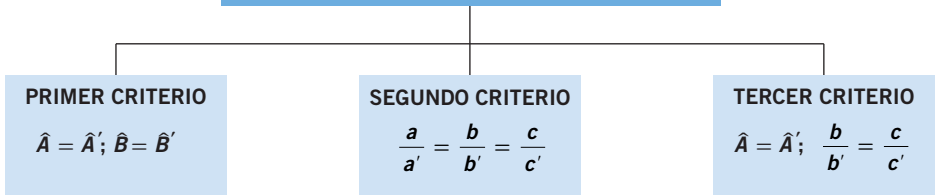
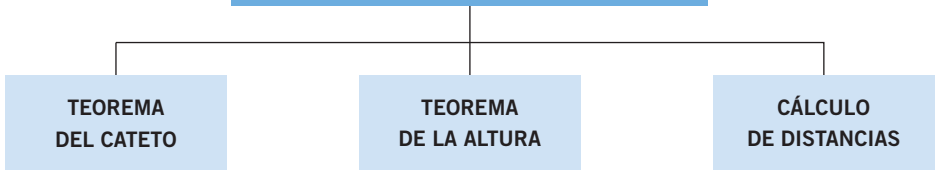


TEOREMA DE TALES

**CRITERIOS DE SEMEJANZA
DE TRIÁNGULOS**



**SEMEJANZA EN
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS**



**SEMEJANZA EN ÁREAS
Y VOLÚMENES**

Enigmas

Fue un cortejo en toda regla: el primer encuentro sorprendió, la segunda vez el interés creció hasta límites insospechados, y a partir ahí esperábamos cada misiva con la impaciencia de un amante, pues realmente nos conquistó.

Así explicaba Roberval la relación de Pierre de Fermat con el grupo de Mersenne.

Mientras paseaban por el claustro del monasterio, Roberval y el padre Mersenne charlaban animadamente acerca de Pierre de Fermat.

—Al principio, cuando leímos los problemas que proponía en su carta, pensamos que era un pobre loco —recordaba riendo Roberval—. Sin embargo, al resolverlos nos dimos cuenta de que las respuestas a sus preguntas abrían nuevos caminos en el mundo de las Matemáticas.

—Las Parábolas de Nuestro Señor nos enseñan que unas historias corrientes pueden encerrar la esencia de la doctrina cristiana; con sus preguntas, Fermat nos ha dado una lección parecida: la pregunta adecuada abre caminos alternativos en la senda del conocimiento.

La campana, llamando a la oración, y un amistoso apretón de manos pusieron término a la visita.

El último enigma de Fermat tardó en resolverse tres siglos, y dice que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para ningún exponente mayor que 2. Escribe la ecuación y encuentra una solución para $n = 2$.

Si $n = 2$, tenemos que:

$$x^n + y^n = z^n \rightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Así, para cualquier terna pitagórica se cumplirá esta ecuación.

Por ejemplo:

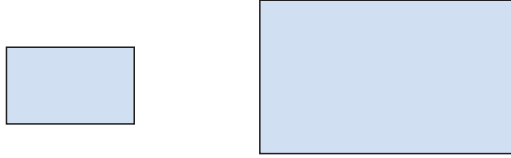
$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{array} \right\} \rightarrow 4^2 + 3^2 = 5^2$$



Semejanza

EJERCICIOS

001 Razona si son semejantes los dos rectángulos de la figura.



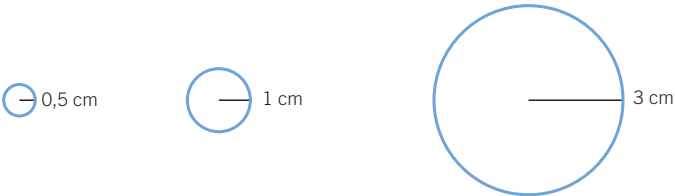
En caso afirmativo, averigua cuál es la razón de semejanza.

Son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales y los lados son proporcionales. La razón de semejanza es 2.

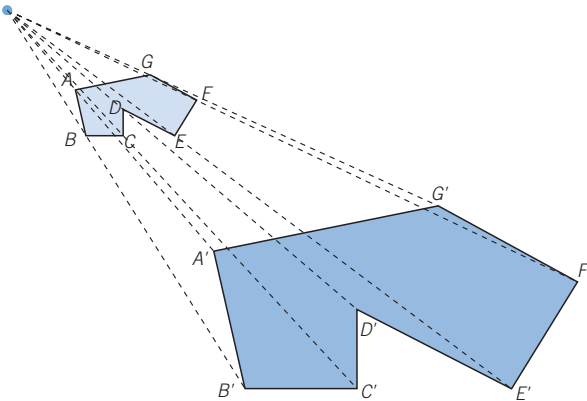
002 Ana ha dibujado dos cuadrados cuyos lados miden 1 y 3 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? Calcula su razón de semejanza.

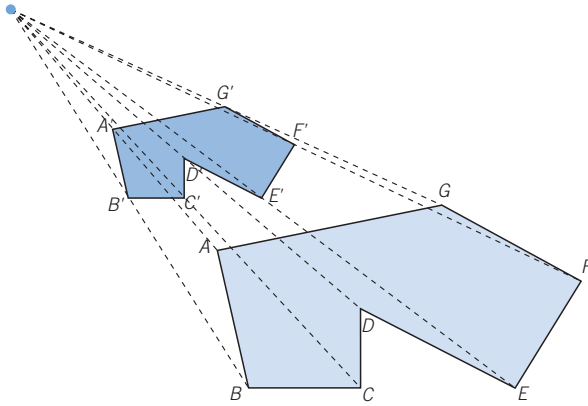
Todos los cuadrados son semejantes y, en este caso, la razón de semejanza es 3.

003 Dibuja dos figuras semejantes a una circunferencia de 1 cm de radio, con razones de semejanza 3 y $\frac{1}{2}$.

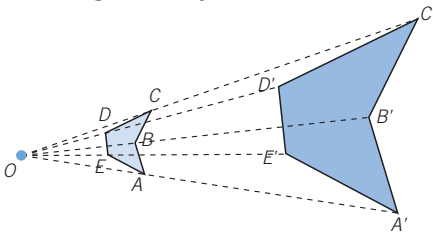


004 Calca esta figura y construye dos figuras semejantes a ella con razones 3 y 0,5.

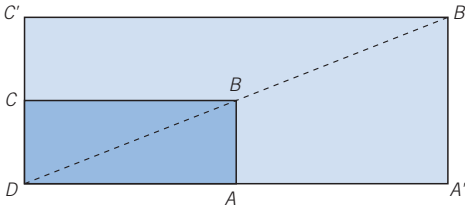




005 Completa la figura semejante.



006 Dibuja un rectángulo semejante a otro, con razón 2, si el punto O es uno de sus vértices.



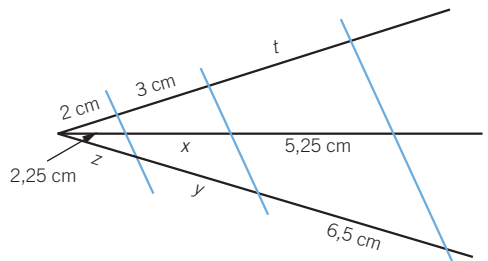
007 Calcula las distancias desconocidas.

$$\frac{2,25}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = 3,375 \text{ cm}$$

$$\frac{2,25}{2} = \frac{5,25}{t} \rightarrow t = 4,6 \widehat{\text{ cm}}$$

$$\frac{6,5}{5,25} = \frac{z}{2,25} \rightarrow z = 2,79 \text{ cm}$$

$$\frac{6,5}{5,25} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{6,5}{5,25} = \frac{y}{3,375} \rightarrow y = 4,18 \text{ cm}$$

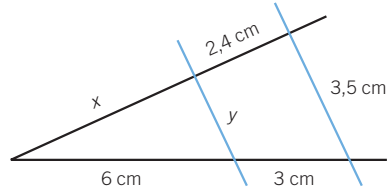


Semejanza

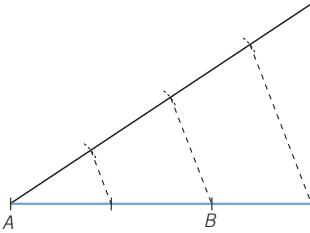
008 Halla las distancias que faltan.

$$\frac{2,4}{3} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 4,8 \text{ cm}$$

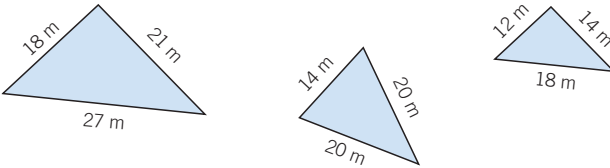
$$\frac{3,5}{9} = \frac{y}{6} \rightarrow y = 2,3 \text{ cm}$$



009 Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 4 cm en tres partes iguales.



010 Comprueba si los siguientes triángulos son semejantes o no.



Utilizando el segundo criterio de semejanza, se comprueba que son semejantes los triángulos primero y tercero, y su razón de semejanza

$$\text{es: } r = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{27}{18} = 1,5.$$

011 Razona la semejanza de dos triángulos si:

a) Sus lados miden 2, 4 y 6 cm, y 3, 6 y 9 cm, respectivamente.

b) Son triángulos rectángulos isósceles.

a) Por el segundo criterio, son semejantes, porque sus lados son proporcionales.

b) Por el primer criterio, son semejantes, pues tienen sus ángulos iguales.

012 ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que dos triángulos isósceles sean semejantes? ¿Y si fueran equiláteros?

Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen el mismo ángulo formado por los lados iguales.

Los triángulos equiláteros son siempre semejantes, ya que tienen sus ángulos iguales.

- 013** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y un cateto 4 cm, y la hipotenusa de otro mide 20 cm y un cateto 8 cm. ¿Son semejantes los triángulos?

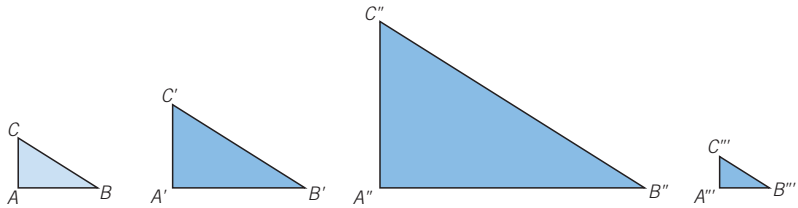
El otro cateto del primer triángulo mide: $c = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84}$ cm

El otro cateto del segundo triángulo mide:

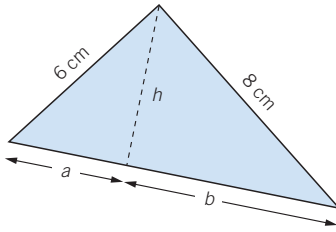
$$c' = \sqrt{400 - 64} = \sqrt{336} = 2\sqrt{84}$$

Por tanto, sus lados son proporcionales, y aplicando el segundo criterio, los triángulos son semejantes.

- 014** Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo, y construye tres triángulos semejantes a él.



- 015** Calcula las medidas a , b y h .



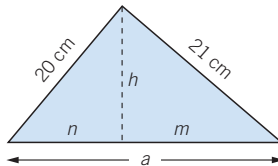
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{b}{8} \rightarrow b = 6,4 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{a}{6} \rightarrow a = 3,6 \text{ cm}$$

$$\frac{6,4}{h} = \frac{h}{3,6} \rightarrow h^2 = 23,04 \rightarrow h = 4,8 \text{ cm}$$

- 016** Halla la medida de la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa de este triángulo rectángulo.



$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{400 + 441} = 29 \text{ cm}$$

$$\frac{20}{29} = \frac{n}{20} \rightarrow n = 13,79 \text{ cm}$$

$$\frac{21}{29} = \frac{m}{21} \rightarrow m = 15,21 \text{ cm}$$

$$h^2 = 13,79 \cdot 15,21 \rightarrow h = 14,48 \text{ cm}$$

Semejanza

- 017** Determina la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 cm, respectivamente.

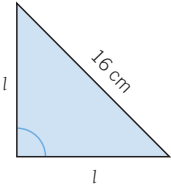
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{n}{5} \rightarrow n = 1,92 \text{ cm}$$

$$\frac{12}{13} = \frac{m}{12} \rightarrow m = 11,08 \text{ cm}$$

$$h^2 = 1,92 \cdot 11,08 \rightarrow h = 4,61 \text{ cm}$$

- 018** Calcula la altura, el perímetro y el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 16 cm.



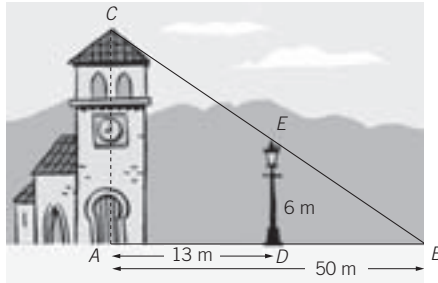
$$16^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l^2 = \frac{256}{2} \rightarrow l = \sqrt{128} = 11,31 \text{ cm}$$

$$\text{Altura} = l = 11,31 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot l + 16 = 38,62 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{128} \cdot \sqrt{128}}{2} = 64 \text{ cm}^2$$

- 019** Los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{ADE} son semejantes.



- a) Escribe la relación de semejanza que cumplen los triángulos.
b) Halla la altura de la torre.

a) La razón de semejanza es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{50}{50 - 13} = 1,351$$

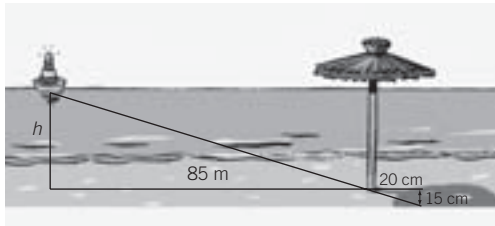
b) $\frac{h}{50} = \frac{6}{50 - 13} \rightarrow h = \frac{50 \cdot 6}{37} = 8,1 \text{ m}$

- 020** Un niño situado a 3 m de un charco, ve reflejado en él un nido de cigüeña sobre una torre. ¿A qué altura se encuentra el nido, si el niño mide 1,50 m y la distancia del charco a la torre es 50 m?

Llamando h a la altura de la torre, y aplicando las relaciones de semejanza de triángulos, se obtiene:

$$\frac{h}{1,5} = \frac{50}{3} \rightarrow h = \frac{50 \cdot 1,5}{3} = 25 \text{ m}$$

- 021** ¿Qué distancia hay de la boya a la playa?



$$\frac{85}{h} = \frac{0,2}{0,15}$$

$$h = \frac{85 \cdot 0,15}{0,2} = 63,75 \text{ m}$$

- 022** Las dimensiones de un campo de fútbol son 70 y 100 m, respectivamente. ¿Cuál es la superficie de un futbolín hecho a escala 1:75?

La razón de semejanza es $r = \frac{1}{75}$.

$$A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \cdot 70 \cdot 100 = \frac{7.000}{75^2} = 1,244 \text{ m}^2$$

- 023** Si el volumen de un silo es de 45.000 m³, ¿cuál será el volumen de su maqueta a escala 1:40?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{40} = 0,025$; ya que la escala es 1:40.

$$V = r^3 \cdot V_{\text{real}} = (0,025)^3 \cdot 45.000 = 0,00015625 \cdot 45.000 = 0,703125 \text{ m}^3$$

- 024** A Carlos le han regalado una maqueta de un barco a escala 1:100.

- a) Si el barco real desplaza 3.671 toneladas de agua, ¿cuánto desplazaría la maqueta?
 b) Si la superficie real mide 3.153 m², ¿cuánto mide la superficie de las velas de la maqueta?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{100} = 0,01$.

a) $V = r^3 \cdot V_{\text{real}} = (0,01)^3 \cdot 3.671 = 0,000001 \cdot 3.671 = 0,003671$ toneladas

El barco de la maqueta desplaza 3,671 kg de agua.

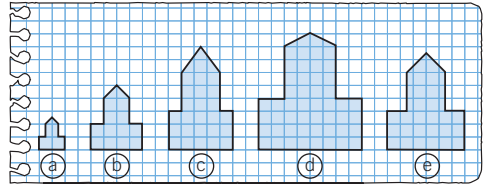
b) $A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = (0,01)^2 \cdot 3.153 = 0,0001 \cdot 3.153 = 0,3153 \text{ m}^2$

Semejanza

ACTIVIDADES

- 025** Indica qué polígonos son semejantes entre sí, y calcula su razón de semejanza.

Son semejantes los polígonos a), b) y e).
La razón de semejanza de a) y b) es 2 y la razón de semejanza de a) y e) es 3.



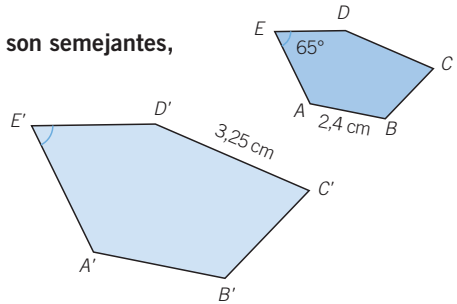
- 026** Los pentágonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son semejantes, con razón de semejanza $r = \frac{5}{2}$.

- a) ¿Cuánto mide el segmento $A'B'$?
b) ¿Cuál es la amplitud de \hat{E}' ?
c) Calcula la medida de CD .

a) $\overline{A'B'} = \frac{5}{2} \cdot \overline{AB} = 6 \text{ cm}$

b) La amplitud de \hat{E}' es la misma que la amplitud de \hat{E} : 65° .

c) $\overline{CD} = \frac{2}{5} \cdot \overline{C'D'} = 1,3 \text{ cm}$



- 027** Halla la longitud de los lados de un triángulo semejante a otro de lados 5, 6 y 8 cm, respectivamente, con razón de semejanza $r = 1,6$.

Los lados medirán 6; 9,6 y 12,8 cm, respectivamente.

028 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LOS LADOS DE UN POLÍGONO SEMEJANTE A OTRO, CONOCIDO SOLO SU PERÍMETRO?

Calcula los lados de un pentágono si su perímetro es 180 cm y es semejante a otro cuyos lados miden 4, 5, 7, 9 y 11 cm, respectivamente.

PRIMERO. Se halla la razón de semejanza dividiendo ambos perímetros.

$$P = 180 \text{ cm} \quad P' = 4 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \text{ cm}$$

$$P = r \cdot P' \rightarrow r = \frac{P}{P'} = \frac{180}{36} = 5$$

SEGUNDO. Para calcular la longitud de los lados, se multiplica cada lado conocido del otro pentágono por la razón de semejanza.

$$a = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm} \quad d = 5 \cdot 9 = 45 \text{ cm}$$

$$b = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm} \quad e = 5 \cdot 11 = 55 \text{ cm}$$

$$c = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}$$

- 029** Los lados de un triángulo miden $a = 7$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula cuánto miden los lados de un triángulo semejante cuyo perímetro es 125 cm.

Siendo m , n y s los lados del triángulo y r la razón de semejanza, se verifica:

$$m = 7r \quad n = 8r \quad s = 10r$$

Teniendo en cuenta que el perímetro del nuevo triángulo es 125 cm:

$$m + n + s = 125 \rightarrow 7r + 8r + 10r = 125 \rightarrow 25r = 125 \rightarrow r = 5$$

La longitud de los lados del nuevo triángulo es:

$$m = 35 \text{ cm} \quad n = 40 \text{ cm} \quad s = 50 \text{ cm}$$

- 030** Dibuja dos polígonos que tengan los lados proporcionales y no sean polígonos semejantes.

Hay que dibujar un cuadrado y un rombo cuyos ángulos no sean rectos; así los lados serían proporcionales, pues son iguales, pero los polígonos no son semejantes.

- 031** Si dos cuadriláteros tienen sus ángulos iguales, ¿son semejantes? Pon un ejemplo.

No necesariamente, puesto que dos rectángulos tienen sus ángulos iguales, pero sus lados no tienen por qué ser proporcionales.

- 032** Razona si son ciertas estas afirmaciones.

- Todos los cuadrados son semejantes.
- Todos los rombos son semejantes.
- Todos los hexágonos regulares son semejantes.

a) Cierta. Todos los ángulos son rectos y los lados son proporcionales.

b) Falsa. Hay rombos que no tienen los ángulos iguales.

c) Cierta. Todos los hexágonos regulares son semejantes, porque tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

- 033** Tenemos tres cuadriláteros A , B y C semejantes. La razón de semejanza de B respecto de A es 2,6 y la de C respecto de A es 0,8. Calcula.

- La razón de semejanza de A respecto de B .
- La razón de semejanza de C respecto de B .

$$a) r = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13}$$

$$b) r = \frac{0,8}{2,6} = \frac{4}{13}$$

Semejanza

034



Sabiendo que la razón de semejanza del polígono A respecto del polígono B es $r = 1,5$; indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

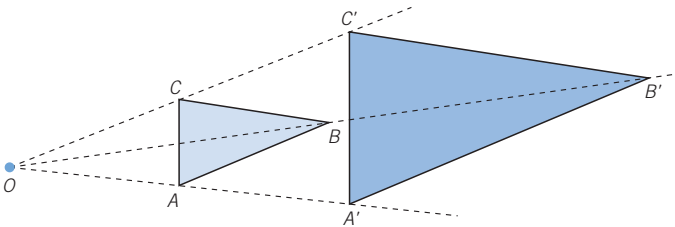
- a) B es un polígono de mayor tamaño que A .
- b) Cada lado del polígono B mide 1,5 cm más que cada lado del polígono A .
- c) Los ángulos del polígono B son 1,5 veces mayores que los del polígono A .
- d) Las longitudes de los lados de B multiplicadas por 1,5 miden igual que los lados de A .

- a) Falsa b) Falsa c) Falsa d) Verdadera

035



Construye un triángulo semejante a \widehat{ABC} , utilizando el punto O , y cuya razón sea $r = 2$.



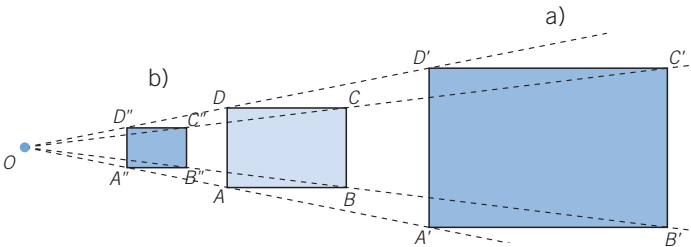
036



Dibuja un cuadrilátero en tu cuaderno y elige un punto exterior O .

Dibuja las figuras semejantes con razón de semejanza:

- a) $r = 2$ b) $r = 0,5$

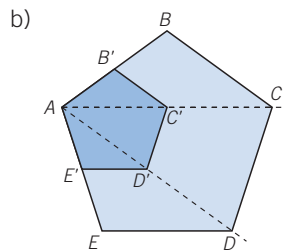
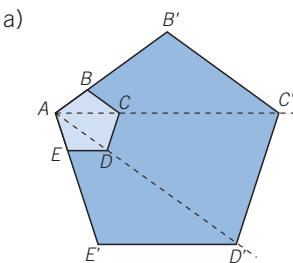


037



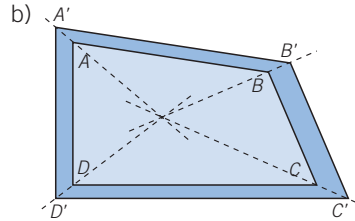
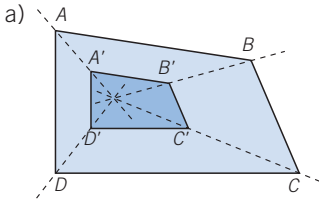
Dibuja un pentágono en tu cuaderno y elige uno de sus vértices para construir un pentágono semejante con razón de semejanza:

- a) $r = 3,5$ b) $r = 0,5$



038 Dibuja un trapezoide. Toma un punto interior a él, y construye dos trapezoides semejantes con razón de semejanza:

- a) $r = 0,4$ b) $r = 1,2$



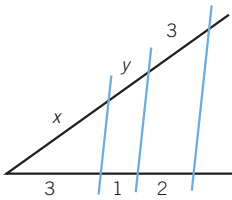
039 Pon un ejemplo de dos figuras semejantes, con razón de semejanza:

- a) $0 < r < 1$ b) $r > 1$

- a) Por ejemplo, un cuadrado, de 4 cm de lado, y otro cuadrado, de 2 cm de lado.
 b) Por ejemplo, un triángulo equilátero, de 3 cm de lado, y otro triángulo equilátero, de 5 cm de lado.

040 Calcula las longitudes desconocidas.

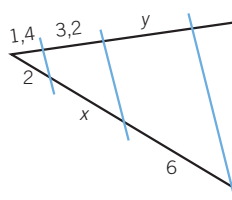
a)



$$a) \frac{3}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = 4,5 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{y}{1} \rightarrow y = 1,5 \text{ cm}$$

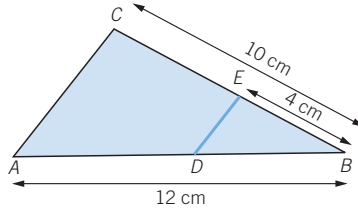
b)



$$b) \frac{2}{1,4} = \frac{x}{3,2} \rightarrow x = 4,57 \text{ cm}$$

$$\frac{1,4}{2} = \frac{y}{6} \rightarrow y = 4,2 \text{ cm}$$

041 ¿Cuánto mide \overline{DB} ? ¿Se puede hallar \overline{DE} ?



$$\frac{12}{10} = \frac{\overline{DB}}{4} \rightarrow \overline{DB} = 4,8 \text{ cm}$$

La medida de \overline{DE} no se puede calcular, porque faltan datos como, por ejemplo, el valor de \overline{AC} .

Semejanza

042 HAZLO ASÍ

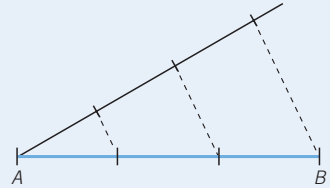
¿CÓMO SE DIVIDE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES?

Divide un segmento cuya longitud es 4 cm en tres partes iguales.

PRIMERO. Se traza una recta secante al segmento en uno de sus extremos.

SEGUNDO. Se marcan en la recta tres segmentos consecutivos de igual longitud y se une, mediante una recta, la última marca con el extremo del segmento.

TERCERO. Se trazan paralelas a esta recta que pasen por las otras marcas.

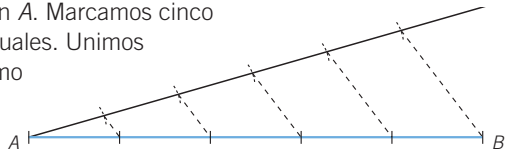


El segmento AB queda dividido en tres partes iguales por el teorema de Tales.

043 Divide gráficamente un segmento en cinco partes iguales y explica cómo lo haces.



Se traza una recta secante en A . Marcamos cinco segmentos consecutivos e iguales. Unimos la última marca con el extremo del segmento y trazamos las paralelas.

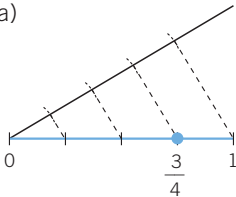


044 Representa, de forma exacta en la recta real, los siguientes números racionales.



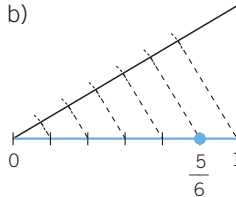
a) $\frac{3}{4}$

a)



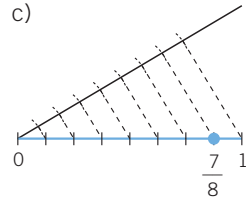
b) $\frac{5}{6}$

b)



c) $\frac{7}{8}$

c)



045 Aplicando el teorema de Tales, divide un segmento en dos partes, una doble que la otra.

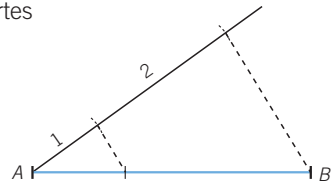


Esto equivale a dividir el segmento en dos partes proporcionales a 2 y 1.

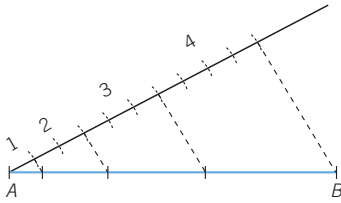
Trazamos una recta secante que pase por uno de los extremos, y marcamos en ella una medida correspondiente a 1 y otra medida que sea doble que la anterior, correspondiente a 2.

Se une la última marca con el otro extremo del segmento y, después, se traza una paralela que pase por la otra marca.

Las rectas que hemos trazado dividen el segmento en dos partes, siendo una doble que la otra.

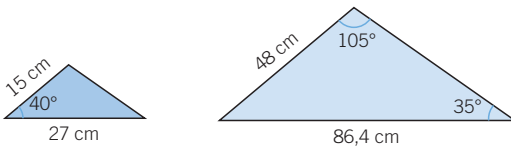


046 Utilizando el teorema de Tales, divide un segmento en partes proporcionales a 3, 4, 2 y 1.

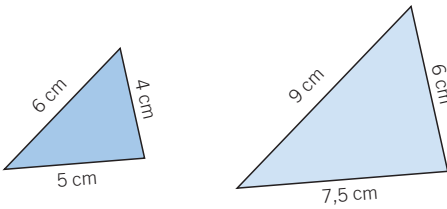


047 Indica si son semejantes estos triángulos.

a)



b)

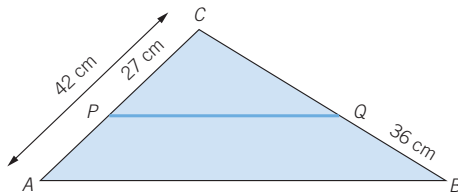


a) Son semejantes, ya que tienen un ángulo igual de 40° , y los dos lados

contiguos son proporcionales: $\frac{48}{15} = \frac{86,4}{27}$

b) Son semejantes, porque tienen los lados proporcionales: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{7,5}{5}$

048 En el triángulo \widehat{ABC} se traza un segmento PQ paralelo a AB . Calcula BC .
¿Se puede hallar AB ?



Aplicando el teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BQ}} \rightarrow \frac{42}{15} = \frac{\overline{BC}}{36} \rightarrow \overline{BC} = \frac{42 \cdot 36}{15} = 100,8 \text{ cm}$$

No se puede calcular el segmento AB porque faltan datos.

Semejanza

049



Indica si un triángulo, cuyos lados miden a , b y c , es semejante a los triángulos cuyos lados miden:

a) $3a$, $3b$ y $3c$

b) $a + 3$, $b + 3$ y $c + 3$

c) $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ y $\frac{c}{3}$

a) $\frac{3a}{a} = \frac{3b}{b} = \frac{3c}{c} \rightarrow$ Son semejantes.

b) $\frac{a+3}{a} \neq \frac{b+3}{b} \neq \frac{c+3}{c} \rightarrow$ No son semejantes.

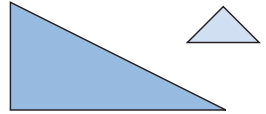
c) $\frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}} = \frac{\frac{b}{3}}{\frac{b}{3}} = \frac{\frac{c}{3}}{\frac{c}{3}} \rightarrow$ Son semejantes.

050



La base de un triángulo y su altura miden el triple que las de otro. Explica por qué los dos triángulos podrían no ser semejantes y dibuja un ejemplo.

Dadas una base y una altura, existen infinitos triángulos distintos con esos datos, y que tienen ángulos diferentes.

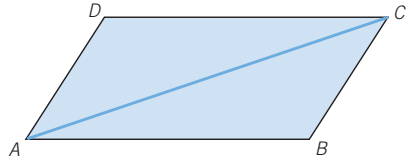


051



Una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos. ¿Son semejantes?

Aplicando el segundo criterio de semejanza, se puede comprobar que son semejantes.



052



Si dos triángulos rectángulos tienen uno de los catetos iguales, ¿son semejantes?

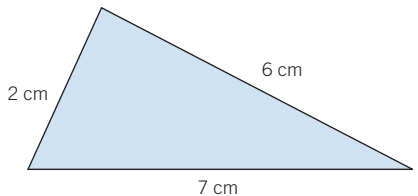
No lo son. En el caso de que tengan un cateto igual no se conserva la proporcionalidad de los lados, ya que la razón entre los catetos iguales es 1 y la razón entre los catetos que no son iguales puede ser distinta de 1.

053



Determina todos los triángulos de perímetro 12 cm que sean semejantes a otro cuyos lados miden 2, 7 y 6 cm, respectivamente.

Sean x , y , z los lados de un triángulo de perímetro 12 cm y sea r la razón de semejanza. Utilizando el segundo criterio de semejanza, resulta:



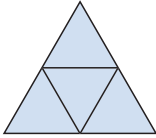
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{6} = r &\rightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 7r \\ z = 6r \end{cases} \\ \rightarrow 2r + 7r + 6r = 12 &\rightarrow 15r = 12 \\ \rightarrow r = \frac{12}{15} &\rightarrow r = 0,8 \text{ cm} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, las medidas son: $x = 1,6$ cm; $y = 5,6$ cm y $z = 4,8$ cm.

054

Dibuja un triángulo equilátero, marca los puntos medios de cada uno de sus lados y únelos mediante rectas. La figura que resulta tiene cuatro triángulos.

- a) ¿Son semejantes estos cuatro triángulos al triángulo original?
- b) ¿Y son semejantes estos cuatro triángulos entre sí?
- c) Halla, en cada caso, la razón de semejanza de los triángulos.

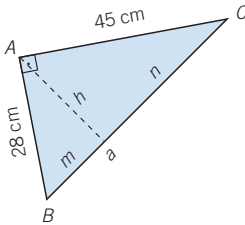


- a) Son semejantes, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.
- b) Son semejantes, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.
- c) La razón entre el triángulo original y los nuevos triángulos es 0,5; y la razón entre los nuevos triángulos es 1.

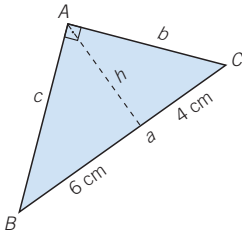
055

Calcula los valores que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



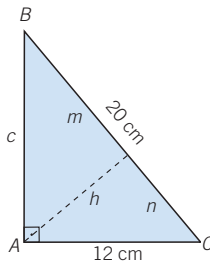
b)



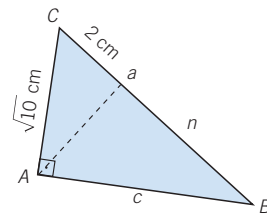
$$\begin{aligned}
 a) \quad a &= \sqrt{28^2 + 45^2} = 53 \text{ cm} \\
 m &= \frac{28^2}{53} = 14,79 \text{ cm} \\
 n &= \frac{45^2}{53} = 38,21 \text{ cm} \\
 h &= \sqrt{14,79 \cdot 38,21} = 23,77 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad h &= \sqrt{6 \cdot 4} = 4,9 \text{ cm} \\
 c &= \sqrt{6^2 + 4,9^2} = 7,75 \text{ cm} \\
 b &= \sqrt{4^2 + 4,9^2} = 6,32 \text{ cm} \\
 a &= 6 + 4 = 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

c)



d)

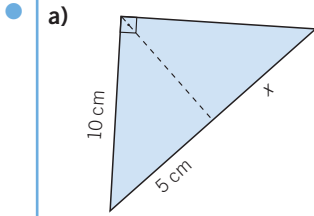


$$\begin{aligned}
 c) \quad c &= \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm} \\
 m &= \frac{16^2}{20} = 12,8 \text{ cm} \\
 n &= \frac{12^2}{20} = 7,2 \text{ cm} \\
 h &= \sqrt{12,8 \cdot 7,2} = 9,6 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

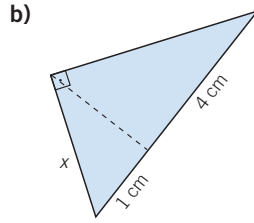
$$\begin{aligned}
 d) \quad h &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = 2,45 \text{ cm} \\
 n &= \frac{2,45^2}{2} = 3 \text{ cm} \\
 a &= 3 + 2 = 5 \text{ cm} \\
 c &= \sqrt{5^2 - (\sqrt{10})^2} = 3,87 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Semejanza

056 Calcula x en cada caso.



$$\begin{aligned} a) \quad h &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm} \\ x &= \frac{8,66^2}{5} = 15 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b) \quad h &= \sqrt{1 \cdot 4} = 2 \text{ cm} \\ x &= \sqrt{2^2 + 1^1} = 2,24 \text{ cm} \end{aligned}$$

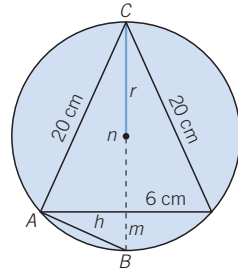
057 En un triángulo rectángulo isósceles, la altura trazada sobre la hipotenusa es la mitad de la hipotenusa. ¿Por qué?

Siendo la hipotenusa a , las dos proyecciones miden $\frac{a}{2}$.

$$h = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

058 ¿Cuánto mide el radio de esta circunferencia?

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{20^2 - 6^2} = 17,08 \text{ cm} \\ m &= \frac{6^2}{17,08} = 2,11 \text{ cm} \\ 2r &= m + n = 17,08 + 2,11 = 19,19 \text{ cm} \\ r &= \frac{19,19}{2} = 9,6 \text{ cm} \end{aligned}$$



059 ¿Cuánto mide la sombra proyectada por un árbol de 15 m de altura, sabiendo que en ese mismo momento otro árbol de 8 m de altura proyecta una sombra de 10 m?

$$\frac{15}{8} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 18,75 \text{ m}$$

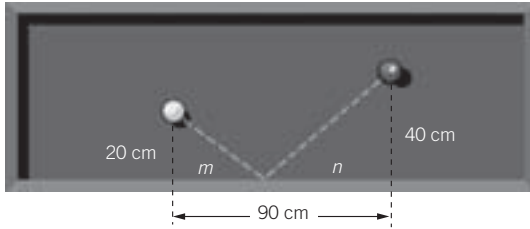
La sombra del árbol mide 18,75 m.

060 Una antena está sujeta con dos cables que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 8 y 5 m, respectivamente. ¿A qué altura se enganchan a la antena?

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \text{ m} \\ m &= \frac{8^2}{9,43} = 6,78 \text{ m} \\ h &= \sqrt{8^2 - 6,78^2} = 4,25 \text{ m} \end{aligned}$$

La altura a la que se enganchan los cables es de 4,25 m.

- 061** ● ● ¿En qué punto debe golpear la bola blanca a la banda para que el rebote dé a la bola roja?



Tenemos que $m + n = 90$. Al golpear sin efecto, $\hat{A} = \hat{B}$ y, por tanto, los triángulos son semejantes.

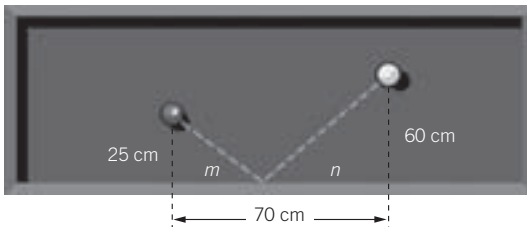
$$\frac{40}{n} = \frac{20}{m} \rightarrow 40m = 20n \rightarrow n = 2m$$

Sustituyendo el valor en la primera ecuación, resulta:

$$m + n = 90 \rightarrow m + 2m = 90 \rightarrow 3m = 90 \rightarrow m = 30$$

Es decir, tenemos que $m = 30$ cm y $n = 60$ cm.

- 062** ● ● Calcula dónde debe golpear la bola roja a la banda para que el rebote alcance a la bola blanca.



Si jugáramos con la bola blanca para alcanzar a la roja, ¿en qué punto de la banda tendríamos que golpear?

$$\frac{60}{n} = \frac{25}{m} \rightarrow 60m = 25n \rightarrow m = \frac{5}{12}n$$

Como $m + n = 70$, resulta:

$$\begin{cases} m + n = 70 \\ m = \frac{5}{12}n \end{cases}$$

$$m + n = 70 \rightarrow \frac{5}{12}n + n = 70 \rightarrow \frac{17}{12}n = 70 \rightarrow n = \frac{70 \cdot 12}{17} = 49,4 \text{ cm}$$

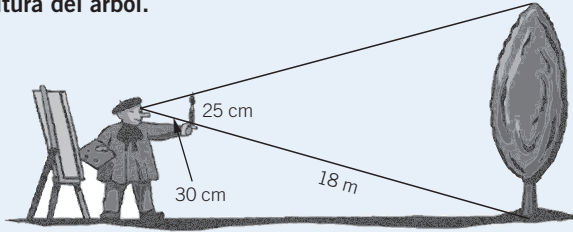
Es decir, tenemos que $m = 20,6$ cm y $n = 49,4$ cm.

Semejanza

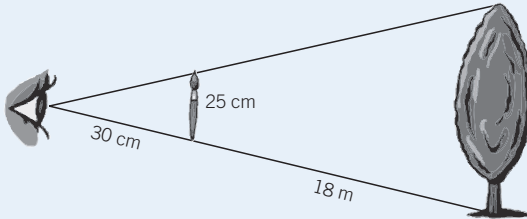
063 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN DISTANCIAS POR EL MÉTODO DEL PINTOR?

Calcula la altura del árbol.



PRIMERO. Se forman dos triángulos en posición de Tales y se escribe la proporción.

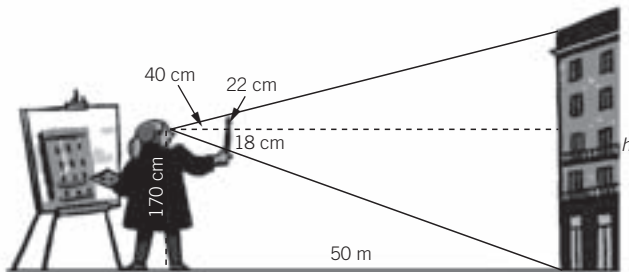


$$\frac{0,25}{h} = \frac{0,3}{18}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación que resulta.

$$\frac{0,25}{h} = \frac{0,3}{18} \rightarrow h = \frac{0,25 \cdot 18}{0,3} = 15 \text{ m}$$

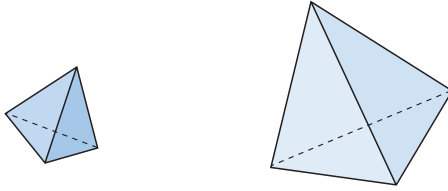
064 Calcula la altura del edificio si el pincel mide 22 cm y está a 40 cm del ojo.



$$\frac{0,4}{50} = \frac{0,22}{h}$$

$$h = \frac{0,22 \cdot 50}{0,4} = 27,5 \text{ m}$$

065 Dados los dos poliedros de la figura, responde.



- a) ¿Son semejantes? ¿Cuál es la razón de las aristas?
 b) ¿Y la razón de las áreas de sus caras?
 c) ¿Cuál es la razón de los volúmenes?

- a) Las dos figuras son semejantes, porque tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.
 b) La razón de las aristas es $r = 2$.
 c) La razón de semejanza de las áreas de las caras es $2^2 = 4$.
 d) La razón de los volúmenes es $2^3 = 8$.

066 Una estatua mide 10 m de altura y pesa 200 kg. ¿Cuánto pesará una reproducción del mismo material que mida 22 cm de altura?

La razón entre las longitudes es: $r = \frac{0,22}{10} = 0,022$.

Al igual que el volumen, el peso tendrá de razón: $r' = (0,022)^3$, de manera que el peso de la reproducción es: $200 \cdot (0,022)^3 = 0,002 \text{ kg} = 2 \text{ g}$.

067 Una esfera de vidrio tiene un radio de 4 cm, y una canica de vidrio tiene un diámetro de 1 cm. Encuentra la razón entre sus volúmenes.

El volumen de la esfera de radio 4 cm es:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3} \pi \text{ cm}^3$$

El volumen de la canica de diámetro 1 cm ($r = 0,5 \text{ cm}$) es:

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,5^3 = \frac{1}{6} \pi \text{ cm}^3$$

Como la razón de los volúmenes de dos cuerpos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza:

$$V_1 = r^3 \cdot V_2 \rightarrow r^3 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{256}{3} \pi}{\frac{1}{6} \pi} = 512$$

La razón es: $r = \sqrt[3]{512} = 8$.

Se puede comprobar que la razón es 8 calculando el cociente entre los radios de las dos circunferencias:

$$\frac{4}{0,5} = 8$$

Semejanza

- 068** Una pelota de balonmano tiene doble diámetro que una pelota de tenis. ¿Cuál es la relación entre sus volúmenes?

Si r es el radio de la pelota de tenis, $2r$ es el radio de la pelota de balonmano.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2r)^3 = \frac{32}{3}\pi r^3$$

Como la razón de los volúmenes de dos cuerpos geométricos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza, r' :

$$V_1 = r'^3 \cdot V_2 \rightarrow r' = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{32}{3}\pi r^3} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Es decir, la razón entre sus volúmenes es $r' = 0,125$.

- 069** La superficie acristalada de un invernadero mide 270 m^2 . ¿Qué cantidad de cristal se necesita para construir una maqueta del invernadero a escala $1:20$?

La razón de semejanza es: $r = \frac{1}{20} = 0,05$.

Por tanto, la superficie acristalada de la maqueta es:

$$A = r^2 \cdot A_{\text{real}} = (0,05)^2 \cdot 270 = 0,675 \text{ m}^2$$

- 070** Queremos hacer un armario en miniatura, semejante a otro cuyas medidas son $180 \times 110 \times 45 \text{ cm}$. Siendo la altura de $13,5 \text{ cm}$, calcula.

- Ancho y profundidad del armario en miniatura.
- Razón de semejanza entre los volúmenes.
- Razón de semejanza entre las áreas laterales.

a) La razón de semejanza de las aristas es:

$$r = \frac{13,5}{180} = 0,075$$

$$\text{Ancho} = 110 \cdot 0,075 = 8,25 \text{ cm}$$

$$\text{Profundidad} = 48 \cdot 0,075 = 3,6 \text{ cm}$$

b) La razón de semejanza de los volúmenes es:

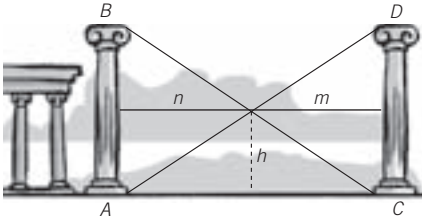
$$r' = r^3 = (0,075)^3 = 0,000421875$$

c) La razón de semejanza de las áreas laterales es:

$$r'' = r^2 = (0,075)^2 = 0,005625$$

071

Demuestra que no influye la distancia de separación de las columnas AB y CD para calcular la altura h . ¿Cuánto mide la altura?

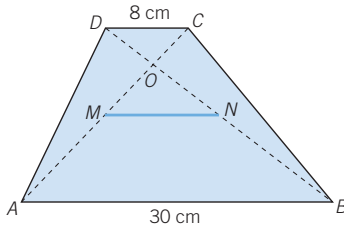


$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} &= \frac{n}{m} \\ \frac{\overline{AB}}{h} &= \frac{m+n}{m} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{m}{m} + \frac{n}{m} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{\overline{CB} + \overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \\ &\rightarrow h = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}} \end{aligned}$$

El valor de h solo depende de la longitud de \overline{AB} y \overline{CD} .

072

Calcula la longitud del segmento MN , siendo M y N los puntos medios de las diagonales.



$$\begin{aligned} \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} &= \frac{8}{30} \xrightarrow{+1} \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} + 1 = \frac{8}{30} + 1 \rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{38}{30} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{38}{30} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{30}{38} \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} &= \frac{30}{8} \xrightarrow{+1} \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + 1 = \frac{30}{8} + 1 \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OC}} = \frac{38}{8} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{38}{8} \rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{38} \\ \overline{OM} + \overline{CO} &= \frac{\overline{CA}}{2} \rightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{CA}}{2} - \overline{CO} \rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\overline{CA}}{2} - \overline{CO}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} - \frac{8}{38} = \frac{11}{38} \\ \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} &= \frac{\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{OM}}{\overline{AC}}} = \frac{\frac{30}{38}}{\frac{11}{38}} = \frac{30}{11} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} \rightarrow \frac{30}{11} = \frac{30}{\overline{MN}} \rightarrow \overline{MN} = 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

073

Obtén el teorema de Pitágoras utilizando solamente el teorema del cateto. ¿Se podría demostrar utilizando solo el teorema de la altura?

Mediante el teorema del cateto:

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= m \cdot a \\ b^2 &= n \cdot a \end{aligned} \right\} \rightarrow c^2 + b^2 = m \cdot a + n \cdot a$$

$$\rightarrow c^2 + b^2 = (m+n) \cdot a \xrightarrow{a=m+n} c^2 + b^2 = a^2$$

Únicamente con el teorema de la altura no se puede demostrar, ya que no intervienen los catetos, y necesitaríamos aplicar también el teorema del cateto.

Semejanza

EN LA VIDA COTIDIANA

074



Se ha colocado una antena cerca de un edificio de viviendas. La comunidad de vecinos piensa que la zona de acceso restringido es insuficiente para garantizar su seguridad.

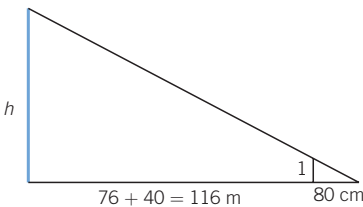
Algunos vecinos aseguran que si la antena se cayera afectaría al edificio.

La distancia del edificio a la valla que delimita la zona de seguridad es de 38 metros, y es, aproximadamente, el doble de la distancia que hay de la valla de seguridad a la antena.

La sombra de la torre que sobrepasa la zona de seguridad mide 40 metros, en el mismo momento en que la sombra de los postes de 1 metro, que delimitan la zona, mide 80 centímetros.



El informe municipal afirma que no existe ningún riesgo. ¿Es correcta esta información?



$$\frac{h}{1} = \frac{116}{0,8} \rightarrow h = 145 \text{ m}$$

La altura de la antena es de 145 m.

Y la distancia de la antena al edificio es: $76 + 38 = 114 \text{ m}$.

Por tanto, si la antena cayera podría afectar al edificio, pues la distancia es menor que la altura de la antena. La conclusión del informe municipal no es correcta.

075

Gema y Manuel son hermanos gemelos, y les han regalado unos *walkie-talkies* el día de su cumpleaños.



Los hermanos no se separan de su regalo ni un momento.

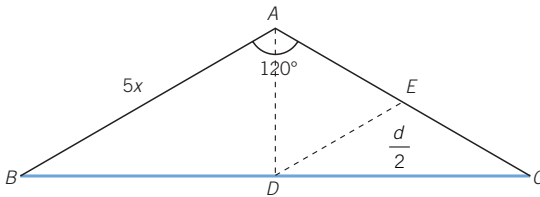
Tengo que ir a la biblioteca para devolver unos libros.

Yo he quedado para jugar un partido de baloncesto.



Deciden ir a sus destinos por calles que forman un ángulo de 120° y se llevan los *walkie-talkies*.

Si ambos caminan a 5 km/h, ¿durante cuánto tiempo siguen recibiendo la señal?



Si x es el tiempo que caminan, la distancia que recorre cada hermano es $5x$.

Los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{EDC} son semejantes, luego $|\overline{DE}| = \frac{5x}{2}$.

$$|\overline{DE}| = |\overline{AD}| \rightarrow |\overline{AD}| = \frac{5x}{2}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \rightarrow \frac{25x^2}{4} + \overline{DC}^2 = 25x^2 \rightarrow \overline{DC}^2 = 25x^2 - \frac{25x^2}{4} = \frac{75}{4}x^2$$

$$\overline{DC} = \sqrt{\frac{75}{4}x^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x = 4,33x \rightarrow \overline{BC} = 5\sqrt{3} \cdot x = 8,66x$$

$$8,66x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{8,66} = 1,1547 = 1 \text{ h } 9 \text{ min } 17 \text{ s}$$

Los hermanos dejarán de comunicarse al transcurrir 1 h 9 min 17 s, es decir, tras recorrer esta distancia: $5 \cdot 1,1547 = 5,773$ km.