7 Trigonometría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

- SENO
- COSENO
- TANGENTE

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

- $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$
- $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE

- COMPLEMENTARIO
- SUPLEMENTARIO
- OPUESTO

Las Bocas del Cielo

Seguro que tenía poderes mágicos. Aquel cofre de ébano con adornos de plata ejercía sobre él tal atracción que daría lo que fuera por averiguar el contenido que su maestro, Claudio Ptolomeo, guardaba en él celosamente.

El momento había llegado y su corazón amenazaba con escaparse por su boca. Ptolomeo, por fin, había terminado su trabajo y se disponía a desvelar el misterio. El joven, Nemes, lo acuciaba hablando sin parar.

–¿Sabéis, maestro? Siempre he deseado ver el tesoro del cofre. A veces soñaba que podía hacerme tan pequeño como para entrar por la cerradura y al hacerlo el mundo entero estaba dentro, y corría mil aventuras, y… ¡por favor, decidme lo que hay!

Ptolomeo no pudo contener una risita y mientras abría el cofre, con gran solemnidad, le dijo:

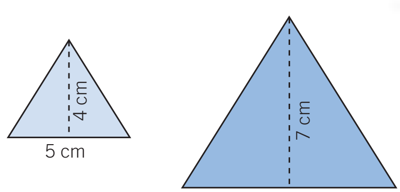
–Aquí tienes todo el mundo: sus mares y sus tierras, sus ríos y sus desiertos, sus montañas y sus valles.

Nemes no podía dar crédito a lo que veía: un mapa que representaba todo el mundo. Recorrió el Nilo con su dedo y, de repente, exclamó:

–El nacimiento de la divinidad es como dicen los sacerdotes: «Encontrarás las Bocas del Cielo más allá de las Montañas de la Luna». Pero, ¿cómo habéis sido capaz de saber el lugar exacto si nunca habéis estado en esos lugares?

–Hablo con los viajeros, algunos miden los ángulos con los que ven algunas estrellas, y eso me da la situación exacta: a ángulos iguales les corresponden distancias semejantes.

La altura sobre el lado desigual, que mide 5 cm, de un triángulo isósceles es 4 cm. ¿Cuánto mediría otro semejante si la altura fuera 7 cm?

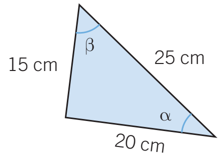


$$\frac{4}{5} = \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{4} = 8{,}75 \text{ cm}$$

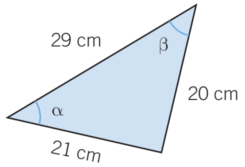
EJERCICIOS

001 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β.**

a)



b)



a) $sen\ \alpha = \dfrac{15}{25} = 0{,}6$ $\qquad sen\ \beta = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$

$cos\ \alpha = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$ $\qquad cos\ \beta = \dfrac{15}{25} = 0{,}6$

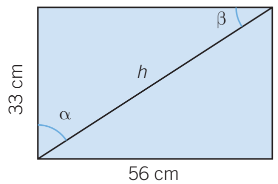
$tg\ \alpha = \dfrac{15}{20} = 0{,}75$ $\qquad tg\ \beta = \dfrac{20}{15} = 1{,}33$

b) $sen\ \alpha = \dfrac{20}{29} = 0{,}69$ $\qquad sen\ \beta = \dfrac{21}{29} = 0{,}72$

$cos\ \alpha = \dfrac{21}{29} = 0{,}72$ $\qquad cos\ \beta = \dfrac{20}{29} = 0{,}69$

$tg\ \alpha = \dfrac{20}{21} = 0{,}95$ $\qquad tg\ \beta = \dfrac{21}{20} = 1{,}05$

002 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos.**



$$h = \sqrt{56^2 + 33^2} = 65 \text{ cm}$$

$sen\ \alpha = \dfrac{56}{65} = 0{,}86$ $\qquad sen\ \beta = \dfrac{33}{65} = 0{,}51$

$cos\ \alpha = \dfrac{33}{65} = 0{,}51$ $\qquad cos\ \beta = \dfrac{56}{65} = 0{,}86$

$tg\ \alpha = \dfrac{56}{33} = 1{,}7$ $\qquad tg\ \beta = \dfrac{33}{56} = 0{,}59$

003 **Razona por qué las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del triángulo que escogemos.**

Si las razones no dependen del triángulo es porque son triángulos semejantes, y el cociente de sus lados es constante.

004 **Calcula el resto de razones trigonométricas conociendo la que se indica.**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = 0{,}3}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ \beta = 0}$ **c)** $\boldsymbol{cos\ \gamma = 0{,}4}$ **d)** $\boldsymbol{tg\ \delta = 2}$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow (0{,}3)^2 + cos^2\ \alpha = 1$
$\rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1-(0{,}3)^2} = \sqrt{0{,}91} = 0{,}95$
$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \dfrac{0{,}3}{0{,}95} = 0{,}32$

b) $sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow 0 + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow cos\ \beta = \sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} cos\ \beta = 1 \\ cos\ \beta = 1-1 \end{cases}$
$tg\ \beta = \dfrac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 0$

c) $sen^2\ \gamma + cos^2\ \gamma = 1 \rightarrow sen^2\ \gamma + (0{,}4)^2 = 1$
$\rightarrow sen\ \gamma = \sqrt{1-0{,}16} = \sqrt{0{,}84} = 0{,}92$
$tg\ \gamma = \dfrac{sen\ \gamma}{cos\ \gamma} \rightarrow tg\ \gamma = \dfrac{0{,}92}{0{,}4} = 2{,}3$

d) $\left.\begin{array}{r} sen^2\ \delta + cos^2\ \delta = 1 \\ \dfrac{sen\ \delta}{cos\ \delta} = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{sen\ \delta = 2\cdot cos\ \delta} (2\cdot cos\ \delta)^2 + cos^2\ \delta = 1$
$\rightarrow 5\cdot cos^2\ \delta = 1 \rightarrow cos\ \delta = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
$sen\ \delta = 2\cdot cos\ \delta \rightarrow sen\ \delta = 2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

005 **¿Existe algún ángulo con** $\boldsymbol{sen\ \alpha = 0{,}4}$ **y** $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0{,}6}$**? Justifica la respuesta.**

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$
$(0{,}4)^2 + (0{,}6)^2 = 0{,}16 + 0{,}36 = 0{,}52 \neq 1 \rightarrow$ No existe.

006 **¿Hay algún ángulo con** $\boldsymbol{tg\ \alpha = 2}$ **y cuyo seno sea el doble que el coseno?**

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2\cdot cos\ \alpha \rightarrow$ Sí existe.

007 **Calcula el valor de las siguientes expresiones.**

a) $\boldsymbol{cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45°}$ **c)** $\boldsymbol{tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30°}$
b) $\boldsymbol{cos^2\ 60° - sen^2\ 45°}$ **d)** $\boldsymbol{tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30°\cdot cos\ 30°}$

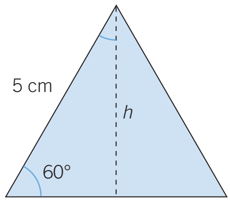
a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45° = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30° = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3}{4}$

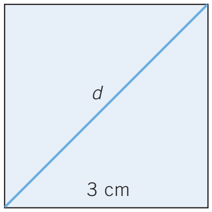
d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30°\cdot cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$

008 **Determina la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm, sin aplicar el teorema de Pitágoras.**



$$h = 5 \cdot sen\ 60° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

009 **Halla, utilizando las razones trigonométricas, la diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.**



$$d = \frac{3}{sen\ 45°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$$

010 **Razona en qué cuadrante está cada ángulo.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}8$, $cos\ \alpha = -0{,}6$ **b)** $sen\ \beta = -0{,}8$, $cos\ \beta = -0{,}6$ **c)** $sen\ \gamma = 0{,}5$, $tg\ \gamma = 0{,}57$

a) Segundo cuadrante b) Tercer cuadrante c) Primer cuadrante

011 **Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) 66° b) 175° c) 342° d) 18° e) 135°

a) Todas sus razones son positivas.
b) Seno positivo, coseno y tangente negativos.
c) Coseno positivo, seno y tangente negativos.
d) Todas sus razones son positivas.
e) Seno positivo, coseno y tangente negativos.

012 **¿Por qué no existe *tg* 90°? ¿Sucede esto con los ángulos cuya amplitud es un múltiplo de 90°?**

No existe, porque $cos\ 90° = 0$.
Esto sucede con los ángulos de la forma $90° + n \cdot 180°$, con n un número entero.

013 **Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, teniendo en cuenta que *cos* 50° = 0,6428.**

a) 140° b) 130° c) 230° d) 310°

a) $sen\ 140° = cos\ 50° = 0{,}6428$
$cos\ 140° = -sen\ 50° = -0{,}766$
$tg\ 140° = -\frac{1}{tg\ 50°} = -0{,}839$

b) $sen\ 130° = sen\ 50° = 0{,}766$
$cos\ 130° = -cos\ 50° = -0{,}6428$
$tg\ 130° = -tg\ 50° = -1{,}1917$

c) $sen\ 230° = -sen\ 50° = -0{,}766$
$cos\ 230° = -cos\ 50° = -0{,}6428$
$tg\ 230° = tg\ 50° = 1{,}1917$

d) $sen\ 310° = -sen\ 50° = -0{,}766$
$cos\ 310° = cos\ 50° = 0{,}6428$
$tg\ 310° = -tg\ 50° = -1{,}1917$

014 **Si sabemos que *sen* 25° = 0,4226; ¿cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es 205°?**

$$sen^2\ 25° + cos^2\ 25° = 1 \rightarrow cos\ 25° = \sqrt{1-(0{,}4226)^2} = 0{,}9063$$

$$205° = 180° + 25° \rightarrow \begin{cases} sen\ 205° = -sen\ 25° = -0{,}4226 \\ cos\ 205° = -cos\ 25° = -0{,}9063 \\ tg\ 205° = tg\ 25° = \dfrac{-0{,}4226}{-0{,}9063} = 0{,}4663 \end{cases}$$

015 **Calcula las razones trigonométricas de 70°, sabiendo que *cos* 110° = −0,342.**

$$sen^2\ 110° + cos^2\ 110° = 1$$
$$\rightarrow sen\ 110° = \sqrt{1-cos^2\ 110°} = \sqrt{1-(-0{,}342)^2} = 0{,}94$$

$$70° = 180° - 110° \rightarrow \begin{cases} sen\ 70° = sen\ 110° = 0{,}94 \\ cos\ 70° = -cos\ 110° = 0{,}342 \\ tg\ 70° = \dfrac{sen\ 70°}{cos\ 70°} = \dfrac{0{,}94}{0{,}342} = 2{,}75 \end{cases}$$

016 **Expresa las razones trigonométricas de estos ángulos en función de las razones de otros ángulos del 1.er cuadrante.**

a) 475° **c) 1.130°** **e) 1.215°**
b) 885° **d) 695°** **f) 985°**

a) $475° = 360° + 90° + 25°$
$sen\ 475° = cos\ 25°$
$cos\ 475° = -sen\ 25°$
$tg\ 475° = -\dfrac{1}{tg\ 25°}$

b) $885° = 2 \cdot 360° + 90° + 75°$
$sen\ 885° = cos\ 75°$
$cos\ 885° = -sen\ 75°$
$tg\ 885° = -\dfrac{1}{tg\ 75°}$

c) $1.130° = 3 \cdot 360° + 50°$
$sen\ 1.130° = sen\ 50°$
$cos\ 1.130° = cos\ 50°$
$tg\ 1.130° = tg\ 50°$

d) $695° = 2 \cdot 360° - 25°$
$sen\ 695° = -sen\ 25°$
$cos\ 695° = cos\ 25°$
$tg\ 695° = -tg\ 25°$

e) $1.215° = 3 \cdot 360° + 90° + 45°$
$sen\ 1.215° = cos\ 45°$
$cos\ 1.215° = -sen\ 45°$
$tg\ 1.215° = -\dfrac{1}{tg\ 45°}$

f) $985° = 2 \cdot 360° + 180° + 85°$
$sen\ 985° = -sen\ 85°$
$cos\ 985° = -cos\ 85°$
$tg\ 985° = tg\ 85°$

017 **Sabiendo que *sen* $\alpha = 0{,}2$; calcula.**

a) ***sen*** **$(90° - \alpha)$** **b)** ***sen*** **$(180° - \alpha)$** **c)** ***sen*** **$(-\alpha)$**

a) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = 0{,}98$

b) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}2$

c) $sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}2$

018 **Si *sen* $18° = 0{,}309$ y *cos* $18° = 0{,}951$; halla.**

a) ***sen*** **72°** **b)** ***cos*** **162°** **c)** ***tg*** **(–72°)**

a) $sen\ 72° = cos\ 18° = 0{,}951$

b) $cos\ 162° = -cos\ 18° = -0{,}951$

c) $tg\ (-72°) = -\dfrac{1}{tg\ 18°} = -3{,}077$

019 **Determina la relación entre los ángulos α y β si sus razones trigonométricas cumplen estas condiciones.**

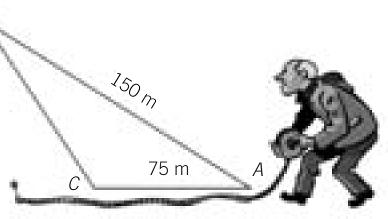
a) ***sen*** **$\alpha =$** ***cos*** **β** **b)** ***cos*** **$\alpha =$** ***cos*** **β** **c)** ***sen*** **$\alpha =$** ***sen*** **β**

a) $\alpha = 90° \pm \beta$

b) $\alpha = n \cdot 360° \pm \beta$

c) $\alpha = 180° - \beta$

020 **¿Cuál es el área del triángulo, si $\hat{A} = 30°$?**



$h = 75 \cdot sen\ 30° = 75 \cdot \dfrac{1}{2} = 37{,}5$ m

$A = \dfrac{150 \cdot 37{,}5}{2} = 2.812{,}5\ \text{m}^2$

021 **Halla el área de un hexágono regular de 4 cm de lado.**

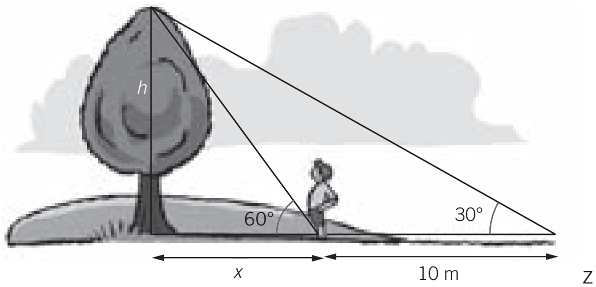
$\alpha = 60°$

$A = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot sen\ 60°}{2} \cdot 6 = \dfrac{16 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 6 = 24 \cdot \sqrt{3} = 41{,}57\ \text{cm}^2$

022 **Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y el ángulo desigual mide 45°.**

$$A = \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 16 \cdot \sqrt{2} = 22{,}63 \text{ cm}^2$$

023 **Félix quiere medir uno de los árboles que hay al lado de su casa. Para ello ha pedido prestado un teodolito y ha medido algunos ángulos y distancias. ¿Cuánto mide el árbol?**



$$\left.\begin{array}{l} x \cdot tg\ 60° = h \\ (x+10) \cdot tg\ 30° = h \end{array}\right\} \rightarrow x\sqrt{3} = (x+10) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3} \rightarrow x = 5 \text{ m}$$

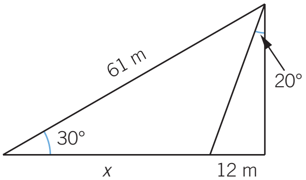
$$h = 5 \cdot \sqrt{3} = 8{,}66 \text{ m}$$

024 **Calcula el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 20 m y 30 m, y que los ángulos distintos al comprendido entre ellos miden 80° y 70°.**

El tercer ángulo mide: $180° - 80° - 70° = 30°$.

$$A = \frac{30 \cdot 20 \cdot sen\ 30°}{2} = 150 \text{ m}^2$$

025 **Halla el valor de *x*.**



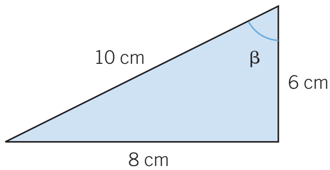
$$cos\ 30° = \frac{12+x}{61} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12+x}{61} \rightarrow 61 \cdot \sqrt{3} = 24 + 2x$$

$$\rightarrow x = \frac{61 \cdot \sqrt{3} - 24}{2} = 40{,}8 \text{ m}$$

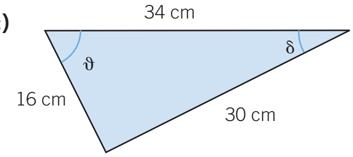
ACTIVIDADES

026 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos marcados en cada caso.**

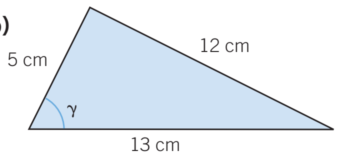
a)



c)



b)



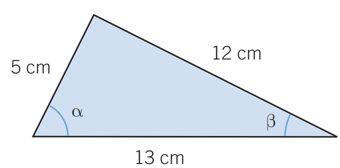
a) $sen\ \beta = \frac{8}{10}$ $\quad cos\ \beta = \frac{6}{10}$ $\quad tg\ \beta = \frac{8}{6}$

b) $sen\ \gamma = \frac{12}{13}$ $\quad cos\ \gamma = \frac{5}{13}$ $\quad tg\ \gamma = \frac{12}{5}$

c) $sen\ \delta = \frac{16}{34}$ $\quad cos\ \delta = \frac{30}{34}$ $\quad tg\ \delta = \frac{16}{30}$

$sen\ \vartheta = \frac{30}{34}$ $\quad cos\ \vartheta = \frac{16}{34}$ $\quad tg\ \vartheta = \frac{30}{16}$

027 **Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 cm y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos del triángulo.**



$$a = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}$$

$sen\ \alpha = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\quad cos\ \alpha = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\quad tg\ \alpha = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$sen\ \beta = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\quad cos\ \beta = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\quad tg\ \beta = \frac{5}{12} = 0{,}417$

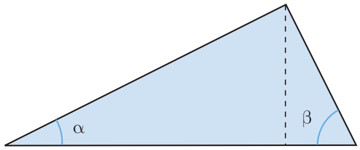
028 **Halla las razones trigonométricas de los dos ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm, y uno de sus catetos, 1 cm.**

$$c = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} \text{ cm}$$

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$ $\quad cos\ \alpha = \frac{1}{3}$ $\quad tg\ \alpha = \sqrt{8}$

$sen\ \beta = \frac{1}{3}$ $\quad cos\ \beta = \frac{\sqrt{8}}{3}$ $\quad tg\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

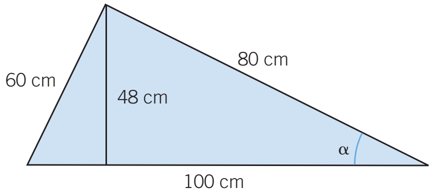
029 ● **Con ayuda de una regla graduada, halla el valor aproximado de las razones trigonométricas de los ángulos marcados.**



$$sen\ \alpha = \frac{2,1}{4,7} = 0,45 \qquad cos\ \alpha = \frac{4,1}{4,7} = 0,87 \qquad tg\ \alpha = \frac{2,1}{4,1} = 0,51$$

$$sen\ \beta = \frac{4,1}{4,7} = 0,87 \qquad cos\ \beta = \frac{2,1}{4,7} = 0,45 \qquad tg\ \beta = \frac{4,1}{2,1} = 1,96$$

030 ●● **Dado el siguiente triángulo rectángulo, calcula las razones trigonométricas del ángulo marcado, utilizando los triángulos mayor y menor. ¿Se obtiene el mismo resultado? Razónalo.**



Utilizando el triángulo mayor:

$$sen\ \alpha = \frac{60}{100} = 0,6 \qquad cos\ \alpha = \frac{80}{100} = 0,8 \qquad tg\ \alpha = \frac{60}{80} = 0,75$$

Utilizando el triángulo menor:

$$sen\ \alpha = \frac{48}{80} = 0,6 \qquad cos\ \alpha = \sqrt{1-(0,6)^2} = 0,8 \qquad tg\ \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

El resultado es el mismo, ya que los dos triángulos son semejantes.

031 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE TRANSFORMAN GRADOS EN RADIANES, Y VICEVERSA?

¿Cuántos radianes son *n* grados? ¿Y cuántos grados son α radianes?

PRIMERO. Se plantea una regla de tres para calcular las cantidades desconocidas.

$$\begin{array}{ll} 360° — 2\pi \text{ rad} \\ n \quad — x \text{ rad} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 360° — 2\pi \text{ rad} \\ y \quad — \alpha \text{ rad} \end{array}$$

SEGUNDO. Al resolver las reglas de tres se obtienen las fórmulas para pasar de grados a radianes, y viceversa.

$$\left.\begin{array}{l} 360° — 2\pi \text{ rad} \\ n \quad — x \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{n \cdot 2\pi \text{ rad}}{360} = n \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\left.\begin{array}{l} 360° — 2\pi \text{ rad} \\ y \quad — \alpha \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{360 \cdot \alpha}{2\pi} = \alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Así, por ejemplo:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180}{\pi} = 57,296° = 57° \ 17' \ 45''$$

032 Transforma en radianes estos ángulos.

a) $45°$ **b)** $180°$ **c)** $30°$ **d)** $60°$

a) $45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad

b) $180° = \pi$ rad

c) $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad

d) $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad

033 Pasa a grados los siguientes ángulos.

a) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad **b)** 0,33 rad **c)** $\dfrac{\pi}{4}$ rad **d)** 2 rad

a) 270° b) 18,91° c) 45° d) 114,64°

034 Calcula las razones trigonométricas de estos ángulos, sabiendo que:

a) $sen\ \alpha = 0{,}6$ **b)** $cos\ \alpha = 0{,}45$ **c)** $tg\ \alpha = 0{,}577$ **d)** $sen\ \alpha = \dfrac{1}{3}$

a) $sen\ \alpha = 0{,}6$
$cos\ \alpha = 0{,}8$
$tg\ \alpha = \dfrac{3}{4}$

b) $sen\ \alpha = 0{,}89$
$cos\ \alpha = 0{,}45$
$tg\ \alpha = 1{,}98$

c) $sen\ \alpha = 0{,}5$
$cos\ \alpha = 0{,}866$
$tg\ \alpha = 0{,}577$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{3}$
$cos\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

035 Halla el valor de las razones trigonométricas de los ángulos si:

a) $cos\ \alpha = \dfrac{1}{3}$ **b)** $sen\ \alpha = \dfrac{1}{6}$

a) $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$cos\ \alpha = \dfrac{1}{3}$
$tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$

b) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{6}$
$cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$
$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{35}}{35}$

036 Comprueba si son ciertas estas afirmaciones.

a) Si $sen\ \alpha = 0{,}45$; entonces $cos\ \alpha = 0{,}55$.

b) Si $tg\ \alpha = 1$; entonces $cos\ \alpha = sen\ \alpha$.

c) Si $sen\ \alpha = \dfrac{cos\ \alpha}{2}$; entonces $tg\ \alpha = 2$.

d) Si $cos\ \alpha = 0{,}8$; entonces $tg\ \alpha$ es menor que 1.

a) Falsa b) Verdadera c) Falsa d) Falsa

037 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON LA CALCULADORA?

Calcula *sen* α, *cos* α y *tg* α si $\alpha = 70°\ 42'\ 50''$.

PRIMERO. Se ajusta el Modo MODE, según se midan los ángulos en grados o radianes.

Grados ⟶ MODE DEG

Radianes ⟶ MODE RAD

SEGUNDO. Se introduce el ángulo en la calculadora, especificando los grados, minutos y segundos.

70 °' '' 42 °' '' 50 °' ''

TERCERO. Se teclea la tecla correspondiente a la razón trigonométrica.

Seno ⟶ 70 °' '' 42 °' '' 50 sin = 0,94388…

Coseno ⟶ 70 °' '' 42 °' '' 50 cos = 0,33028…

Tangente ⟶ 70 °' '' 42 °' '' 50 tan = 2,85777…

En algunos tipos de calculadoras, la secuencia de teclas es diferente; primero se introduce la función (sin cos tan) y, después, el ángulo.

038 **Con la ayuda de la calculadora, determina las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 53° 36' 5''

b) 50° 12' 41''

c) 17° 42' 57''

d) 85° 50' 12

a) $sen\ \alpha = 0{,}805$
$cos\ \alpha = 0{,}593$
$tg\ \alpha = 1{,}356$

b) $sen\ \alpha = 0{,}768$
$cos\ \alpha = 0{,}64$
$tg\ \alpha = 1{,}2$

c) $sen\ \alpha = 0{,}304$
$cos\ \alpha = 0{,}953$
$tg\ \alpha = 0{,}319$

d) $sen\ \alpha = 0{,}997$
$cos\ \alpha = 0{,}073$
$tg\ \alpha = 13{,}738$

039 **Halla con la calculadora las razones trigonométricas de 48° y comprueba que se verifican las igualdades.**

a) $sen^2\ 48° + cos^2\ 48° = 1$

b) $tg\ 48° = \dfrac{sen\ 48°}{cos\ 48°}$

$sen\ \alpha = 0{,}743$
$cos\ \alpha = 0{,}669$
$tg\ \alpha = 1{,}11$

a) $(0{,}743)^2 + (0{,}669)^2 = 0{,}552 + 0{,}448 = 1$

b) $\dfrac{0{,}743}{0{,}669} = 1{,}11$

040 Razona si existe un ángulo α que cumpla estas igualdades.

$$sen\ \alpha = \frac{1}{5} \quad y \quad cos\ \alpha = \frac{1}{3}$$

No existe ningún ángulo que las cumpla, ya que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{34}{225} \neq 1$$

041 Decide si existe algún ángulo para el que sus razones trigonométricas puedan tomar estos valores.

a) $sen\ \alpha = \frac{3}{2}$ b) $sen\ \alpha = \pi$ c) $sen\ \alpha = \frac{2}{5}$ d) $tg\ \alpha = 0{,}5$

a) No es posible ($sen\ \alpha > 1$).
b) No es posible ($sen\ \alpha > 1$).
c) Es posible ($sen\ \alpha < 1$).
d) Es posible.

042 Razona si hay un ángulo α que cumpla estas igualdades.

$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} \quad y \quad tg\ \alpha = \frac{3}{4}$$

Halla las razones trigonométricas del ángulo α, sabiendo que $tg\ \alpha = sen\ \alpha$.

$$cos\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{tg\ \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} = 1$$

Sí existe un ángulo con esas razones trigonométricas.

$sen\ \alpha = tg\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = 0 \rightarrow tg\ \alpha = 0$

043 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo α, si $sen\ \alpha = 2 \cdot cos\ \alpha$.

$sen\ \alpha = 2 \cdot cos\ \alpha$

$1 = sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 4 \cdot cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 5 \cdot cos^2\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}447$

$sen\ \alpha = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894$

$$tg\ \alpha = \frac{2 \cdot cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2$$

044 Si $cos\ \alpha = sen\ \alpha$, halla cuánto valen sus razones trigonométricas, siendo α un ángulo agudo.

$sen\ \alpha = cos\ \alpha$

$$1 = sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 2 \cdot cos^2\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 1$$

045 **Calcula el valor de las expresiones.**

a) $sen\ 60° + sen\ 30° - tg\ 30°$

b) $sen^2\ 45° + cos^2\ 60° - sen^2\ 30°$

c) $tg\ 60° - tg\ 30°$

d) $cos\ 60° \cdot cos\ 30° + sen\ 60° \cdot sen\ 30°$

a) $sen\ 60° + sen\ 30° - tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}+3}{6}$

b) $sen^2\ 45° + cos^2\ 60° - sen^2\ 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c) $tg\ 60° - tg\ 30° = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $cos\ 60° \cdot cos\ 30° + sen\ 60° \cdot sen\ 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

046 **Razona si estas igualdades son ciertas.**

a) $sen^2\ 30° + cos^2\ 60° = \frac{1}{2}$

b) $3 \cdot tg\ 30° = tg\ 60°$

c) $sen\ 45° + cos\ 45° = 4\sqrt{2}$

d) $cos\ 30° + sen\ 60° = tg\ 30°$

a) Cierta: $sen^2\ 30° + cos^2\ 60° = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) Cierta: $3 \cdot tg\ 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} = tg\ 60°$

c) Falsa: $sen\ 45° + cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 4\sqrt{2}$

d) Falsa: $cos\ 30° + sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \neq tg\ 30°$

047 **Comprueba que se verifica esta relación: $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, cuando α mide:**

a) 30° **b)** 60° **c)** 45°

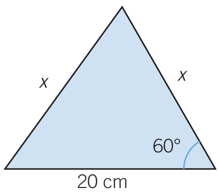
a) $sen^2\ 30° + cos^2\ 30° = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

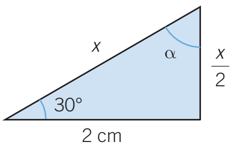
b) $sen^2\ 60° + cos^2\ 60° = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

c) $sen^2\ 45° + cos^2\ 45° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

048 **Halla el valor del lado x sin aplicar el teorema de Pitágoras.**

a) **b)**





a) Es un triángulo isósceles con los ángulos iguales que miden 60°, y el tercer ángulo es también de 60°, por lo que es equilátero, y los tres lados miden 20 cm.

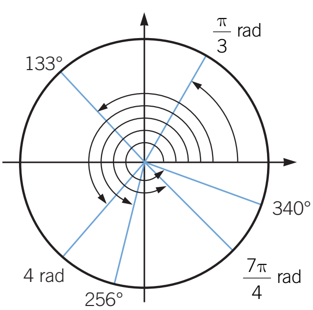
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \dfrac{2}{x} \rightarrow x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

049 **Dibuja los siguientes ángulos en la circunferencia goniométrica y di cuál es el signo de sus razones trigonométricas.**

a) 340° **b) 256°** **c) $\dfrac{\pi}{3}$ rad** **d) 133°** **e) $\dfrac{7\pi}{4}$ rad** **f) 4 rad**

Ángulo	340°	256°	$\dfrac{\pi}{3}$ rad
Seno	−	−	+
Coseno	+	−	+
Tangente	−	+	+

Ángulo	133°	$\dfrac{7\pi}{4}$ rad	4 rad
Seno	+	−	−
Coseno	−	+	−
Tangente	−	−	+

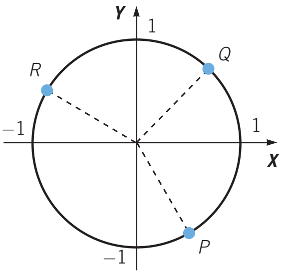


050 **Halla las razones trigonométricas de un ángulo si el punto P tiene las siguientes coordenadas. Identifica el ángulo en cada caso.**

a) $P\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $R\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$



a) $sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$

$tg\ \alpha = \sqrt{3}$

b) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ \alpha = 1$

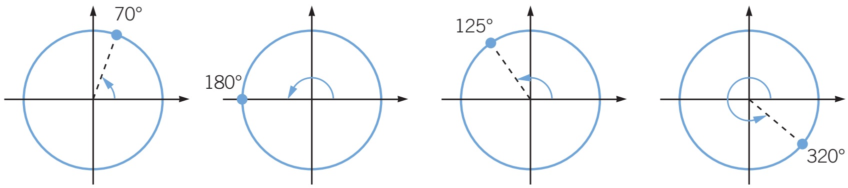
c) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

$\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

051 **Dibuja los siguientes ángulos en una circunferencia de radio 4 cm. Mide y calcula las razones trigonométricas, e indica si es relevante que el radio mida 4 cm.**

a) 70° **b) 180°** **c) 125°** **d) 320°**



a) *sen* 70° = 0,94
cos 70° = 0,34
tg 70° = 2,75

b) *sen* 180° = 0
cos 180° = −1
tg 180° = 0

c) *sen* 125° = 0,82
cos 125° = −0,57
tg 125° = −1,43

d) *sen* 320° = −0,64
cos 320° = 0,77
tg 320° = −0,84

No es relevante que el radio mida 4 cm.

052 **Calcula las razones trigonométricas que faltan.**

a) $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$, **para** $180° < \alpha < 270°$

b) $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$, **para** $0° < \alpha < 90°$

c) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, **para** $90° < \alpha < 180°$

d) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{2}{5}$, **para** $270° < \alpha < 360°$

a) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$

b) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$

d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

053 **Averigua para qué ángulos son ciertas las siguientes igualdades.**

a) $\cos\alpha = \text{sen}\,\alpha$ **b)** $\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha$ **c)** $\cos\alpha = 3 \cdot \text{sen}\,\alpha$

a) $\alpha = 45° \pm n \cdot 180°$ b) $\alpha = \pm n \cdot 180°$ c) $\alpha = 18°\ 26'\ 6''$

054 ¿Cuántos ángulos tienen el mismo seno que un ángulo dado?

Infinitos ángulos, siendo dos ángulos por cada vuelta de circunferencia.

055 Indica el signo que tienen las razones trigonométricas de estos ángulos, identificando el cuadrante en el que se encuentran.

a) 140° b) 653° c) 50° d) 470° e) 9° f) 1.111°

	140°	653°	50°	470°	9°	1.111°
sen	+	−	+	+	+	+
cos	−	+	+	−	+	+
tg	−	−	+	−	+	+

056 Di si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, razonando la respuesta.

a) $\cos 390° = \operatorname{sen} 60°$

b) $\operatorname{sen} 405° = \cos 45°$

c) $\operatorname{sen} 520° = \cos 30°$

d) $\cos 850° = -\cos 50°$

e) $\operatorname{tg} 7.200° = \cos 90°$

f) $\operatorname{sen} 120° = -\operatorname{sen} 60°$

a) Verdadera; $\cos 390° = \cos (360° + 30°) = \cos 30° = \operatorname{sen} 60°$

b) Verdadera; $\operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen} (360° + 45°) = \cos 45°$

c) Falsa; $\operatorname{sen} 520° = \operatorname{sen} (360° + 160°) = \operatorname{sen} 160° = \cos 70°$

d) Verdadera; $\cos 850° = \cos (2 \cdot 360° + 130°) = \cos 130° = -\cos 50°$

e) Verdadera; $\operatorname{tg} 7.200° = \operatorname{tg} 0° = \cos 90°$

f) Falsa; $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60°$

057 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos, reduciéndolas a otras razones conocidas de ángulos del 1.er cuadrante.

a) 210° b) 240° c) 315° d) 330°

a) $\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 315° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 315° = -\operatorname{tg} 45° = -1$

d) $\operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 330° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

058 Halla las razones trigonométricas de los ángulos, reduciéndolas a otras razones conocidas de ángulos del 1.er cuadrante.

a) 390° b) 480° c) 585° d) 600° e) 690° f) 675°

a) $sen\ 390° = sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$

$cos\ 390° = cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 390° = tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $sen\ 480° = sen\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 480° = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

$tg\ 480° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

c) $sen\ 585° = -sen\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 585° = -cos\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 585° = tg\ 45° = 1$

d) $sen\ 600° = -sen\ 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 600° = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

$tg\ 600° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

e) $sen\ 690° = -sen\ 30° = -\dfrac{1}{2}$

$cos\ 690° = cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 690° = -tg\ 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f) $sen\ 675° = -sen\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 675° = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 675° = -tg\ 45° = -1$

059 ●● **Sabiendo que *sen* 20° = 0,342; calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 110° **b) 200°** **c) 340°** **d) 380°**

a) $sen\ 110° = cos\ 20° = 0{,}94$

$cos\ 110° = -sen\ 20° = -0{,}342$

$tg\ 110° = -\dfrac{1}{tg\ 20°} = -2{,}747$

b) $sen\ 200° = -sen\ 20° = -0{,}342$

$cos\ 200° = -cos\ 20° = -0{,}94$

$tg\ 200° = tg\ 20° = 0{,}364$

c) $sen\ 340° = -sen\ 20° = -0{,}342$

$cos\ 340° = cos\ 20° = 0{,}94$

$tg\ 340° = -tg\ 20° = -0{,}364$

d) $sen\ 380° = sen\ 20° = 0{,}342$

$cos\ 380° = cos\ 20° = 0{,}94$

$tg\ 380° = tg\ 20° = 0{,}364$

060 ●● **Reduce estos ángulos al 1.er cuadrante.**

a) 1.930° **b) 375°** **c) 5.350°** **d) 999°**

a) $1.930° = 5 \cdot 360° + 130°$
Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de: $180° - 130° = 50°$.

b) $375° = 360° + 15°$
Sus razones trigonométricas son las mismas que las razones de 15°.

c) $5.350° = 14 \cdot 360° + 310°$
Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de: $360° - 310° = 50°$.

d) $999° = 2 \cdot 360° + 279°$
Sus razones trigonométricas se calculan a partir de las razones de: $360° - 279° = 81°$.

061 **Si *sen* $\alpha = -0{,}2$ y α pertenece al 4.º cuadrante, calcula *cos* α y *tg* α.**

$$sen\ \alpha = -0{,}2$$
$$cos\ \alpha = 0{,}98$$
$$tg\ \alpha = -0{,}205$$

062 **Si *cos* $\alpha = -0{,}5$; ¿qué se puede afirmar del ángulo α?**

Se puede afirmar que el ángulo α está en el segundo o tercer cuadrante, y es un ángulo del tipo $180° \pm 30°$.

063 **Si *sen* $\alpha = \frac{3}{4}$ y α es un ángulo agudo, halla sin utilizar la calculadora.**

a) ***sen*** **$(90° - \alpha)$**

b) ***cos*** **$(180° - \alpha)$**

c) ***tg*** **α**

$$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

a) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

b) $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

c) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

064 **Si *cos* $(180° - \alpha) = -\frac{1}{3}$ y α es un ángulo del 1.er cuadrante, calcula.**

a) ***sen*** **α**

b) ***cos*** **$(90° - \alpha)$**

c) ***tg*** **$(-\alpha)$**

$$sen\ (180° - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

a) $sen\ \alpha = sen\ (180° - \alpha) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = sen\ (180° - \alpha) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = tg\ (180° - \alpha) = -2\sqrt{2}$

065 Si $cos\ \alpha = \frac{5}{6}$ y α es un ángulo agudo, calcula.

a) $sen\ (90° + \alpha)$
b) $cos\ (180° + \alpha)$
c) $cos\ (-\alpha)$
d) $sen\ (90° - \alpha)$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

a) $sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha = \frac{5}{6}$

b) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = -\frac{5}{6}$

c) $cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha = \frac{5}{6}$

d) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = \frac{5}{6}$

066 Si $sen\ 42° = 0{,}669$ y $cos\ 42° = 0{,}743$; calcula las razones trigonométricas de 48°.

$sen\ 48° = 0{,}743$
$cos\ 48° = 0{,}669$
$tg\ 48° = 1{,}111$

067 Sabiendo que $sen\ 35° = 0{,}574$; halla las razones trigonométricas de 55° y 145°.

$sen\ 55° = 0{,}819$
$cos\ 55° = 0{,}574$
$tg\ 55° = 1{,}428$

$sen\ 145° = 0{,}574$
$cos\ 145° = -0{,}819$
$tg\ 145° = -0{,}7$

068 Dado $cos\ 24° = 0{,}914$; obtén las razones trigonométricas de su ángulo complementario.

$sen\ 66° = 0{,}914$
$cos\ 66° = 0{,}407$
$tg\ 66° = 2{,}246$

069 Calcula las razones trigonométricas de 66°, siendo $cos\ 114° = -0{,}407$.

$sen\ 66° = 0{,}914$
$cos\ 66° = 0{,}407$
$tg\ 66° = 2{,}246$

070 Determina el área de un triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 10 cm y 15 cm, y que los ángulos distintos al comprendido entre esos lados miden 80° y 70°.

El tercer ángulo mide: $180° - 80° - 70° = 30°$.

$$A = \frac{30 \cdot 20 \cdot sen\ 30°}{2} = 150\ \text{cm}^2$$

071 **HAZLO ASÍ**

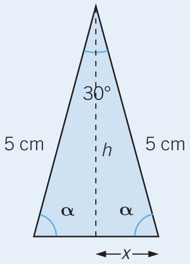
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES, CONOCIENDO SUS LADOS IGUALES Y SU ÁNGULO DESIGUAL?

Halla el área de un triángulo isósceles de lados iguales 5 cm y el ángulo desigual 30°.

PRIMERO. Se halla la medida de los ángulos iguales.

$$3 + \alpha + \alpha = 180°$$

$$\alpha = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$



SEGUNDO. Se calcula la altura.

$$sen\ 75° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot sen\ 75° = 4{,}83 \text{ cm}$$

TERCERO. Se determina la longitud de la base.

$$cos\ 75° = \frac{x}{5} \rightarrow x = 5 \cdot cos\ 75° = 1{,}29 \text{ cm}$$

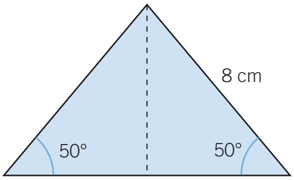
Por tanto, la base mide: $1{,}29 \cdot 2 = 2{,}58$ cm

CUARTO. Se halla el área.

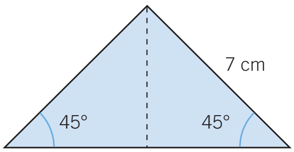
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2{,}58 \cdot 4{,}83}{2} = 6{,}23 \text{ cm}^2$$

072 ●● **Halla el área de estos triángulos isósceles.**

a)



b)



a) Llamando b a la base y h a la altura del triángulo:

$$h = 8 \cdot sen\ 50° = 6{,}13 \text{ cm}; \quad \frac{b}{2} = 8 \cdot cos\ 50° = 5{,}14 \text{ cm}$$

El área del triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = 5{,}14 \cdot 6{,}13 = 31{,}5 \text{ cm}^2$.

b) $h = 7 \cdot sen\ 45° = 7 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}95$ cm

$$\frac{b}{2} = 7 \cdot cos\ 45° = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}95 \text{ cm}$$

El área del triángulo es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = 4{,}95 \cdot 4{,}95 = 24{,}5 \text{ cm}^2$.

073 ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa mide 10 cm?

Denotamos por x a cada cateto, y sabiendo que los ángulos agudos miden 45°:

$$cos\ 45° = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot cos\ 45° = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

074 Calcula el valor de la apotema de un decágono regular de lado 20 cm. ¿Cuál es su área?

El ángulo central del decágono mide: 360° : 10 = 36°.

$$tg\left(\frac{36°}{2}\right) = tg\ 18° = \frac{10}{a} \rightarrow a = 31{,}25\ \text{cm}$$

$$A = \frac{20 \cdot 10 \cdot 31{,}25}{2} = 3.125\ \text{cm}^2$$

075 Halla el área de un decágono regular y de un octógono regular, ambos de 6 cm de lado. ¿Cuál es mayor?

Decágono:

El ángulo central del decágono mide: 360° : 10 = 36°.

$$tg\left(\frac{36°}{2}\right) = tg\ 18° = \frac{3}{a} \rightarrow a = 9{,}37\ \text{cm} \qquad A_d = \frac{6 \cdot a}{2} \cdot 10 = 281{,}1\ \text{cm}^2$$

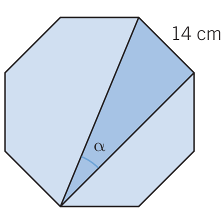
Octógono:

El ángulo central del octógono mide: 360° : 8 = 45°.

$$tg\left(\frac{45°}{2}\right) = tg\ 22{,}5° = \frac{3}{a} \rightarrow a = 7{,}31\ \text{cm} \qquad A_o = \frac{6 \cdot a}{2} \cdot 8 = 175{,}44\ \text{cm}^2$$

Tiene mayor área el decágono.

076 Determina el área sombreada de este octógono regular.



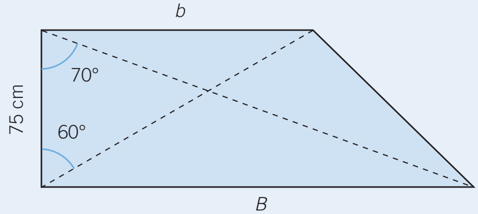
$$\alpha = \frac{45°}{2} = 22°\ 30'$$

$$A = \frac{14 \cdot \left(14 \cdot \dfrac{1}{tg\ \alpha}\right)}{2} = 236{,}59\ \text{cm}^2$$

077 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE UN TRAPECIO RECTÁNGULO?

Calcula el área del siguiente trapecio rectángulo.



PRIMERO. Se halla la medida de sus bases.

$$tg\ 60° = \frac{b}{75}$$

$$b = 75 \cdot tg\ 60° = 75 \cdot \sqrt{3} = 129{,}9 \text{ cm}$$

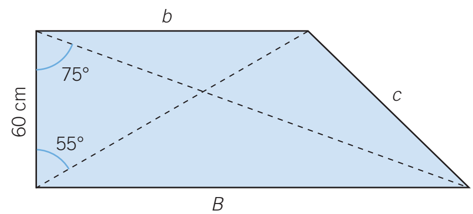
$$tg\ 70° = \frac{B}{75}$$

$$B = 75 \cdot tg\ 70° = 75 \cdot 2{,}75 = 206{,}25 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se calcula su área.

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{206{,}25 + 129{,}9}{2} \cdot 75 = 12.605{,}625 \text{ cm}^2$$

078 ●●● **Calcula el área y el perímetro del siguiente trapecio rectángulo.**



$$B = 60 \cdot tg\ 75° = 223{,}92 \text{ cm}$$

$$b = 60 \cdot tg\ 55° = 85{,}69 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{60^2 + (223{,}92 - 85{,}69)^2} = 150{,}69 \text{ cm}$$

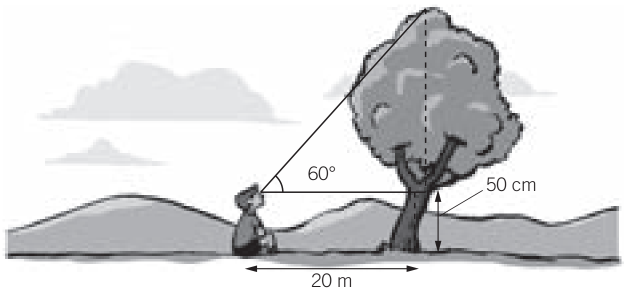
El área es:

$$A = \frac{223{,}92 + 85{,}69}{2} \cdot 60 = 9.288{,}3 \text{ cm}^2$$

El perímetro mide:

$$P = 223{,}92 + 85{,}69 + 60 + 150{,}69 = 520{,}3 \text{ cm}$$

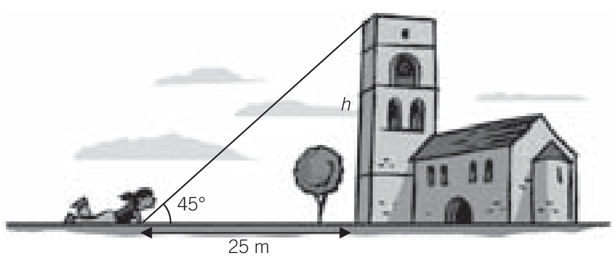
079 ¿Cuánto mide el árbol?



$h = 0,5 + 20 \cdot tg\,60° = 0,5 + 34,64 = 35,14$ m

El árbol mide 35,14 metros de altura.

080 Calcula la altura de la torre.



Denotando por h a la altura de la torre, se obtiene:

$$tg\ 45° = \frac{h}{25} \rightarrow h = 25 \cdot tg\ 45° = 25 \cdot 1 = 25 \text{ m}$$

La torre mide 25 m de altura.

081 ¿A qué distancia me encuentro de un edificio de 50 m de altura si observo su parte más elevada con un ángulo de 60°?

Siendo d la distancia a la que me encuentro del edificio:

$$tg\ 60° = \frac{50}{d} \rightarrow d = \frac{50°}{tg\ 60°} = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28,87 \text{ m}$$

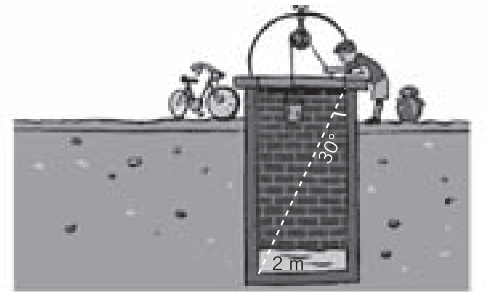
082 Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60°. Suponiendo que el hilo esté completamente estirado, halla la altura a la que está la cometa.

$$h = 100 \cdot sen\ 60° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

083 ●●● **Una lancha está amarrada al muelle por una maroma de 25 m, que forma con la horizontal de la orilla un ángulo de 30°. Suponiendo que la maroma esté completamente estirada, halla la distancia a la que está de la orilla.**

Distancia $= 25 \cdot sen\ 30° = 12{,}5$ m

084 ●●● **Calcula la profundidad de un pozo de 2 m de ancho si vemos el borde opuesto del fondo con un ángulo de 30°.**



Siendo d la profundidad del pozo:

$$tg\ 30° = \frac{2}{d} \rightarrow d = \frac{2}{tg\ 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3{,}46 \text{ m}$$

El pozo tiene 3,46 m de profundidad.

085 ●●● **Determina la superficie de un logotipo con forma de pentágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.**

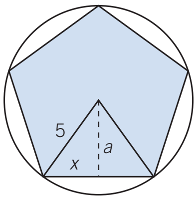
El ángulo central mide 72° y su mitad es 36°.

$a = 5 \cdot cos\ 36° = 4{,}05$ cm

$x = 5 \cdot sen\ 36° = 2{,}94$ cm

$b = 2x = 5{,}88$ cm

$$A = \frac{4{,}05 \cdot 5{,}88}{2} = 11{,}91 \text{ cm}^2$$



086 ●● **Desde un barco vemos la luz de un faro con una inclinación de 20° y, después de avanzar 18 km en esa dirección, se ve con un ángulo de 30°. ¿A qué distancia estamos del faro?**

$$\left.\begin{aligned} x \cdot tg\ 30° &= h \\ (x+18) \cdot tg\ 20° &= h \end{aligned}\right\} \rightarrow x \cdot 0{,}58 = (x+18) \cdot 0{,}36$$

$$\rightarrow 0{,}22x = 6{,}48 \rightarrow x = 29{,}45 \text{ km}$$

La distancia es: $18 + 29{,}45 = 47{,}45$ km.

087 ●● **Halla la cantidad de chapa necesaria para fabricar una señal de STOP de forma octogonal, sabiendo que la diagonal marcada mide 1,25 m.**

La cantidad de chapa necesaria para fabricar esta señal es equivalente al área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de $1{,}25 : 2 = 0{,}625$ m de radio.

Dividimos el octógono en 8 triángulos isósceles iguales. El ángulo desigual de cada triángulo isósceles es un ángulo central de $360° : 8 = 45°$.

Si llamamos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ a los otros dos ángulos, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \hat{B}\\ \hat{A} + \hat{B} + 45° = 180°\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$$

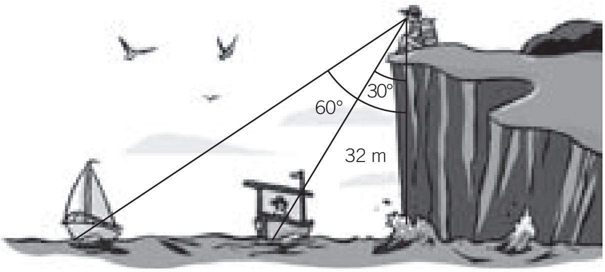
Si h es la altura del triángulo y b es la base:

$$h = 0{,}625 \cdot sen\, 67{,}5° = 0{,}58 \text{ m}$$

$$\frac{b}{2} = 0{,}625 \cdot cos\, 67{,}5° = 0{,}24 \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = 0{,}24 \cdot 0{,}58 = 0{,}14 \text{ m}^2 \rightarrow A_{Total} = 0{,}14 \cdot 8 = 1{,}1 \text{ m}^2$$

088 ●●● **En un acantilado, situado a 32 m sobre el nivel del mar, se divisan dos embarcaciones. Halla la distancia de las mismas si los respectivos ángulos son de 30° y 60°.**



Sean x e y las distancias indicadas en el gráfico.

$$tg\, 30° = \frac{x}{32} \rightarrow x = 32 \cdot tg\, 30° = 18{,}48 \text{ m}$$

$$tg\, 60° = \frac{y}{32} \rightarrow y = 32 \cdot tg\, 60° = 55{,}43 \text{ m}$$

La distancia entre las embarcaciones es: $55{,}43 - 18{,}48 = 36{,}95$ m.

089 **Desde cierto punto del suelo se ve la parte superior de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo es de 60°. Halla la altura de la torre.**

Llamando h a la altura de la torre y x a la distancia al pie de la torre:

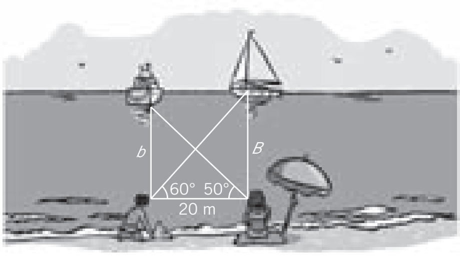
$$\left.\begin{array}{r} x \cdot tg\,30° = h \\ (x - 75) \cdot tg\,60° = h \end{array}\right\} \to x \cdot tg\,30° = (x - 75) \cdot tg\,60°$$

$$\to x \cdot tg\,30° - x \cdot tg\,60° = -75 \cdot tg\,60°$$

$$\to x \cdot (tg\,30° - tg\,60°) = -75 \cdot 1{,}73 \to x = \frac{-129{,}75}{0{,}57 - 1{,}73} = 112{,}53 \text{ m}$$

$h = x \cdot tg\,30° = 112{,}53 \cdot 0{,}57 = 64{,}14$ m. La torre mide 64,14 m de altura.

090 **Desde la playa se observan dos barcos. Calcula la distancia que hay entre ellos con los ángulos que se indican.**



Sea d la distancia que hay entre los dos barcos.

Hallamos la medida de b y B.

$$tg\,50° = \frac{b}{20} \to b = 20 \cdot tg\,50° = 23{,}84 \text{ m}$$

$$tg\,60° = \frac{B}{20} \to B = 20 \cdot tg\,60° = 20 \cdot \sqrt{3} = 34{,}64 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 20^2 + (34{,}64 - 23{,}84)^2 = 516{,}64 \to d = \sqrt{516{,}64} = 22{,}73 \text{ m}$$

Por tanto, los dos barcos distan 22,73 m.

091 **Desde la cima de una montaña, a una altura de 1.114 m, vemos una aldea y una granja situadas en el valle que está a una altura de 537 m sobre el nivel del mar. Si observamos la aldea con un ángulo de 68° y la granja con uno de 83°:**

a) ¿Cuál de los dos lugares está más cerca de la montaña?

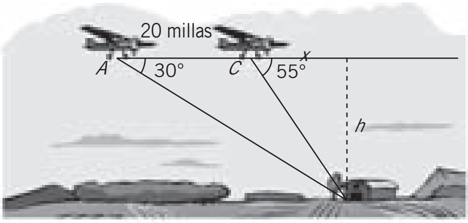
b) Si la montaña, la aldea y la granja se encuentran alineadas, halla la distancia que hay entre la aldea y la granja.

a) Está más cerca el lugar que se observa con menor grado, es decir, la aldea. La distancia a la aldea es: $(1.114 - 537) \cdot tg\,68° = 1.428{,}13$ m.

b) La distancia a la granja es: $(1.114 - 537) \cdot tg\,83° = 4.699{,}29$ m. La distancia entre la aldea y la granja es: $4.699{,}29 - 1.428{,}13 = 3.271{,}16$ m.

092 ●●

El piloto de un avión observa un punto del terreno con un ángulo de depresión de 30°. Dieciocho segundos más tarde, el ángulo de depresión obtenido sobre el mismo punto es de 55°. Si vuela horizontalmente y a una velocidad de 400 millas/hora, halla la altitud de vuelo.



La distancia recorrida por el avión es: $400 \cdot \frac{18}{3.600} = 20$ millas.

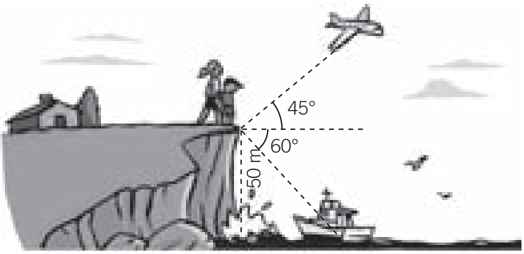
$$\left.\begin{array}{r} x \cdot tg\ 55° = h \\ (x+20) \cdot tg\ 30° = h \end{array}\right\} \rightarrow x \cdot 1{,}43 = (x+20) \cdot 0{,}58$$

$$\rightarrow 0{,}85x = 11{,}6 \rightarrow x = 13{,}65 \text{ millas}$$

$h = 13{,}65 \cdot 1{,}43 = 19{,}52$ millas. La altitud de vuelo es de 19,52 millas.

093 ●●●

En un acantilado, situado a 50 m sobre el nivel del mar, se encuentran dos amigos. Uno de ellos observa un barco con un ángulo de depresión de 60°, y el otro mira un avión, situado encima del barco, con un ángulo de elevación de 45°.



a) ¿A qué distancia se encuentra el barco de la costa?
b) ¿A qué altura vuela el avión?
c) ¿Cuál de los dos elementos está más lejos?

a) Llamando d a la distancia a la que se encuentra el barco de la costa:

$$tg\,30° = \frac{d}{50} \rightarrow d = 50 \cdot tg\,30° = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 28{,}87 \text{ m}$$

El barco se encuentra a 28,87 m de la costa.

b) Teniendo en cuenta que el avión está situado encima del barco, se obtiene:

$$tg\,45° = \frac{h}{28{,}87} \rightarrow h = 28{,}87 \cdot tg\,45° = 28{,}87 \text{ m}$$

El avión vuela a: $50 + 28{,}87 = 78{,}87$ m de altura sobre el mar.

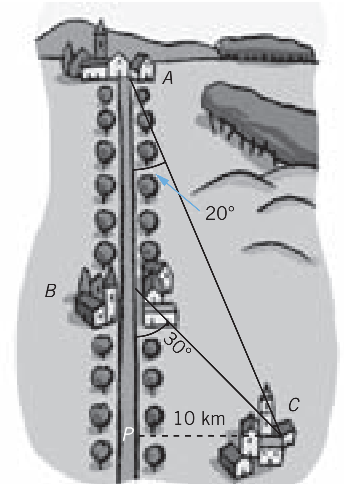
c) Siendo d_1 la distancia a la que se encuentra el barco, y d_2, la del avión:

$$d_1 = \frac{50}{cos\ 30°} = 50 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 57{,}7 \text{ m}$$

$$sen\ 45° = \frac{28{,}87}{d_2} \rightarrow d_2 = \frac{28{,}87}{sen\ 45°} = \frac{28{,}87}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40{,}8 \text{ m}$$

Luego el barco está más lejos de los amigos que el avión.

094 ●●● **Dos poblaciones, *A* y *B*, están situadas en una carretera que va del norte al sur. Otra población, *C*, a 10 kilómetros en línea recta de la carretera anterior, está situada a 20° al sureste de *A* y a 30° al sureste de *B*.**
¿Qué distancia separa *A* de *B*?

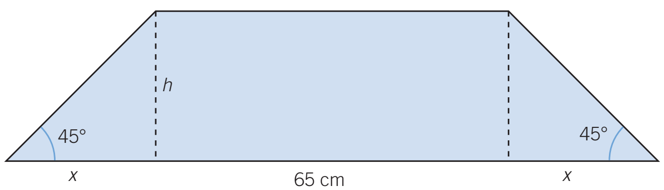


$$\overline{AP} = \frac{10}{tg\ 20°} = 27{,}47\ \text{km}$$

$$\overline{BP} = \frac{10}{tg\ 30°} = 17{,}32\ \text{km}$$

$$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 10{,}15\ \text{km}$$

095 ●●● **La superficie de un terreno de forma de trapecio es 1.200 m². Sabiendo que tiene dos ángulos de 45° y que la base menor mide 65 m, calcula la base mayor y la distancia entre las bases.**



$$tg\ 45° = \frac{h}{x} \rightarrow x = h$$

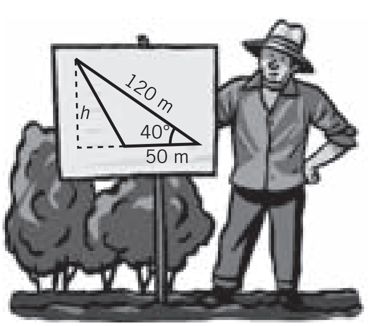
$$\frac{65 + (65 + 2x)}{2} \cdot h = 1.200 \xrightarrow{x = h} h^2 + 65h - 1.200 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} h = 15 \\ h = -80 \text{ (solución no válida)} \end{cases}$$

$$B = 65 + 2x = 5\ \text{m}$$

La base mayor mide 95 m y la distancia entre las bases es 15 m.

096 ●●● **¿Cuánto se obtendrá por vender esta parcela si se paga a 300 €/m²?**

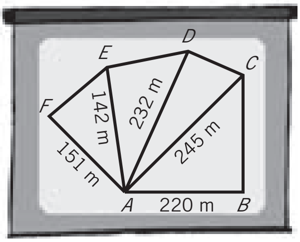


$$A = \frac{120 \cdot (50 \cdot sen\ 40°)}{2} = 1.928{,}36\ \text{m}^2$$

$$\text{Precio} = 1.928{,}36 \cdot 300 = 578.508\ €$$

097 **Calcula la superficie de este terreno.**

$$\widehat{BAC} = 33°\ 45'$$
$$\widehat{CAD} = 24°\ 13'$$
$$\widehat{DAE} = 42°\ 15'$$
$$\widehat{EAF} = 33°\ 41'$$



$$A_{BAC} = \frac{220 \cdot 245 \cdot sen\ 33°\ 45'}{2} = 14.972{,}62\ m^2$$
$$A_{CAD} = \frac{232 \cdot 245 \cdot sen\ 24°\ 13'}{2} = 11.657{,}55\ m^2$$
$$A_{DAE} = \frac{142 \cdot 232 \cdot sen\ 42°\ 15'}{2} = 11.698{,}17\ m^2$$
$$A_{EAF} = \frac{151 \cdot 142 \cdot sen\ 33°\ 41'}{2} = 5.945{,}9\ m^2$$
$$A = A_{BAC} + A_{CAD} + A_{DAE} + A_{EAF} = 44.274{,}24\ m^2$$

098 **Sin utilizar la calculadora, ordena de menor a mayor.**

a) ***cos* 24°** ***sen* 113°** ***cos* 292°** **b)** ***tg* 242°** **1,70**

a) *cos* 24°
sen 113° = *sen* (90° + 23°) = *cos* 23°
cos 292° = *cos* (360° − 68°) = *cos* 68°
En los ángulos agudos, cuanto mayor es el ángulo, menor es el coseno.
cos 292° < *sen* 113° < *cos* 24°

b) *tg* 242° = *tg* (180° + 62°) = *tg* 62°
$tg\ 60° = \sqrt{3} > 1{,}70$
En los ángulos agudos, cuanto mayor es el ángulo, mayor es la tangente.
1,70 < *tg* 62°

099 **Dos lados de un triángulo miden 15 cm y 20 cm.**

a) ¿Cuál es el área máxima que puede tener ese triángulo? ¿Por qué?

b) ¿Qué tipo de triángulo es en ese caso?

a) El área de un triángulo es:

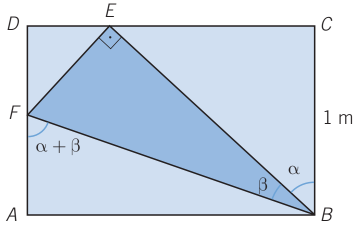
$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen\ \alpha}{2} \xrightarrow{sen\ \alpha \leq 1} A \leq \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A \leq \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

El mayor valor que puede tomar es 150 cm², cuando el seno vale 1.

b) El máximo valor se da cuando el seno es igual a 1, es decir, cuando el ángulo mide 90°, luego es un triángulo equilátero.

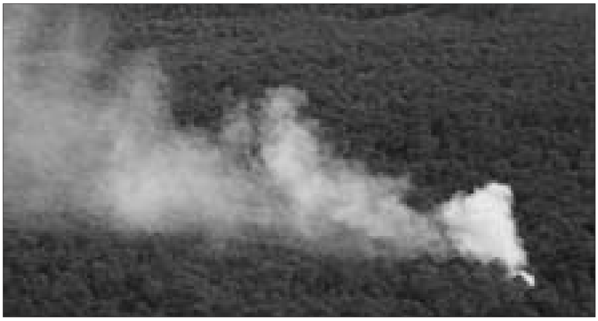
100 ●●● **Deduce una fórmula para *tg* $(\alpha + \beta)$ a partir de la longitud de los segmentos de la figura.**



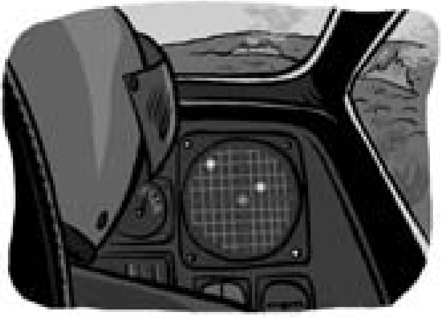
$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$$

EN LA VIDA COTIDIANA

101 ●●● **Los datos en los medios de comunicación sobre los incendios que han tenido lugar en el país durante el verano no han sido muy desfavorables. Sin embargo, el último fin de semana se ha producido un incendio en uno de los parques naturales.**

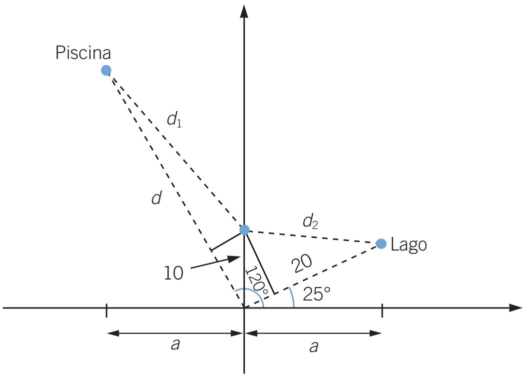


Desde uno de los helicópteros de protección civil, situado en el radar en el origen de coordenadas, el piloto observa un fuego en dirección Norte y la situación del lago más cercano a 25° y de la piscina municipal a 120°.



Desde la torre de control les dan el aviso de que el viento empieza a ser más fuerte, y que es necesario que el incendio sea controlado antes de que se propague.

¿Adónde irán a recoger agua?



Hay que calcular la menor de estas distancias: $20 + d_2$, $d + d_1$.

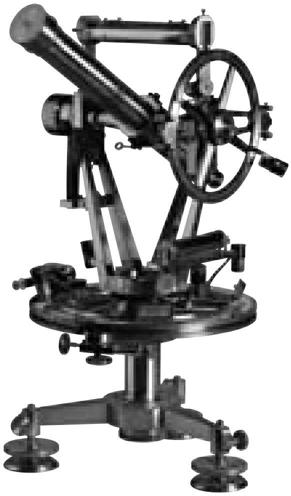
$$d_2 = \sqrt{(10 \cdot sen\ 65°)^2 + (20 - 10 \cdot cos\ 65°)^2} = 18{,}2 \text{ km}$$
$$\rightarrow 20 + d_2 = 38{,}2 \text{ km}$$

$$a = 20 \cdot cos\ 25° = 18{,}13 \rightarrow d = \frac{a}{cos\ 60°} = \frac{18{,}13}{0{,}5} = 36{,}26 \text{ km}$$

$$d_1 = \sqrt{(10 \cdot sen\ 30°)^2 + (36{,}26 - 10 \cdot cos\ 30°)^2} = 28{,}05$$
$$\rightarrow d + d_1 = 64{,}31 \text{ km}$$

Irán a recoger agua en el lago.

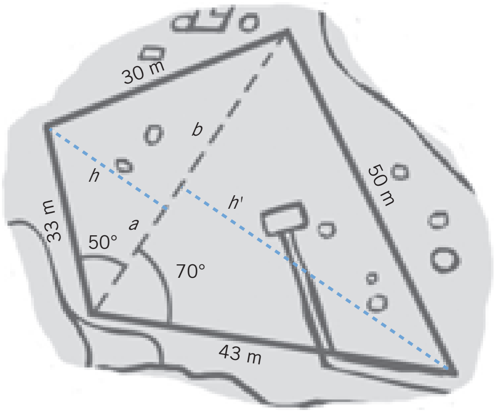
102 ●●● **El Ayuntamiento ha decidido construir viviendas de protección oficial en un terreno. Para realizar el proyecto han contratado a un estudio de arquitectos.**



Los encargados municipales no les han proporcionado las dimensiones del recinto, y uno de los aparejadores ha visitado el terreno para hacer las mediciones.

Luego han presentado el estudio incluyendo redes geodésicas del terreno, formadas por puntos desde los cuales se mide con gran precisión y que, además, son los vértices de triángulos adosados unos a otros.

Con estos datos, determina la superficie de terreno que va a ser edificable.



$h = 33 \cdot sen\ 50° = 25{,}28$ m

$a = 33 \cdot cos\ 50° = 21{,}21$ m

$b = \sqrt{30^2 - 25{,}28^2} = 16{,}15$ m

$h' = 43 \cdot sen\ 70° = 40{,}41$ m

$$A_{ACD} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{37{,}36 \cdot 25{,}28}{2} = 472{,}23 \text{ m}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{(a+b) \cdot h'}{2} = \frac{37{,}36 \cdot 40{,}41}{2} = 754{,}86 \text{ m}^2$$

$$A = A_{ACD} + A_{ABC} = 472{,}23 + 754{,}86 = 1.227{,}09 \text{ m}^2$$

La superficie del terreno que será edificable es de 1.227,09 m^2.