12} = 2{,}8 \cdot 10^{11}$

$a \cdot c = (1{,}4 \cdot 10^5) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-5}) = 5{,}18$

$a + b = (1{,}4 \cdot 10^5) + (0{,}2 \cdot 10^7) = 0{,}14 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6 = 2{,}14 \cdot 10^6$

$$\frac{a}{b} = \frac{1{,}4 \cdot 10^5}{0{,}2 \cdot 10^7} = 7 \cdot 10^{-2}$$

99. ¿A qué exponente hay que elevar 3 para obtener $\left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$?

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = \frac{3}{3^{20}} = 3^{-19} \Rightarrow$ Hay que elevar 3 a –19.

100. Calcula el valor de *k* en cada caso.

a) $\sqrt[3]{k} = \frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt[5]{k} = -2$ **c)** $\sqrt[k]{-343} = -7$

a) $k = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $k = (-2)^5 = -32$

c) $\sqrt[k]{-343} = \sqrt[k]{-7^3} = -7 \Rightarrow k = 3$

101. Actividad resuelta.

102. Ordena de mayor a menor estos números.

a) $3,\ \sqrt{10},\ \sqrt[3]{26}$ **b)** $\sqrt{2},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[5]{12}$

a) $3 = \sqrt[6]{3^6} = \sqrt[6]{729}$, $\sqrt{10} = \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{1000}$ y $\sqrt[3]{26} = \sqrt[6]{26^2} = \sqrt[6]{676} \Rightarrow \sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt{2} = \sqrt[20]{2^{10}} = \sqrt[10]{1024}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[20]{5^5} = \sqrt[20]{3125}$ y $\sqrt[5]{12} = \sqrt[20]{12^4} = \sqrt[20]{20\,736} \Rightarrow \sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

103. Calcula los valores *a*, *b*, *c* y *d* en esta igualdad: $\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$

$\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = \sqrt{2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 7^6 \cdot 3^{48}} = \sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \Rightarrow a = 5;\ b = 24;\ c = 2;\ d = 3$

104. Expresa como un solo radical.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt[4]{3} : \sqrt[3]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{8}$ **d)** $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{3^3} : \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{\frac{3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{27}{16}}$

d) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{\frac{512}{200}} = \sqrt[3]{\frac{2^9}{2^3 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}} = 4\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

105. Tres de los siguientes seis números son iguales. ¿Cuáles?

$A = \sqrt{5} + \sqrt{5}$ $B = \frac{\sqrt{500}}{5}$ $C = 2\sqrt{5}\sqrt{5}$ $D = \sqrt{20}$ $E = \sqrt{5}\sqrt{5}$ $F = 10$

$A = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$C = 2\sqrt{5}\sqrt{5} = 2 \cdot 5 = 10$

$E = \sqrt{5}\sqrt{5} = 5$

$B = \frac{\sqrt{500}}{5} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

$D = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

$F = 10$

A, *B* y *D* son iguales, pues valen $2\sqrt{5}$.

106. Opera y simplifica.

a) $\mathbf{2\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{80}}$

b) $\mathbf{4\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}}$

c) $\mathbf{3\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{375}}$

d) $\mathbf{\sqrt{27}-2\sqrt{32}+\sqrt{180}}$

a) $2\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{80}=2\sqrt{2^2\cdot 5}+3\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=4\sqrt{5}+9\sqrt{5}-4\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

b) $4\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}=4\sqrt[3]{2^4}+5\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-2\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=8\sqrt[3]{2}+15\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}=13\sqrt[3]{2}$

c) $3\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{375}=3\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-5\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=9\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}-25\sqrt[3]{3}=-14\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt{27}-2\sqrt{32}+\sqrt{180}=\sqrt{3^3}-2\sqrt{2^5}+\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}=3\sqrt{3}-8\sqrt{2}+6\sqrt{5}$

107. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\mathbf{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}}$ b) $\mathbf{3\sqrt{50}+2\sqrt{72}-4\sqrt{8}}$ c) $\mathbf{\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}}$ d) $\mathbf{\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\right):\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}$

a) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{5^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{1125}$

b) $3\sqrt{50}+2\sqrt{72}-4\sqrt{8}=3\sqrt{2\cdot 5^2}+2\sqrt{2^3\cdot 3^2}-4\sqrt{2^3}=15\sqrt{2}+12\sqrt{2}-8\sqrt{2}=19\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}=\sqrt[6]{\dfrac{9^2}{12^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{2^6\cdot 3^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{3}{2^6}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

d) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\right):(\sqrt[3]{3})^2=\left(\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{3^3}\right):\sqrt[12]{3^8}=\sqrt[12]{3}$

108. Opera y simplifica.

a) $\mathbf{\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2}$

b) $\mathbf{\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{8}\right):\sqrt[3]{4}}$

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2=3+12-2\sqrt{36}=3+12-12=3$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{8}\right):\sqrt[3]{4}=\left(2^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right):2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{-5}{12}}$

109. Actividad resuelta.

110. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\mathbf{\dfrac{3}{2\sqrt{3}}}$

b) $\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}}$

c) $\mathbf{\dfrac{5}{\sqrt[4]{1000}}}$

d) $\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}}$

e) $\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$

f) $\mathbf{\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}$

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{8^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^9}}{\left(\sqrt[4]{8}\right)^4}=\dfrac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{8}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{1000}}=\dfrac{5}{\sqrt[4]{10^3}}=\dfrac{5\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{10^4}}=\dfrac{5\sqrt[4]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[4]{10}}{2}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{3-7}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2-3}=-2-\sqrt{6}$

f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{-1}=-3-2\sqrt{2}$

111. Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^2}{3}=\dfrac{9+6\sqrt{2}}{3}=3+2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\dfrac{2x+2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}{2y}=\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

112. Calcula.

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{72}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{375}}$

b) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{72}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{375}}=\dfrac{6}{2\sqrt[3]{3^2}}-\dfrac{10}{5\sqrt[3]{3}}=\dfrac{6\cdot 5\sqrt[3]{3}-10\cdot 2\sqrt[3]{3^2}}{30}=\dfrac{30\sqrt[3]{3}-20\sqrt[3]{3^2}}{30}=\dfrac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{3}$

b) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{5\left(1+\sqrt{2}\right)+3\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{5+5\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}}{1-2}=\dfrac{8-2\sqrt{2}}{-1}=-8+2\sqrt{2}$

113. Escribe $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$ como una expresión que no tenga raíces en el denominador.

$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}=\frac{1+\sqrt[4]{2}}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt[4]{2^2}}=\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^2}}{-1}=-1-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2^3}$$

114. Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 32$

c) $\log_3 729$

e) $\log 1\,000\,000$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16}$

d) $\log_3 \dfrac{1}{81}$

f) $\log \dfrac{1}{1000}$

a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

c) $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$

e) $\log 1000\,000 = \log 10^6 = 6$

b) $\log_2 \dfrac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4$

d) $\log_3 \dfrac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$

f) $\log\dfrac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

115. Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \sqrt{8}$

c) $\log_3 \sqrt[3]{243}$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

d) $\log \sqrt[5]{100}$

f) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100}$

a) $\log_2 \sqrt{8}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

c) $\log_3 \sqrt[3]{243}=\log_3 3^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32=\log_{\frac{1}{2}} 2^5=-5$

d) $\log\sqrt[5]{100}=\log 10^{\frac{2}{5}}=\dfrac{2}{5}$

f) $\log_{\frac{1}{10}}\sqrt[3]{100}=\log_{\frac{1}{10}}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{-2}{3}}=\dfrac{-2}{3}$

116. Completa los huecos mentalmente usando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 8 = \bullet$

b) $\log_3 \bullet = 4$

c) $\log_{\bullet} 125 = 3$

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_3 81 = 4$

c) $\log_5 125 = 3$

117. Halla el valor de *x* en cada caso.

a) $\log_x 16 = -4$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$ **e)** $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{16} = -8$ **d)** $\log_{11} 1331 = x$ **f)** $\log_x 25 = 4$

a) $x^{-4} = 16 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ **c)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = x \Rightarrow x = 7^3 = 343$ **e)** $x^3 = 5^3 \Rightarrow x = 5$

b) $x^{-8} = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ **d)** $11^x = 11^3 \Rightarrow x = 3$ **f)** $x^4 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

118. ¿A qué número hay que elevar 5 para que dé un millón?

$5^x = 10^6 \Rightarrow x = \log_5 10^6 \Rightarrow x = \frac{\log 10^6}{\log 5} = 8{,}584$

119. Si log 8 ≈ 0,9031, halla:

a) **log 800** **b)** **log 2** **c)** **log 0,64** **d)** **log 40** **e)** **log 5** **f)** $\log\sqrt[5]{8}$

a) log 800 = log 8 + log 100 = 2,9031

b) $\log 2 = \frac{1}{3}\log 2^3 = \frac{1}{3}\log 8 = 0{,}301$

c) log 0,64 = log 64 – log 100 = 2log 8 – 2 = –0,1938

d) log 40 = log 10 + log 4 = 1 + 2log 2 = 1,602

e) $\log 40 = \log 8 + \log 5 \Rightarrow \log 5 = \log 40 - \log 8 = 0{,}6989$

f) $\log\sqrt[5]{8} = \frac{1}{5}\log 8 = 0{,}1806$

120. Escribe como un único logaritmo.

a) **log 16 – log 3 + log 12**

b) **log 18 – log 27 – log 2**

c) **(log 25 + log 4) – (log 8 – log 9**

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log\frac{16\cdot 12}{3} = \log 64$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2 = \log\frac{18}{27\cdot 2} = \log\frac{1}{3}$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9) = \log\frac{25\cdot 4\cdot 9}{8} = \log\frac{225}{2}$

121. Ordena los siguientes logaritmos aplicando su definición y sus propiedades.

$$\log\sqrt[3]{10};\ \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1};\ \ln\sqrt{\frac{1}{e}};\ \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3}$$

$\log\sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}$; $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 2$; $\ln\sqrt{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{2}$; $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\sqrt{\frac{1}{e}} < \log\sqrt[3]{10} < \log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{3} < \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

122. Expresa $\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx}$ como un solo logaritmo.

$$\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx} = \log\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}}{\frac{ay}{dx}} = \log\frac{x}{y}$$

123. Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo log $x \approx 0{,}70$ y log $y \approx 1{,}18$, calcula:

a) $\log(x^2 \cdot y)$ **b)** $\log \dfrac{x^3}{y^2}$ **c)** $\log\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}\right)$

a) $\log(x^2 \cdot y) = \log x^2 + \log y = 2\log x + \log y = 2 \cdot 0{,}70 + 1{,}18 = 2{,}58$

b) $\log \dfrac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3\log x - 2\log y = 3 \cdot 0{,}70 - 2 \cdot 1{,}18 = -0{,}26$

c) $\log\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}\right) = \log\sqrt{x} + \log\sqrt[3]{y^2} = \log x^{\frac{1}{2}} + \log y^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{2}{3}\log y = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}70 + \dfrac{2}{3}\cdot 1{,}18 = 1{,}14$

124. Si $\log_2 A = C$, calcula $\log_8 A$, $2^{\log_2 A}$, y $\log_2 \dfrac{1}{A}$.

$\log_8 A = \dfrac{\log_2 A}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 A}{\log_2 2^3} = \dfrac{C}{3}$ $2^{\log_2 A} = 2^C$ $\log_2 \dfrac{1}{A} = \log_2 A^{-1} = -\log_2 A = -C$

125. Toma logaritmos en estas expresiones.

a) $A = \dfrac{x^2y^3z^5}{t^4}$ **b)** $B = \dfrac{1100x^3y}{t^2}$ **c)** $C = \dfrac{\sqrt{x}yz^2}{10t^3}$

a) $\log A = \log x^2 + \log y^3 + \log z^5 - \log t^4 = 2\log x + 3\log y + 5\log z - 4\log t$

b) $\log B = \log 11 + \log 100 + \log x^3 + \log y - \log t^2 = \log 11 + 2 + 3\log x + \log y - 2\log t$

c) $\log C = \log\sqrt{x} + \log y + \log z^2 - \log 10 - \log t^3 = \dfrac{1}{2}\log x + \log y + 2\log z - 1 - 3\log t$

126. Expresa el segundo miembro de cada igualdad como un solo logaritmo y halla los valores de *A* y *B*.

a) $\log A = 3\log x + 2\log y - 5\log z$ **b)** $\log B = \dfrac{3}{2}\log x + \log y - \dfrac{2}{3}\log z - 2$

a) $\log A = \log x^3 + \log y^2 - \log z^5 \Rightarrow A = \dfrac{x^3y^2}{z^5}$ **b)** $\log B = \log\sqrt{x^3} + \log y - \log\sqrt[3]{z^2} - 2 \Rightarrow B = \dfrac{y\sqrt{x^3}}{100\sqrt[3]{z^2}}$

127. Demuestra las fórmulas de logaritmo de un cociente y logaritmo de una potencia.

Cociente:

$$\left.\begin{array}{l}\log_b M = x \Rightarrow b^x = M\\ \log_b N = y \Rightarrow b^y = N\end{array}\right\}\text{ entonces } \frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

Y volviendo a usar la definición: $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b b^{x-y} = x - y = \log_b M - \log_b N$

Potencia:

$\log_b M = x \Rightarrow b^x = M \Rightarrow$ entonces $M^r = \left(b^x\right)^r = b^{r\cdot x}$

Y volviendo a usar la definición: $\log_b\left(M^r\right) = r\cdot x = r\cdot\log_b M$

128. ¿Qué números positivos *x* verifican la siguiente igualdad? $(\log_3 x)\cdot(\log_x 5) = \log_3 5$

$\log_3 x \cdot \log_x 5 = \dfrac{\log x}{\log 3}\cdot\dfrac{\log 5}{\log x} = \dfrac{\log 5}{\log 3} = \log_3 5 \Rightarrow$ Todos los números positivos distintos de 1 verifican la igualdad.

129. Actividad resuelta.

130. Despeja *x* en estas dos expresiones.

a) $A = B(1 + C)^x$ **b)** $\log A^x = \log\sqrt{B}$

a) $A = B(1+C)^x \Rightarrow (1+C)^x = \frac{A}{B} \Rightarrow \log(1+C)^x = \log\frac{A}{B} \Rightarrow x\log(1+C) = \log\frac{A}{B} \Rightarrow x = \frac{\log\frac{A}{B}}{\log(1+C)} = \frac{\log A - \log B}{\log(1+C)}$

b) $\log A^x = \log\sqrt{B} \Rightarrow x\log A = \log\sqrt{B} \Rightarrow x = \frac{\log\sqrt{B}}{\log A} = \frac{\frac{1}{2}\log B}{\log A} = \frac{\log B}{2\log A}$

131. Tomando log 2 = 0,30 y log 3= 048, resuelve la ecuación 3^{x+3} = 135.

$3^{x+3} = 135 \Rightarrow 3^3 \cdot 3^x = 135 \Rightarrow 3^x = \frac{135}{3^3} \Rightarrow 3^x = 5 \Rightarrow \log 3^x = \log 5 \Rightarrow x\log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}$

$x = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\log\frac{10}{2}}{\log 3} = \frac{\log 10 - \log 2}{\log 3} = \frac{1-0,3}{0,48} = 1,458$

132. Actividad resuelta.

133. ¿Qué relación ha de haber entre *p* y *q* para que se cumpla que log (*p* + *q*) = log *p* + log *q*?

$\left.\begin{matrix}\log(p+q) = \log p + \log q \\ \log(p\cdot q) = \log p + \log q\end{matrix}\right\} \Rightarrow \log(p+q) = \log(p\cdot q) \Rightarrow p+q = pq \Rightarrow p = pq - q \Rightarrow p = q(p-1) \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$

134. Si log (xy^2) = 1 y log(x^2y) = 1, calcula log (*xy*).

$\log(xy) = \frac{3\log(xy)}{3} = \frac{\log(xy)^3}{3} = \frac{\log(x^3y^3)}{3} = \frac{\log(xy^2\cdot x^2y)}{3} = \frac{\log(xy^2)+\log(x^2y)}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$

135. Di si son ciertas o no estas afirmaciones.

a) **Entre dos números reales siempre hay otro.**

b) **$\log_a x$ nunca es negativo.**

c) **$\log_a x$ existe si *x* es negativo.**

d) **En (–4, –3) hay racionales, pero no enteros.**

e) **$|x| = -x$ para ciertos valores de *x*.**

a) Verdadera **c)** Falsa **e)** Verdadera

b) Falsa **d)** Verdadera

136. ¿Cómo es el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? ¿Racional o irracional?

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional.

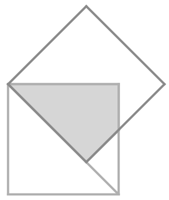
137. Ordena de menor a mayor los números 7^{-50}, 3^{-100} y 2^{-150}.

$\left.\begin{matrix}3^{-100} = 3^{-50\cdot 2} = (3^2)^{-50} = 9^{-50} \\ 2^{-150} = 2^{-50\cdot 3} = (2^3)^{-50} = 8^{-50}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 9^{-50} < 8^{-50} < 7^{-50} \Rightarrow (3^2)^{-50} < (2^3)^{-50} < 7^{-50} \Rightarrow 3^{-100} < 2^{-150} < 7^{-50}$

138. *A*, *B* y *C* son los vértices de un triángulo tales que $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 3\sqrt{5}$ y $AC = \sqrt{65}$. ¿Qué tipo de triángulo es?

Como $AB^2 = 20$, $BC^2 = 45$ y $AC^2 = 65$, se verifica el teorema de Pitágoras y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

139. Dos cuadrados de lado 1 tienen un vértice común y el lado de uno de ellos está sobre la diagonal del otro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área sombreada?



Por la simetría del dibujo deducimos que el triángulo pequeño de la derecha es rectángulo e isósceles. Así pues, el área de la zona sombreada es el área de medio cuadrado menos el área de un triángulo rectángulo isósceles de lado $\sqrt{2}-1$. Haciendo los cálculos obtenemos que Área = $\frac{1}{2}-\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2}=\sqrt{2}-1$.

140. ¿Cuál es la última cifra de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2015^3$?

El cubo de los números que terminan en 0 acaba en 0, el cubo de los números que terminan en 1 acaba en 1, el de los números que terminan en 2 acaba en 8, el de los números que terminan en 3 acaba en 7, el de los números que terminan en 4 acaba en 4, el de los números que terminan en 5 acaba en 5, el de los números que terminan en 6 acaba en 6, el de los números que terminan en 7 acaba en 3, el de los números que terminan en 8 acaba en 2 y el de los números que terminan en 9 acaba en 9. Como del 1 al 2015 hay 201 números que acaban en 0, 202 en 1, 202 en 2, 202 en 3, 202 en 4, 202 en 5, 201 en 6, 201 en 7, 201 en 8 y 201 en 9, la última cifra de la suma será $201 \cdot 0 + 202 \cdot 1 + 202 \cdot 8 + 202 \cdot 7 + 202 \cdot 4 + 202 \cdot 5 + 201 \cdot 6 + 201 \cdot 3 + 201 \cdot 2 + 201 \cdot 9 = 9070$.

Luego la última cifra de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2015^3$ será un 0.

141. Completa la igualdad $10^{-3} = 12^{-3} + 15^{-3} + \bullet^{-3}$.

Llamamos *x* a la cifra buscada.

$$x^{-3} = 10^{-3} - 12^{-3} - 15^{-3} = \frac{1}{10^3}-\frac{1}{12^3}-\frac{1}{15^3}=\frac{1}{2^3\cdot5^3}-\frac{1}{2^6\cdot3^3}-\frac{1}{3^3\cdot5^3}=\frac{2^3\cdot3^3-5^3-2^6}{2^6\cdot3^3\cdot5^3}=\frac{27}{2^6\cdot3^3\cdot5^3}=$$

$$=\frac{3^3}{2^6\cdot3^3\cdot5^3}=\frac{1}{2^6\cdot5^3}=\frac{1}{\left(2^2\right)^3\cdot5^3}=\left(\frac{1}{2^2\cdot5}\right)^3=\left(\frac{1}{20}\right)^3=20^{-3}\Rightarrow x=20$$

Por tanto, $10^{-3} = 12^{-3} + 15^{-3} + 20^{-3}$

142. Comprueba que $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ y, utilizando esta expresión, racionaliza $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$.

$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{5-2}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$$

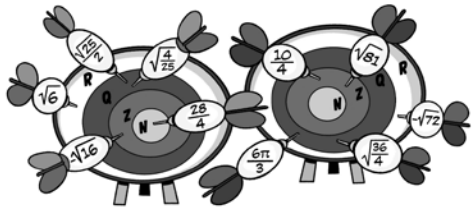
143. Si *a*, *b* y *c* son enteros positivos, ¿qué relación ha de haber entre ellos para que $\sqrt{a+\frac{b}{c}}$ y $a\sqrt{\frac{b}{c}}$ sean el mismo número?

$$\sqrt{a+\frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}\Rightarrow\left(\sqrt{a+\frac{b}{c}}\right)^2 = \left(a\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\Rightarrow a+\frac{b}{c}=a^2\cdot\frac{b}{c}\Rightarrow a=a^2\cdot\frac{b}{c}-\frac{b}{c}\Rightarrow a=\frac{b}{c}\left(a^2-1\right)\Rightarrow\frac{a}{a^2-1}=\frac{b}{c}$$

144. Si $\log_b M = \log_c N = 9$, ¿cuál es el valor de $\log_{bc} MN$?

$$\left.\begin{array}{l}\log_b M = 9 \Rightarrow b^9 = M\\ \log_c N = 9 \Rightarrow c^9 = N\end{array}\right\} \Rightarrow \log_{bc} MN = \frac{\log MN}{\log bc} = \frac{\log\left(b^9 c^9\right)}{\log bc} = \frac{\log\left[\left(bc\right)^9\right]}{\log bc} \frac{9\log\left(bc\right)}{\log bc} = 9$$

145. En la diana de matemáticas, puntúas si clavas el dardo en la franja correspondiente al número del dardo. Estas son las tiradas de Ana y Quique. ¿Quién ha obtenido más puntos?



Ana: cero fallos.

Quique: 2 fallos $\frac{10}{4} \notin \mathbb{Z}; \frac{6\pi}{3} \notin \mathbb{Q}$

Gana Ana.

146. Un país invierte el 0,17 % del PIB en ayuda al desarrollo en vez del 0,7 % que recomienda la ONU para erradicar la pobreza. Si el PIB del país es de 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Opera en notación científica.)

2 billones = $2 \cdot 10^{12}$ €

Dinero invertido = $\frac{17}{10000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^8$ € $= 3{,}4 \cdot 10^9$ €

Dinero recomendado = $\frac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^9$ € $= 1{,}4 \cdot 10^{10}$ €

Dinero no destinado = $1{,}4 \cdot 10^{10} - 3{,}4 \cdot 10^9 = 10{,}6 \cdot 10^9$ € $= 1{,}06 \cdot 10^{10}$ €

147. Cuando nació Sofía, sus padres depositaron 20 000 euros a su nombre al 10 % de interés compuesto. ¿Cuánto dinero tendrá Sofía cuando cumpla la mayoría de edad?

$C_F = 20\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^{18} = 111\,200$

Al alcanzar la mayoría de edad, Sofía tendrá 111 200 €

148. Un profesor pide a la mitad de sus alumnos que operen $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$ desarrollando por potencias, y a la otra mitad, por radicales. ¿Qué resultado obtendrá cada mitad de la clase?

Radicales: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{\left(2^3\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{2^6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[5]{2^6}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[30]{2^{36}}}{\sqrt[30]{2^{20}} \cdot \sqrt[30]{2^{15}}} = \sqrt[30]{\frac{2^{36}}{2^{20} \cdot 2^{15}}} = \sqrt[30]{2}$

Potencias: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 8^{\frac{2}{5}} \cdot 4^{\frac{-1}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{-1}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} = 2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{\frac{-2}{3}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} = 2^{\frac{36}{30}} \cdot 2^{\frac{-20}{30}} \cdot 2^{\frac{-15}{30}} = 2^{\frac{1}{30}}$

Se obtiene el mismo resultado, pues. $\sqrt[30]{2} = 2^{\frac{1}{30}}$.

149. Una cafetería incrementa cada año el precio de un café en un 4 %. Si actualmente cuesta 1,10 €, ¿podrías encontrar la fórmula que relaciona el precio del café con los años transcurridos? ¿Cuánto costará el café dentro de 5 años?

Dentro de un año el precio será $1{,}10 \cdot 1{,}04$, dentro de dos años será $1{,}10 \cdot 1{,}04^2$, dentro de tres $1{,}10 \cdot 1{,}04^3$…

Así, el precio del café dentro de x años, será $1{,}10 \cdot 1{,}04^x$.

Aplicando dicha fórmula, dentro de 5 años, el precio del café será $1{,}10 \cdot 1{,}04^5 = 1{,}34$ €.

150. ¿Cuánto tiempo hay que depositar un dinero al 4 % de interés compuesto para triplicarlo?

Sea x el dinero invertido al 4 % anual a interés compuesto.

$3x = x \cdot (1 + 0{,}04)^t$, donde t son los años que hay que depositar el dinero.

Luego $3 = 1{,}04^t \Rightarrow \log 3 = \log 1{,}04^t \Rightarrow \log 3 = t \cdot \log 1{,}04 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1{,}04} = 28{,}01 \Rightarrow$ 28 años, aproximadamente.

151. Las ondas sísmicas producidas por un terremoto son: longitudinales y de propagación rápida, *P*, y transversales y de menor velocidad, *S*. La escala de Richter mide la magnitud de un terremoto como:

$$M = \log A + 3\log(8t) - 2{,}92$$

Donde *A* es la amplitud de las ondas *S* y *t*, el tiempo transcurrido, entre la aparición de las ondas *P* y las *S*.

	t (s)	*A* (mm)	*M*
1	**8**	**15**	●
2	**15**	●	**4**
3	●	**45**	**7**

a) Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

b) Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Supón el mismo valor para *t*.)

a)

	t (s)	*A* (mm)	*M*
1	**8**	**15**	3,67
2	**15**	4,81	**4**
3	71,2	**45**	**7**

b) Magnitud 9: log A = 9 – 3log(8t) + 2,92

Magnitud 6: log A´= 6 – 3log(8t) + 2,92

Restando las expresiones anteriores: $\log A - \log A' = 3 \Rightarrow \log \frac{A}{A'} = 3 \Rightarrow \frac{A}{A'} = 10^3$

152. Dos capitales, uno doble del otro, se colocan a interés compuesto: el menor al 10 %, y el mayor, al 6 %. ¿Al cabo de cuántos años se habrán igualado los capitales finales?

Llamamos *x* al capital colocado al 10 % y 2*x* al capital colocado al 6 %.

El capital colocado al 10 % se convertirá en $C_F = x(1+0{,}10)^t$ y, el colocado al 6 %, $C_{F'} = 2x(1+0{,}06)^t$.

$x(1+0{,}10)^t = 2x(1+0{,}06)^t \Rightarrow 1{,}1^t = 2 \cdot 1{,}06^t \Rightarrow \log 1{,}1^t = \log(2 \cdot 1{,}06^t) \Rightarrow t \cdot \log 1{,}1 = \log 2 + t \cdot \log 1{,}06 \Rightarrow$

$t \cdot \log 1{,}1 - t \cdot \log 1{,}06 = \log 2 \Rightarrow t \cdot (\log 1{,}1 - \log 1{,}06) = \log 2 \Rightarrow 0{,}016t = 0{,}301 \Rightarrow t = 18{,}81$. Casi 19 años.

153. Si $D = a^2 + b^2 + c^2$ con *a* y *b* enteros consecutivos y $c = a \cdot b$, $\sqrt{D}$ es:

A. Siempre un entero par.

B. Algunas veces un entero impar, otras no.

C. Siempre un entero impar.

D. Algunas veces un racional, otras no.

Como *a* y *b* son enteros consecutivos, entonces $b = a + 1$.

Luego $D = a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2(a^2 + 2a + 1) = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$.

Como $(a^2 + a + 1)^2 > 0$, entonces $\sqrt{D} = a^2 + a + 1$.

$\sqrt{D} = a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ y, como $a(a+1)$ es siempre par, entonces $a(a+1) + 1$ es entero impar.

Por tanto, $\sqrt{D}$ es entero impar.

La respuesta correcta es la C.

154. Si x *verifica* que $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$, entonces:

A. $x > \frac{1}{2}$ o $x < -\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{2} < x < 3$

C. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

D. $x > \frac{1}{2}$

Si $x > 0$:

Las condiciones $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$ son equivalentes a $1 < 2x$ y $1 > -3x$, respectivamente; es decir, $\frac{1}{2} < x$ y $x > -\frac{1}{3}$, que, al ser $x > 0$, se reducen a $\frac{1}{2} < x$.

Si $x < 0$:

Las condiciones $\frac{1}{x} < 2$ y $\frac{1}{x} > -3$ son equivalentes a $1 > 2x$ y $1 < -3x$, es decir, $x < \frac{1}{2}$ y $x < -\frac{1}{3}$, que, al ser $x < 0$, se reducen a $x < -\frac{1}{3}$. Así pues, los números x que verifican las desigualdades dadas son los que verifican $x > \frac{1}{2}$ y los que verifican $x < -\frac{1}{3}$.

La respuesta correcta es la A.

155. A = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y B = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ verifican:

A. $A^2 > 1$

B. $A = B$

C. $A < B$

D. $A > B$

$A^2 = \frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ y $B^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Como $A^2 = B^2$ y ambos son positivos, entonces $A = B$.

La respuesta correcta es la B.

156. Si $\log_2 a + \log_2 b \geq 6$, el valor mínimo de $a + b$ es:

A. $2\sqrt{2}$

B. 6

C. $8\sqrt{2}$

D. 16

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2 (ab) > 6$, siendo a, $b > 0$.

Por tanto, $ab > 2^6 = 64$.

El valor mínimo de $a + b$ se dará cuando $ab = 64$.

Si dos números tienen producto constante, su suma será mínima cuando sean iguales, es decir, $a + b = 16$.

La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

157. La profesora ha pedido resolver este problema por parejas:

Si *a* y *b* son números reales positivos, simplifica la expresión $E=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}-\sqrt{a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{a^2+b^2+2ab}+\sqrt{a^2+b^2-2ab}}$

Alicia y Pedro transforman la expresión teniendo en cuenta el cuadrado de un binomio.

$$E=\frac{\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(a-b)^2}}=\frac{a+b-(a-b)}{a+b+a-b}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$$

- **Pedro comprueba con *a* = 5 y *b* = 2 que el resultado es correcto:**

  $\dfrac{\sqrt{5^2+2^2+2\cdot 5\cdot 2}-\sqrt{5^2+2^2-2\cdot 5\cdot 2}}{\sqrt{5^2+2^2+2\cdot 5\cdot 2}+\sqrt{5^2+2^2-2\cdot 5\cdot 2}}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{\sqrt{49}+\sqrt{9}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ **En efecto, obtuvo el resultado esperado** $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{5}$

- **Alicia comprueba el resultado con otros valores, a = 5, b = 7.**

  $\dfrac{\sqrt{5^2+7^2+2\cdot 5\cdot 7}-\sqrt{5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7}}{\sqrt{5^2+7^2+2\cdot 5\cdot 7}+\sqrt{5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7}}=\dfrac{\sqrt{144}-\sqrt{4}}{\sqrt{144}+\sqrt{4}}=\dfrac{10}{14}=\dfrac{5}{7}$ **Pero según esta simplificación que han realizado debería haber obtenido** $\dfrac{b}{a}=\dfrac{7}{5}$.

¿Dónde está el error?

La expresión no es cierta si $b > a$. En este caso $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$ y el desarrollo sería:

$$E=\frac{a+b-(b-a)}{a+b+b-a}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$$

PONTE A PRUEBA

¿Como cuánto?

Actividad resuelta

Publicidad engañosa

Un anuncio televisivo propone cuatro tipos de ofertas a los clientes de unos grandes almacenes.

1. **Estudia cada una de las ofertas y di cuál es la mejor si quieres comprar 2, 3, 4, 5 o 6 productos iguales.**

	2 artículos	3 artículos	4 artículos	5 artículos	6 artículos
Descuento oferta 3 x 2	0 %	33,33 %	25 %	20 %	33,33 %
Descuento oferta 50%	25 %	16,66 %	25 %	20 %	25 %
Descuento oferta 20%	20 %	13,33 %	20 %	16 %	20 %
Descuento oferta 30%	20 %	30 %	22,5 %	18 %	30 %

2. **La publicidad da a entender que la oferta descuento 20% es la más conveniente.**

   a) ¿Es cierto en todos los casos?

   b) ¿Qué ventajas puede tener sobre las otras?

   a) No es cierto siempre. Por ejemplo, si se compran 3 artículos iguales es la oferta menos conveniente.

   b) Esta oferta tiene la ventaja de que se hace un descuento del 20% únicamente comprando dos artículos. Aún así, incluso en este caso, hay otra oferta mejor (50%).

El logaritmo del amoniaco

Las siglas pH significan "potencial de hidrógeno". Se trata de una escala que mide cómo de ácida o básica es una sustancia. Los ácidos fuertes, como el ácido sulfúrico, tienen altas concentraciones de iones de hidrógeno, y las soluciones alcalinas fuertes, como la sosa cáustica, tienen concentraciones bajas. La concentración de una sustancia se expresa como el número de moles por litro. Por ejemplo, el vinagre tiene 0,001 mol/l. Para evitar trabajar con números tan pequeños, en 1909 el químico danés Sørensen construyó una escala logarítmica para medir las concentraciones: el pH. El pH es el opuesto del logaritmo de la concentración de moles de iones de hidrógeno.

$$\textbf{pH (vinagre)} = -\log 0{,}001 = -\log(10^{-3}) = 3$$

- **Si el pH = 7, se dice que la sustancia es neutra.**
- **Si el pH < 7, es ácida.**
- **Si el pH > 7, es básica.**

Por ejemplo, el pH del amoniaco es 12, y el del vino, 4.

1. **La concentración mínima es de 10^{-14} moles/litro. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar el pH?**

   El valor máximo que puede tomar el pH es $-\log(10^{-14}) = 14$.

2. **Considera el amoniaco, el vino y el vinagre.**

   a) ¿Cuáles de ellos son básicos y cuáles ácidos?

   b) ¿Cuál es la concentración de moles por litro en cada uno de ellos?

   c) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de iones de hidrógeno en el amoniaco que en el vino?

   a) El amoniaco es básico y, el vino y el vinagre, ácidos.

   b) La concentración del amoniaco es 10^{-12} moles/litro, la del vino, 10^{-4}, y la del vinagre, 10^{-3}.

   c) La concentración del amoniaco es $10^{-4} : 10^{-12} = 10^{8}$ veces mayor que la del vino.

3. **¿Cuántas veces es más ácida una sustancia cuyo pH es 2 que una cuyo pH es 4?**

Como la acidez de la sustancia que tiene pH 2 es 10^{-2} y de la que tiene pH 4 es 10^{-4}, es 100 veces más ácida.

4. **Para el cuerpo humano son corrosivas las sustancias con un pH menor que 3,5, y son cáusticas aquellas con un pH superior a 11,5. Relaciona el pH con las sustancias e indica cuáles no son adecuadas para el cuerpo humano.**

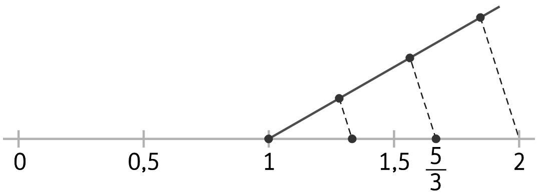
Zumo de limón	Café	Leche	Dentífrico	Lejía
pH = 5	pH = 6,5	pH = 2,3	pH = 9,9	pH = 13

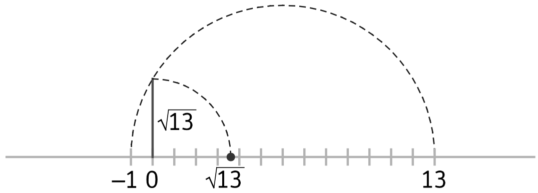
pH limón = 2,3; pH café = 5; pH leche = 6,5; pH dentífrico = 9,9; pH lejía = 13

El amoniaco y la pasta de dientes no son sustancias adecuadas para el cuerpo humano.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Representa en la recta real $\frac{5}{3}$ y $\sqrt{13}$. ¿Son racionales o irracionales?**



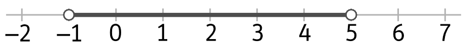


$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ es racional.

$\sqrt{13}$ es irracional.

2. **Un número real x cumple $|x - 2| < 3$. Describe los posibles valores de x gráficamente, con intervalos y mediante desigualdades.**

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$



3. **Escribe en notación científica el resultado de: $(0,26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8,53 \cdot 10^{9})^2 + 7,2 \cdot 10^{13}$**

$(0,26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8,53 \cdot 10^{9})^2 + 7,2 \cdot 10^{13} = (0,26 \cdot 10^{-4}) \cdot (72,7609 \cdot 10^{18}) + 7,2 \cdot 10^{13} = 18,917834 \cdot 10^{14} + 7,2 \cdot 10^{13} =$
$1,8917834 \cdot 10^{15} + 0,072 \cdot 10^{15} = 1,9637834 \cdot 10^{15}$

4. **Realiza las operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4$

d) $4\sqrt{50} - 3\sqrt{128} + 5\sqrt{72}$

a) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{2^5} : \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^{-3}}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{18}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^4 = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

d) $4\sqrt{50} - 3\sqrt{128} + 5\sqrt{72} = 20\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 30\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

5. Opera y simplifica.

a) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ **c)** $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)^2$

b) $2\sqrt{48}-3\sqrt{675}+\sqrt{588}$ **d)** $\left(2+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$

a) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=16-5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{48}-3\sqrt{675}+\sqrt{588}=8\sqrt{3}-45\sqrt{3}+14\sqrt{3}=-23\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)^2=12+3+2\sqrt{36}=27$

d) $\left(2+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)=6-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4=2+4\sqrt{2}$

6. Calcula el valor de *x* en estas igualdades.

a) $4^x=(2^{-3})^5$ **b)** $\left(\sqrt{5}\right)^x=25$ **c)** $0{,}001^{-5}\cdot 100^x=0{,}01^5$ **d)** $0{,}25^x=16$

a) $4^x=(2^{-3})^5\Rightarrow 2^{2x}=2^{-15}\Rightarrow x=-7{,}5$

c) $0{,}001^{-5}\cdot 100^x=0{,}01^5\Rightarrow 10^{15}\cdot 10^{2x}=10^{-10}\Rightarrow x=-12{,}5$

b) $\left(\sqrt{5}\right)^x=25\Rightarrow 5^{\frac{x}{2}}=5^2\Rightarrow x=4$

d) $0{,}25^x=16\Rightarrow 4^{-x}=4^2\Rightarrow x=-2$

7. Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{4\sqrt{8}}{8}=\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}=\dfrac{\sqrt[3]{12^2}}{12}=\dfrac{2\sqrt[3]{18}}{12}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{6}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$

8. Sabiendo que log 2= 0,301…., calcula:

a) **log 5** **b)** **log 20** **c)** **log 16** **d)** $\log_5 2$

a) log 5 = log 10 – log 2= 0,699

c) log 16 = 4log 2 = 1,204

b) log 20 = log 2 + log 10 = 1,301

d) $\log_5 2=\dfrac{\log 2}{\log 5}=\dfrac{0{,}301}{0{,}699}=0{,}431$

9. Toma logaritmos en la expresión $A=\dfrac{x^3\sqrt[7]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^2}$.

$$A=\frac{x^3\sqrt[7]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^2}\Rightarrow \log A=\log\frac{x^3\sqrt[7]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^2}\Rightarrow \log A=3\log x+\frac{2}{7}\log y+\frac{3}{4}\log z-2\log t$$

10. Elimina los logaritmos en la expresión $\log A=\dfrac{1}{5}\log x+\dfrac{2}{9}\log y-8\log z$.

$$\log A=\frac{1}{5}\log x+\frac{2}{9}\log y-8\log z\Rightarrow \log A=\log\sqrt[5]{x}+\log\sqrt[9]{y^2}-\log z^8\Rightarrow \log A=\log\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[9]{y^2}}{z^8}\Rightarrow A=\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[9]{y^2}}{z^8}$$