13 Combinatoria

MÉTODOS DE CONTEO

- MÉTODO DEL PRODUCTO
- MÉTODO DEL DIAGRAMA DE ÁRBOL

NÚMEROS COMBINATORIOS

- PROPIEDADES

BINOMIO DE NEWTON

VARIACIONES

PERMUTACIONES

COMBINACIONES

El destierro

A nadie en su sano juicio se le ocurriría discutir una orden de Su Eminencia. Y mucho menos a Etiénne Pascal, para quien el cardenal Richelieu había dispuesto que pasara a ocupar el puesto de recaudador en la zona de Rouen.

Este encargo, a los ojos de su hijo, Blaise Pascal, tenía poco de premio y mucho de castigo.

Blaise había observado que el carácter de su padre había cambiado, pasaba el día fuera de casa y por la noche tenía que repasar los asientos contables que periódicamente enviaba a París. El joven, deseoso de ayudar, ideó una máquina de contar para facilitar el trabajo de su padre.

–¡Padre! Tengo algo que podría ahorraros un tiempo precioso –dijo Blaise irrumpiendo en la sala.

–Ahora no puedo atenderte, Blaise –contestó su padre de forma cansada–, mañana tengo que enviar el informe y he de comprobar todas las operaciones.

–De eso se trata, padre –dijo Blaise y comenzó a introducir las cantidades, unas sumando y otras restando, con las que la máquina operaba sin esfuerzo alguno.

–¡Gracias, hijo! Ahora mi trabajo queda reducido a la mitad y, tal vez, si los avances agradan a Richelieu nos ofrezca la posibilidad de volver a París.

El joven Blaise, por primera vez en tres años, vio cerca los jardines de París y el final de su destierro en Rouen.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
...

En este triángulo de Pascal, comprueba que la suma de cada fila es una potencia de 2. ¿Cuánto vale la suma de los números de la fila n*?*

Podemos observar que la suma de todos los números de cada fila forman la sucesión 1, 2, 4, 8...

Es una progresión geométrica de razón 2 y cuyo término general es: $a_n = 2^{n-1}$.

La suma de los números de la fila **n** ***coincide con el término*** **n*-ésimo de la progresión.***

EJERCICIOS

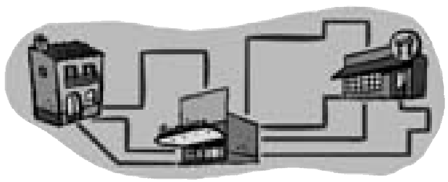
001 **Un equipo de fútbol tiene 2 equipaciones, compuestas de camiseta, pantalón y medias, de diferentes colores, verde y azul. ¿Cuántas formas distintas tendrán para vestirse sin que se repita la indumentaria?**

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \rightarrow$ Tendrán 8 posibilidades distintas para vestirse.

002 **¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar las 4 letras de la palabra PACO?**

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \rightarrow$ Se pueden colocar de 24 maneras diferentes.

003 **¿Cuántos caminos diferentes hay para llegar de mi casa al restaurante pasando por el cine?**



$3 \cdot 4 = 12$

Hay 12 caminos diferentes.

004 **Mediante un diagrama de árbol, indica cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de letras que podemos formar con las 4 letras de la palabra ROSA.**

Las distintas posibilidades son:

ROSA	OSAR	SARO	AROS
ROAS	OSRA	SAOR	ARSO
RSAO	OARS	SORA	ASOR
RSOA	OASR	SOAR	ASRO
RAOS	ORAS	SROA	AOSR
RASO	ORSA	SRAO	AORS

Hay 24 posibilidades distintas.

005 **Lanzamos simultáneamente una moneda y un dado de 6 caras, numeradas del 1 al 6.**
Describe cuántas y cuáles son las posibilidades del experimento. Ayúdate con un diagrama de árbol.

Cara (C) → 1, 2, 3, 4, 5, 6

Cruz (X) → 1, 2, 3, 4, 5, 6

El número de posibilidades del experimento es 12:

C1 C2 C3 C4 C5 C6 X1 X2 X3 X4 X5 X6

006 **Para los cargos de delegado y subdelegado de tu clase se han presentado 3 estudiantes: Juan, Rosa y María. Representa, mediante un diagrama de árbol, las posibles combinaciones que se pueden dar en la elección.**

Delegado	Subdelegado	Delegado	Subdelegado	Delegado	Subdelegado
Juan	Rosa	Rosa	Juan	María	Juan
	María		María		Rosa

007 **¿Cuántos números de 3 cifras, ninguna de ellas repetida, se pueden formar con los números impares? ¿Cuáles son?**

135	137	139	153	157	159	173	175	179	193	195	197
315	317	319	351	357	359	371	375	379	391	395	397
513	517	519	531	537	539	571	573	579	591	593	597
713	715	719	731	735	739	751	753	759	791	793	795
913	915	917	931	935	937	951	953	957	971	973	975

Hay 60 números posibles.

008 **Calcula.**

a) $8!$ **b)** $\binom{6}{2}$ **c)** $15!$ **d)** $\binom{8}{4}$

a) $8! = 40.320$

b) $\binom{6}{2} = 15$

c) $15! = 1.307.674.368.000$

d) $\binom{8}{4} = 70$

009 **Haz las operaciones.**

a) $12 \cdot 11!$ **b)** $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$ **c)** $12! - 11!$ **d)** $\binom{5}{2} - \binom{4}{2}$

a) $12 \cdot 11! = 479.001.600$

b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 35 + 35 = 70$

c) $12! - 11! = 439.084.800$

d) $\binom{5}{2} - \binom{4}{2} = 10 - 6 = 4$

010 **Simplifica estas operaciones con factoriales y números combinatorios.**

a) $(n+1) \cdot n!$ **b)** $\binom{n}{n}$ **c)** $\binom{n}{0}$ **d)** $(n+1)!$ **e)** $(n+1)! - n!$ **f)** $\binom{n}{1}$ **g)** $\binom{n}{n-1}$ **h)** $(n-1)! \cdot (n-3)!$

a) $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

b) $\binom{n}{n} = 1$

c) $\binom{n}{0} = 1$

d) $(n+1)!$

e) $(n+1)! - n! = n \cdot n!$

f) $\binom{n}{1} = n$

g) $\binom{n}{n-1} = n$

h) $(n-1)! \cdot (n-3)!$

011 **Realiza las siguientes operaciones con números combinatorios.**

a) $\binom{5}{4}+\binom{10}{5}-\binom{8}{7}-\binom{9}{3}$

b) $\binom{10}{4}+\binom{8}{5}-\binom{7}{7}-\binom{5}{3}$

c) $\binom{7}{7}-\binom{7}{0}+\binom{9}{3}-\binom{9}{6}$

a) $\binom{5}{4}+\binom{10}{5}-\binom{8}{7}-\binom{9}{3}=\dfrac{5!}{4!\cdot 1!}+\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}-\dfrac{8!}{7!\cdot 1!}-\dfrac{9!}{3!\cdot 6!}=$
$= 5+252-8-84=165$

b) $\binom{10}{4}+\binom{8}{5}-\binom{7}{7}-\binom{5}{3}=\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}+\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}-1-\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=$
$=210+56-1-10=255$

c) $\binom{7}{7}-\binom{7}{0}+\binom{9}{3}-\binom{9}{6}=\left[\binom{7}{7}-\binom{7}{0}\right]+\left[\binom{9}{3}-\binom{9}{6}\right]=0+0=0$

012 **Aplica las propiedades de los números combinatorios, sin realizar las operaciones, y calcula $\binom{5}{3}$, sabiendo que $\binom{5}{2}=10$.**

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{5-3}=\binom{5}{2}=10$$

013 **Haz estas operaciones.**

a) $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}$ **b)** $\binom{10}{6}+\binom{9}{6}$

a) $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=\binom{8}{5}=\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$

b) $\binom{10}{6}+\binom{9}{6}=\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}+\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}=210+84=294$

014 **Calcula estas potencias de binomios y simplifica todo lo que sea posible.**

a) $(x+1)^6$ **c)** $\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^7$ **e)** $(5-y)^4$

b) $(2x-1)^5$ **d)** $(2x+2)^6$ **f)** $\left(\dfrac{3}{4}+x\right)^4$

a) $(x+1)^6=\binom{6}{0}x^6\cdot 1^0+\binom{6}{1}x^5\cdot 1^1+\binom{6}{2}x^4\cdot 1^2+\binom{6}{3}x^3\cdot 1^3+\binom{6}{4}x^2\cdot 1^4\ +$
$+\binom{6}{5}x^1\cdot 1^5+\binom{6}{6}x^0\cdot 1^6=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$

b) $(2x-1)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5\cdot(-1)^0 + \binom{5}{1}(2x)^4\cdot(-1)^1 + \binom{5}{2}(2x)^3\cdot(-1)^2 +$
$+\binom{5}{3}(2x)^2\cdot(-1)^3 + \binom{5}{4}(2x)^1\cdot(-1)^4 + \binom{5}{5}(2x)^0\cdot(-1)^5 =$
$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$

c) $\left(\frac{1}{2}-x\right)^7 = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot(-x)^0 + \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot(-x)^1 + \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot(-x)^2 +$
$+\binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot(-x)^3 + \binom{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot(-x)^4 + \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-x)^5 +$
$+\binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot(-x)^6 + \binom{7}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot(-x)^7 =$
$= \frac{1}{128} - \frac{7}{64}x + \frac{21}{32}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{4}x^5 + \frac{7}{2}x^6 - x^7$

d) $(2x+2)^6 = \binom{6}{0}(2x)^6\cdot 2^0 + \binom{6}{1}(2x)^5\cdot 2^1 + \binom{6}{2}(2x)^4\cdot 2^2 + \binom{6}{3}(2x)^3\cdot 2^3 +$
$+\binom{6}{4}(2x)^2\cdot 2^4 + \binom{6}{5}(2x)^1\cdot 2^5 + \binom{6}{6}(2x)^0\cdot 2^6 =$
$= 64x^6 + 384x^5 + 960x^4 + 1.280x^3 + 960x^2 + 384x + 64$

e) $(5-y)^4 = \binom{4}{0}5^4\cdot(-y)^0 + \binom{4}{1}5^3\cdot(-y)^1 + \binom{4}{2}5^2\cdot(-y)^2 +$
$+\binom{4}{3}5^1\cdot(-y)^3 + \binom{4}{4}5^0\cdot(-y)^4 =$
$= 625 - 500y + 150y^2 - 20y^3 + y^4$

f) $\left(\frac{3}{4}+x\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot x^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot x^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot x^2 +$
$+\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot x^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0\cdot x^4 = \frac{81}{256} + \frac{27}{16}x + \frac{27}{8}x^2 + 3x^3 + x^4$

015 **Desarrolla los siguientes binomios.**

a) $(a+b)^6$ **b) $(a-b)^8$**

a) $(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6\cdot b^0 + \binom{6}{1}a^5\cdot b^1 + \binom{6}{2}a^4\cdot b^2 + \binom{6}{3}a^3\cdot b^3 +$
$+\binom{6}{4}a^2\cdot b^4 + \binom{6}{5}a^1\cdot b^5 + \binom{6}{6}a^0\cdot b^6 =$
$= a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

b) $(a-b)^8 = \binom{8}{0}a^8\cdot(-b)^0 + \binom{8}{1}a^7\cdot(-b)^1 + \binom{8}{2}a^6\cdot(-b)^2 +$
$+\binom{8}{3}a^5\cdot(-b)^3 + \binom{8}{4}a^4\cdot(-b)^4 + \binom{8}{5}a^3\cdot(-b)^5 +$
$+\binom{8}{6}a^2\cdot(-b)^6 + \binom{8}{7}a^1\cdot(-b)^7 + \binom{8}{8}a^0\cdot(-b)^8 =$
$= a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 +$
$+ 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

016 **Desarrolla el binomio.**

$$(ax^2 - y)^5$$

$$(ax^2 - y)^5 = \binom{5}{0}(ax^2)^5 \cdot (-y)^0 + \binom{5}{1}(ax^2)^4 \cdot (-y)^1 + \binom{5}{2}(ax^2)^3 \cdot (-y)^2 +$$
$$+ \binom{5}{3}(ax^2)^2 \cdot (-y)^3 + \binom{5}{4}(ax^2)^1 \cdot (-y)^4 + \binom{5}{5}(ax^2)^0 \cdot (-y)^5 =$$
$$= a^5x^{10} - 5a^4x^8y + 15a^3x^6y^2 - 10a^2x^4y^3 + 5ax^2y^4 - y^5$$

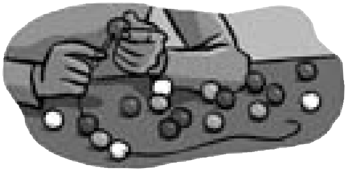
017 **Hemos alquilado un palco en el teatro con 6 asientos. ¿De cuántas formas podemos sentarnos mis padres, mi hermana y yo?**

$V_{6,4} = \dfrac{6!}{2!} = 360 \rightarrow$ Podemos sentarnos de 360 formas.

018 **Además de nosotros, vienen al palco dos amigos más. ¿Cuántas agrupaciones distintas podemos hacer?**

En este caso habrá tantos asientos como personas.
Podemos hacer: $P_6 = 6! = 720$ agrupaciones

019 **Con 14 bolas rojas, 13 azules, 12 naranjas y 11 blancas, ¿cuántos collares diferentes de 10 bolas podemos hacer?**



$VR_{4,\,10} = 4^{10} = 1.048.576$
Podemos hacer 1.048.576 collares.

020 **Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?**

$C_{4,2} = \dbinom{4}{2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \rightarrow$ Se pueden hacer 6 mezclas de dos colores.

021 **En una clase de 25 alumnos se tiene que elegir delegado y subdelegado. ¿Cuántas parejas se pueden formar para desempeñar estos cargos?**

$V_{25,2} = \dfrac{25!}{(25-2)!} = \dfrac{25!}{23!} = 25 \cdot 24 = 600 \rightarrow$ Se pueden formar 600 parejas.

022 **Tenemos 6 pesas de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 kg. ¿Cuántas pesadas diferentes podemos hacer?**

Dependiendo de si utilizamos 1, 2, 3, 4, 5 o 6 pesas, el número de pesadas distintas es:

$$C_{6,\,1} + C_{6,\,2} + C_{6,\,3} + C_{6,\,4} + C_{6,\,5} + C_{6,\,6} =$$
$$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 \text{ pesadas}$$

023 **Calcula el número de alineaciones distintas que podremos hacer para jugar un partido de fútbol, si tenemos 22 jugadores en la plantilla.**

$$C_{22,\,11} = \frac{22!}{11! \cdot 11!} = 705.432 \rightarrow \text{Se pueden hacer 705.432 alineaciones.}$$

024 **Con las letras de la palabra POTENCIA, ¿cuántas palabras se pueden formar, con o sin sentido, suponiendo que las letras puedan repetirse? ¿Y si no se pueden repetir?**

Si las letras pueden repetirse, dependerá del número de letras que queramos que tenga la palabra; así, si tiene n letras: $VR_{8,\,n} = 8^n$

Si las letras no pueden repetirse, dependerá del número de letras que queramos que tenga la palabra; así, si tiene n letras: $V_{8,n} = \dfrac{8!}{(8-n)!}$

025 **Tres compañeros de un centro escolar están en la fila de un autobús. ¿De cuántas maneras se pueden subir, sabiendo que tienen que hacerlo de uno en uno? ¿Y si van cinco compañeros?**

Si son tres compañeros: $P_3 = 3! = 6$, pueden subir de 6 formas diferentes.

Si son cinco compañeros: $P_5 = 5! = 120$, pueden subir de 120 formas diferentes.

026 **¿Cuántos números de 7 cifras iguales o diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 4, 5, 7 y 8?**

$VR_{5,\,7} = 5^7 = 78.125 \rightarrow$ Se pueden formar 78.125 números distintos.

027 **¿De cuántas maneras distintas pueden llegar 4 nadadores a la meta?**

En este caso influye el orden y se trabaja con todos los elementos, pero no se repite ninguno, luego habrá que calcular el número de permutaciones de 4 elementos.

$P_4 = 4! = 24 \rightarrow$ Pueden llegar a la meta de 24 maneras.

028 **¿De cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano, de modo que no estén en el mismo dedo?**

$$V_{5,\,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20 \rightarrow \text{Podemos colocarlos de 20 formas.}$$

ACTIVIDADES

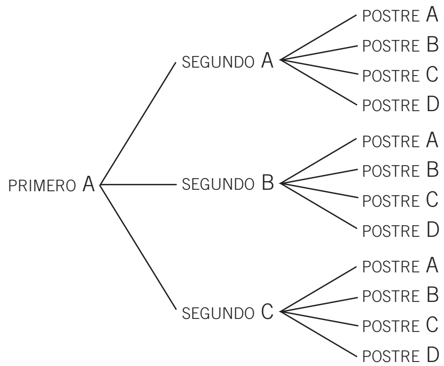
029 **Lanzamos un dado y una moneda consecutivamente. Razona cuántos resultados diferentes se pueden producir.**

Por cada resultado distinto del dado se pueden obtener dos resultados de la moneda. Aplicando el método del producto concluimos que se pueden producir: $6 \cdot 2 = 12$ resultados diferentes.

030 ●

En un restaurante, el menú del día tiene 3 primeros platos, 3 segundos y 4 postres para elegir. ¿Cuántos menús diferentes podemos confeccionar? Utiliza el método del producto y represéntalo con un diagrama de árbol.

Utilizando el método del producto podemos confeccionar: $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ menús distintos. En el siguiente diagrama de árbol, aparecen los posibles menús con el plato PRIMERO A. El diagrama de árbol es análogo con el plato PRIMERO B y con el plato PRIMERO C.



031 ●●

La clave de acceso de un ordenador consta de 4 caracteres (solo letras o números) y distingue entre letras mayúsculas y minúsculas. Calcula el número de posibilidades distintas que hay para escribir la clave.

Suponiendo que un ordenador personal tiene 26 letras (sin considerar la letra ñ), y teniendo en cuenta que distingue entre mayúsculas y minúsculas, hay 52 posibles letras y 10 números. En total, son 62 elementos. Por tanto, el número de posibilidades que hay para escribir la clave es el número de variaciones con repetición de 62 elementos, tomados de 4 en 4.

$$VR_{62,\,4} = 62^4 = 14.776.336 \text{ posibilidades}$$

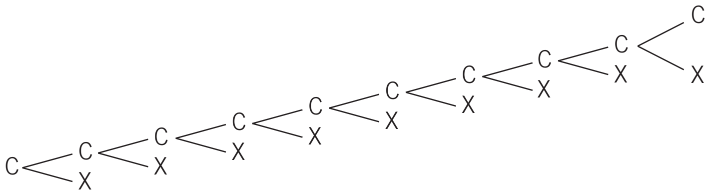
032 ●●

Susana dispone en su armario de 2 faldas, 3 pares de pantalones de diferentes colores, 2 blusas, 3 camisetas y 3 sombreros. Construye, en un diagrama de árbol, las posibles combinaciones que puede hacer.

Consideramos que no se pueden poner falda y pantalón juntos, ni camiseta y blusa a la vez. Por tanto, el diagrama de árbol es:

Se procedería de forma análoga con PANTALÓN 2 y PANTALÓN 3. Después, se hace un diagrama de árbol similar al anterior sustituyendo las camisetas por BLUSA 1 y BLUSA 2. Por último, se realizan los diagramas de árbol similares a los anteriores con FALDA 1 y FALDA 2.

033 ●● **Representa, en un diagrama de árbol, los resultados obtenidos al lanzar una moneda al aire y anotar el resultado de 10 tiradas.**



El diagrama de árbol se completaría añadiendo las ramas (C–X) a cada X que aparece en el diagrama. Por último, se haría otro diagrama análogo, considerando que la primera tirada es X.

034 ●● **El código PIN de un teléfono móvil está formado por 4 dígitos. Halla el número de códigos diferentes que podemos poner en el teléfono.**

Teniendo en cuenta que el teclado de un teléfono móvil dispone de 10 números distintos, el número de códigos diferentes es el número de variaciones con repetición de 10 elementos, tomados de 4 en 4.

$$VR_{10,\,4} = 10^4 = 10.000 \text{ códigos}$$

035 ● **Calcula el valor de los siguientes números combinatorios.**

a) $\binom{80}{70}$ **c)** $\binom{60}{40}$

b) $\binom{50}{30}$ **d)** $\binom{90}{80}$

a) $\binom{80}{70} = \dfrac{80!}{70! \cdot 10!} = 1.646.492.110.120$

b) $\binom{50}{30} = \dfrac{50!}{30! \cdot 20!} = 47.129.212.243.960$

c) $\binom{60}{40} = \dfrac{60!}{40! \cdot 20!} = 4.191.844.505.805.495$

d) $\binom{90}{80} = \dfrac{90!}{80! \cdot 10!} = 5.720.645.481.903$

036 **Realiza estas operaciones con números combinatorios.**

a) $\binom{9}{4}+\binom{20}{5}-\binom{10}{2}-\binom{6}{3}$ **b)** $\binom{10}{9}+\binom{8}{7}-\binom{7}{7}-\binom{5}{4}$

a) $\binom{9}{4}+\binom{20}{5}-\binom{10}{2}-\binom{6}{3}=\dfrac{9!}{4!\cdot 5!}+\dfrac{20!}{5!\cdot 15!}-\dfrac{10!}{2!\cdot 8!}-\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=$

$=126+15.504-45-208=15.565$

b) $\binom{10}{9}+\binom{8}{7}-\binom{7}{7}-\binom{5}{4}=10+8-1-5=12$

037 **Razona si es o no cierta esta igualdad.**

$$n!+m!=(n+m)!$$

Pon varios ejemplos en los que compruebes si la igualdad es cierta o falsa.

La igualdad de números combinatorios $n!+m!=(n+m)!$ no es cierta.
Veamos algunos ejemplos en los que no se cumple la igualdad.

$$\left.\begin{aligned}3!+2!&=6+2=8\\(3+2)!&=5!=120\end{aligned}\right\}\to 3!+2!\neq(3+2)!$$

$$\left.\begin{aligned}5!+3!&=120+6=126\\(5+3)!&=8!=40.320\end{aligned}\right\}\to 5!+3!\neq(5+3)!$$

038 **Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes números factoriales.**

a) 12!	c) 7!	e) 12 · 6!	g) 25!
b) 2!	d) 22!	f) 3 · 3!	h) 7 · 6!

a) $12!=479.001.600$

b) $2!=2$

c) $7!=5.040$

d) $22!\simeq 1{,}124\cdot 10^{21}$

e) $12\cdot 6!=8.640$

f) $3\cdot 3!=18$

g) $25!\simeq 1{,}55\cdot 10^{25}$

h) $7\cdot 6!=5.040$

039 **Calcula el valor de los números combinatorios, utilizando, si es necesario, la calculadora científica.**

a) $\binom{16}{14}$ **b)** $\binom{70}{3}+\binom{70}{4}$

a) $\binom{16}{14}=120$

b) $\binom{70}{3}+\binom{70}{4}=\binom{71}{4}=54.740+916.895=971.635$

040 Demuestra con ejemplos que se verifican estas igualdades.

a) $\binom{n}{n-1} = n$ b) $\binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$

a) $\binom{5}{4} = 5$

b) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 = \frac{1}{2}(6^2 - 6)$

041 Desarrolla las potencias de estos binomios.

a) $(a-b)^5$ b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ d) $(3-2a)^6$ e) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ f) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$

a) $$(a-b)^5 = \binom{5}{0}a^5\cdot(-b)^0 + \binom{5}{1}a^4\cdot(-b)^1 + \binom{5}{2}a^3\cdot(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2\cdot(-b)^3 + \binom{5}{4}a^1\cdot(-b)^4 + \binom{5}{5}a^0\cdot(-b)^5 =$$
$$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

b) $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}x^5\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{5}{1}x^4\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{5}{2}x^3\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{5}{3}x^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}x^1\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5}x^0\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^5 =$$
$$= x^5 - 5x^3 + 10x - 10x^{-1} + 5x^{-3} - x^{-5}$$

c) $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}x^5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{5}{1}x^4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{5}{2}x^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{5}{3}x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}x^1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5}x^0\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^5 =$$
$$= x^5 + 5x^3 + 10x + 10x^{-1} + 5x^{-3} + x^{-5}$$

d) $$(3-2a)^6 = \binom{6}{0}3^6\cdot(-2a)^0 + \binom{6}{1}3^5\cdot(-2a)^1 + \binom{6}{2}3^4\cdot(-2a)^2 + \binom{6}{3}3^3\cdot(-2a)^3 + \binom{6}{4}3^2\cdot(-2a)^4 + \binom{6}{5}3^1\cdot(-2a)^5 + \binom{6}{6}3^0\cdot(-2a)^6 =$$
$$= 729 - 2.916a + 4.860a^2 - 4.320a^3 + 2.160a^4 - 576a^5 + 64a^6$$

e) $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}x^6\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1}x^5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2}x^4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}x^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}x^1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}x^0\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6}$$

f) $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}x^6\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^0 + \binom{6}{1}x^5\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^1 + \binom{6}{2}x^4\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}x^3\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^3 + \binom{6}{4}x^2\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}x^1\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}x^0\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^6 =$$
$$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15x^{-2} - 6x^{-4} + x^{-6}$$

042 ¿Cuál es el desarrollo del binomio $(x + 4y)^5$?

$$(x+4y)^5 = \binom{5}{0}x^5 \cdot (4y)^0 + \binom{5}{1}x^4 \cdot (4y)^1 + \binom{5}{2}x^3 \cdot (4y)^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot (4y)^3 +$$
$$+ \binom{5}{4}x^1 \cdot (4y)^4 + \binom{5}{5}x^0 \cdot (4y)^5 =$$
$$= x^5 + 20x^4y + 160x^3y^2 + 640x^2y^3 + 1.280xy^4 + 1.024y^5$$

043 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNO DE LOS TÉRMINOS DE UN BINOMIO DE NEWTON?

Calcula el término octavo de $(2x - y)^{12}$.

PRIMERO. Se determinan a, b y n en el binomio.

$$(2x - y)^{12} \rightarrow a = 2x$$
$$b = -y$$
$$n = 12$$

SEGUNDO. El término m del desarrollo del binomio de Newton es:

$$\binom{n}{m-1}a^{n-(m-1)}b^{(m-1)}$$

El término octavo es $m = 8$ si:

$$\binom{n}{m-1}a^{n-(m-1)}b^{(m-1)}$$
$$\big\downarrow \; a = 2x,\; b = -y,\; n = 12,\; m = 8$$
$$\binom{12}{8-1}(2x)^{12-(8-1)}(-y)^{(8-1)} = -792 \cdot 32x^5 \cdot y^7 = -25.344x^5y^7$$

044 **Calcula el término sexto de $(3x + y)^9$.**

$$\binom{9}{5}(3x)^4 \cdot y^5 = 126 \cdot 81x^4 \cdot y^5 = 10.206x^4y^5$$

045 **Halla el término tercero de $(x + 2y)^5$.**

$$\binom{5}{2}x^3 \cdot (2y)^2 = 10x^3 \cdot 4y^2 = 40x^3y^2$$

046 **Obtén el término noveno de $(3x + y)^9$.**

$$\binom{9}{8}(3x)^1 \cdot y^8 = 9 \cdot 3x \cdot y^8 = 27xy^8$$

047 Calcula la suma de todos los coeficientes de los polinomios.

a) $(x + y)^3$
b) $(x + y)^4$
c) $(x + y)^5$
d) $(x + y)^6$
e) $(x - y)^3$
f) $(x - y)^4$
g) $(x - y)^5$
h) $(x - y)^6$

a) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8$

b) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

c) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$

d) $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64$

e) $\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0$

f) $\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0$

g) $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0$

h) $\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 0$

048 Halla estas variaciones.

a) De 6 elementos, tomados de 3 en 3.
b) De 10 elementos, tomados de 2 en 2.
c) De 19 elementos, tomados de 4 en 4.
d) Con repetición de 4 elementos, tomados de 3 en 3.
e) Con repetición de 20 elementos, tomados de 5 en 5.
f) Con repetición de 17 elementos, tomados de 4 en 4.

a) $V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$

b) $V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 90$

c) $V_{19,4} = \frac{19!}{15!} = 93.024$

d) $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

e) $VR_{20,5} = 20^5 = 3.200.000$

f) $VR_{17,4} = 17^4 = 83.521$

049 Calcula las siguientes permutaciones.

a) De 6 elementos.
b) De 11 elementos.
c) De 19 elementos.
d) De 8 elementos.
e) De 20 elementos.
f) De 17 elementos.
g) De 10 elementos.
h) De 15 elementos.

a) $P_6 = 6! = 720$
b) $P_{11} = 11! = 39.916.800$
c) $P_{19} = 19! \simeq 1,2 \cdot 10^{17}$
d) $P_8 = 8! = 40.320$
e) $P_{20} = 20! \simeq 2,4 \cdot 10^{18}$
f) $P_{17} = 17! \simeq 3,5 \cdot 10^{14}$
g) $P_{10} = 10! = 3.628.800$
h) $P_{15} = 15! \simeq 1,3 \cdot 10^{12}$

050 Realiza las combinaciones.

a) De 6 elementos, tomados de 4 en 4.
b) De 10 elementos, tomados de 2 en 2.
c) De 19 elementos, tomados de 4 en 4.
d) De 4 elementos, tomados de 3 en 3.
e) De 20 elementos, tomados de 5 en 5.
f) De 17 elementos, tomados de 4 en 4.

a) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

b) $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

c) $C_{19,4} = \binom{19}{4} = \dfrac{19!}{4! \cdot 15!} = 3.876$

d) $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

e) $C_{20,5} = \binom{20}{5} = \dfrac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$

f) $C_{17,4} = \binom{17}{4} = \dfrac{17!}{4! \cdot 13!} = 2.380$

051 Calcula y simplifica.

a) $P_4 + P_5$ **b)** $P_4 + P_3 + P_2$ **b)** $P_7 - P_6$

a) $P_4 + P_5 = 4! + 5! = 4! + 5 \cdot 4! = (1 + 5) \cdot 4! = 6 \cdot 4! = 144$
b) $P_4 + P_3 + P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2! + 3 \cdot 2! + 2! = (12 + 3 + 1) \cdot 2! = 32$
c) $P_7 - P_6 = 7! - 6! = 7 \cdot 6! - 6! = (7 - 1) \cdot 6! = 6 \cdot 6! = 4.320$

052 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\dfrac{C_{6,2}}{C_{5,2}}$ **b)** $\dfrac{C_{6,2}}{C_{5,2}}+\dfrac{C_{4,2}}{C_{3,2}}+\dfrac{C_{5,2}}{C_{4,2}}+\dfrac{C_{6,2}}{C_{5,1}}$ **c)** $\dfrac{C_{40,30}}{C_{10,5}}$ **d)** $\dfrac{C_{4,3}}{C_{10,6}}$

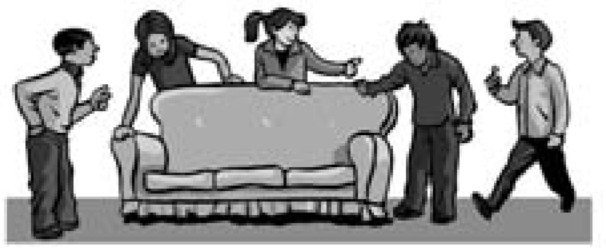
a) $$\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}}=\frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}}=\frac{6!\cdot 2!\cdot 3!}{2!\cdot 4!\cdot 5!}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

b) $$\frac{C_{6,2}}{C_{5,2}}+\frac{C_{4,2}}{C_{3,2}}+\frac{C_{5,2}}{C_{4,2}}+\frac{C_{6,2}}{C_{5,1}}=\frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}}+\frac{\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}}{\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}}+\frac{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}}{\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}}+\frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{5!}{1!\cdot 4!}}=$$
$$=\frac{6}{4}+\frac{4}{2}+\frac{5}{3}+\frac{6}{2}=\frac{80}{6}=\frac{49}{6}$$

c) $$\frac{C_{40,30}}{C_{10,5}}=\frac{\dfrac{40!}{30!\cdot 10!}}{\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}}=\frac{40!\cdot 5!\cdot 5!}{30!\cdot 10!\cdot 10!}=\frac{211.915.132}{63}$$

d) $$\frac{C_{4,3}}{C_{10,6}}=\frac{\dfrac{4!}{3!\cdot 1!}}{\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}}=\frac{4!\cdot 6!\cdot 4!}{10!\cdot 3!\cdot 1!}=\frac{2}{105}$$

053 ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en un sofá de 3 plazas?



$V_{5,3}=\dfrac{5!}{2!}=60$ formas de sentarse

054 Escribe todas las palabras de 3 letras, con o sin sentido, que se pueden formar con las letras de la palabra HOLA.

$V_{4,3}=\dfrac{4!}{1!}=24$ palabras Ejemplo: HOL, HOA, OHL, OHA…

055 ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar con los 7 colores del arco iris?

$V_{7,3}=\dfrac{7!}{4!}=210$ banderas

056 **Para aprobar un examen de 5 preguntas hay que contestar correctamente a 2 de ellas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir las 2 preguntas?**

$$C_{5,\,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \text{ formas}$$

057 **Un artesano hace pulseras con 3 hilos de diferentes colores. Si tiene hilo de 12 colores, ¿cuántos tipos de pulsera distintos puede hacer?**

$$V_{12,\,3} = \frac{12!}{9!} = 1.320 \text{ tipos de pulseras}$$

058 **Un entrenador de fútbol quiere presentar una alineación con 4 defensas, 3 centrocampistas y 3 delanteros.**

¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo si dispone de 3 porteros, 7 defensas, 6 centrocampistas y 7 delanteros, y cada jugador solo puede jugar en su línea correspondiente?

Para elegir al portero tendrá: $C_{3,\,1} = 3$ posibilidades

Para elegir a los 4 defensas tendrá: $C_{7,\,4} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ posibilidades

Para elegir a los 3 centrocampistas tendrá: $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ posibilidades

Para elegir a los 3 delanteros tendrá: $C_{7,\,3} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ posibilidades

Aplicando el método del producto, el número total de posibilidades es: $3 \cdot 35 \cdot 20 \cdot 35 = 73.500$.

059 **¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 2, 3, 4, 5, 8 y 9? ¿Y cuántos números de 5 cifras?**

Considerando que los dígitos no se pueden repetir, y teniendo en cuenta que los números que comienzan por 0 no se consideran de 4 cifras, resulta:

$$V_{7,\,4} - V_{6,\,3} = \frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 840 - 120 = 720 \text{ números}$$

Análogamente, la cantidad de números de 5 cifras es:

$$V_{7,\,5} - V_{6,\,4} = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} = 2.520 - 360 = 2.160 \text{ números}$$

060 ¿Cuántas tripulaciones de 6 remeros se pueden formar con un total de 12 remeros?

$$C_{12,\,6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924 \text{ tripulaciones}$$

061 **Si 5 integrantes de un equipo de baloncesto se sitúan en fila para hacer un tiro a canasta, ¿de cuántas formas distintas pueden ponerse?**

$P_5 = 5! = 120$ formas

062 **En una clase hay 25 alumnos y se forman grupos de 5 alumnos para realizar un trabajo de Matemáticas. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden hacer?**

$$C_{25,\,5} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = 53.130 \text{ grupos}$$

063 **¿Cuántos productos distintos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 7, de forma que cada producto conste de 3 factores?**

Puesto que el orden de los factores no altera el producto, el número de productos de 3 factores que se puede formar es: $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

064 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL NÚMERO DE POSIBILIDADES QUE CUMPLEN UNA PROPIEDAD?

Con las cifras 3, 5, 8 y 9, ¿cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar que sean mayores que 600?

PRIMERO. Se examinan los resultados que cumplen la condición.

Si el número de 3 cifras que formemos tiene que ser mayor que 600, tendría que empezar por 8 o por 9. Los números buscados serán de la forma:

$8ab \rightarrow$ a y b pueden ser: 3, 5 o 9

$9ab \rightarrow$ a y b pueden ser: 3, 5 u 8

SEGUNDO. Se calculan las posibilidades.

En ambos casos influye el orden y no hay repeticiones, por lo que son variaciones. También en ambos casos hay 3 elementos que se agrupan de 2 en 2.

$$V_{3,\,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

Así, habrá 6 números que empiecen por 8 y otros 6 números que empiecen por 9. Hay 12 números mayores que 600.

065 Considera los dígitos 1, 2, 4, 6, 8 y 0.

a) ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar?
b) ¿Cuántos de estos números empiezan por 2? ¿Y por 3?

a) Un número de 3 cifras deberá empezar por 1, 2, 4, 6 u 8. Las otras dos cifras pueden ser cualquier número, incluido el 0: $5VR_{6,2} = 5 \cdot 6^2 = 180$. Se pueden formar 180 números.

b) Números que empiecen por 2: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Se pueden formar 36 números.
Números que empiecen por 3: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Se pueden formar 36 números.

066 **Con las letras de la palabra PERMUTACIÓN, ¿cuántas palabras pueden formarse que comiencen por PE? ¿Y que terminen en ON?**

Palabras que empiecen por PE: $P_9 = 9! = 362.880$ palabras

Palabras que terminen en ON: $P_9 = 9! = 362.880$ palabras

067 **Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 5 cifras se pueden hacer que sean múltiplos de 5?**

Consideramos que los dígitos no se puede repetir.

Son múltiplos de 5 los números que acaben en 5: $P_4 = 4! = 24$ números

068 **Con las cifras 0, 2, 4, 6 y 8, ¿cuántos números de 2 cifras se pueden formar? ¿Y cuántos son múltiplos de 3?**

Consideramos que los dígitos no se repiten.

$$V_{5,2} - V_{4,1} = \frac{5!}{3!} - \frac{4!}{3!} = 20 - 4 = 16 \text{ números}$$

Son múltiplos de 3: 24, 42, 48, 60 y 84.

069 **Con las cifras 1, 2, 3 y 5:**

a) ¿Cuántos números pares de 2 cifras se pueden formar?
b) ¿Y cuántos números pares de 3 cifras?
c) ¿Cuántos múltiplos de 5 con 3 cifras se pueden formar?

Consideramos que los dígitos no se pueden repetir.

a) Son pares los números terminados en 2: $V_{3,1} = 3$ números

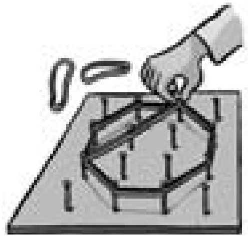
b) $V_{3,2} = \frac{3!}{1!} = 6$ números

c) Son múltiplos de 5 los números terminados en 5: $V_{3,2} = \frac{3!}{1!} = 6$ números

070 **¿En cuántos puntos se cortan 7 rectas de manera que no haya 2 rectas que sean paralelas, ni más de 2 rectas que se corten en un punto?**

Dado que todas las rectas se han de cortar dos a dos, el número de puntos de corte distintos es: $C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$

071 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un octógono?



El número de diagonales de un octógono es el número de rectas que unen dos de sus vértices, a las que hay que restar las rectas formadas por dos vértices consecutivos (lados):

$$C_{8,\,2} - 8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} - 8 = 20$$

El máximo número de puntos de corte es el número de vértices más los posibles cortes de las diagonales, dos a dos. Hay que considerar que las diagonales que salen de un mismo vértice solo se cortan en ese vértice; por tanto, debemos restarle el número de puntos de corte de las diagonales:

$$8 + C_{20,\,2} - 8 \cdot C_{5,\,2} = 110$$

072 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un pentágono?

El número de diagonales de un pentágono es: $C_{5,\,2} - 5 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} - 5 = 5$

Puntos de corte: $5 + C_{5,\,2} - 5 \cdot C_{2,\,2} = 10$

073 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, las diagonales de un hexágono?

El número de diagonales de un hexágono es: $C_{6,\,2} - 6 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} - 6 = 15$

Puntos de corte: $6 + C_{15,\,2} - 6 \cdot C_{3,\,2} = 93$

074 Con las letras de la palabra ESTERNOCLEIDOMASTOIDEO, ¿cuántas palabras se pueden formar de 6 letras?

a) Si se pueden repetir. **b) Si no se pueden repetir.**

a) $VR_{12,\,6} = 12^6 = 2.985.984$ palabras

b) $V_{12,\,6} = \frac{12!}{6!} = 665.280$ palabras

075 ¿De cuántas formas se pueden alinear 5 signos + y 9 signos −, de manera que no puedan situarse 2 signos − seguidos?

No es posible alinearlos de ninguna manera, ya que al haber más signos − que signos +, siempre quedarán dos signos − seguidos.

076 Calcula cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con 3 letras de tu nombre, si:

a) Se pueden repetir. **b) No se pueden repetir.**

Dependerá de la cantidad de letras que tenga el nombre; por ejemplo, si tiene n letras:

a) $VR_{n,\,3} = n^3$ b) $V_{n,\,3} = \frac{n!}{(n-3)!}$

077 ●●● **La escala musical se compone de 7 notas: do, re, mi, fa, sol, la y si. Si se ordenan de grave a agudo, ¿cuántas melodías diferentes podemos hacer con 150 notas?**

No influye el orden, puesto que las notas siempre se ordenan de grave a agudo.
Son combinaciones con repetición de 7 elementos, tomados de 150 en 150, y su fórmula es:

$$CR_n^m = C_{n+m-1}^{m} = \frac{156!}{150! \cdot 6!} = 18.161.699.556$$

078 ●●● **En código Morse se escribe cada letra del alfabeto mediante series de puntos (.) y rayas (–):**

A se escribe utilizando 2 símbolos → . —

B se escribe utilizando 4 símbolos → — . . .

¿Cuántas series diferentes hay si utilizamos como máximo 4 símbolos?

Como las series pueden constar de 1, 2, 3 o 4 símbolos, el número de series diferentes es: $VR_{2,1} + VR_{2,2} + VR_{2,3} + VR_{2,4} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

079 ●●● **Calcula el número de pulseras diferentes de 20 bolas de colores que podemos elaborar si tenemos bolas de 5 colores.**

Considerando que la disposición de las bolas da lugar a collares diferentes, el número de collares distintos es: $VR_{5,20} = 5^{20} \simeq 9{,}54 \cdot 10^{13}$

080 ●●● **Un alumno tiene 8 asignaturas en un curso. La nota de cada asignatura puede ser suspenso, aprobado, notable o sobresaliente. ¿Cuántos boletines de notas distintos puede obtener?**

$VR_{4,8} = 4^8 = 65.536$ boletines de notas

081 ●●● **Un grupo de 12 personas quiere hacer una excursión en coche. Si en cada coche viajan 5 personas:**

a) ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?

b) ¿En cuántos de estos grupos estarán Carlos y María, que son dos de las 12 personas que van a la excursión?

a) Puesto que el orden de elección de los integrantes de un grupo no es influyente en el grupo, el número de grupos de 5 personas distintos que se podrán formar, es: $C_{12,5} = \dfrac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$

b) María y Carlos estarán en: $C_{10,3} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ grupos diferentes

082 **Utilizando solamente números enteros positivos, ¿cuántas sumas distintas dan como resultado 5? Dos posibles sumas serían:**

$$\mathbf{2 + 2 + 1 = 5} \qquad \mathbf{2 + 3 = 5}$$

Suponiendo que no importa el orden en la suma:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ $\quad 1 + 1 + 1 + 2 = 5$ $\quad 1 + 1 + 3 = 5$

$1 + 2 + 2 = 5$ $\quad 1 + 4 = 5$ $\quad 2 + 3 = 5$

Hay 6 sumas que dan como resultado 5.

083 **¿Cuántos números capicúas de 6 cifras hay?**

Los números capicúas de 6 cifras son de la forma *abccba*, con $a \neq 0$.

$VR_{9,1} \cdot VR_{10,2} = 9 \cdot 100 = 900$. Existen 900 números capicúas de 6 cifras.

084 **Tres amigos han encontrado 8 piedras idénticas. ¿De cuántas maneras pueden repartirlas si cada amigo se lleva al menos una piedra?**

Cada amigo tendrá entre 1 y 6 piedras, pudiendo estar repartidas de la siguiente manera.

1, 1, 6	2, 1, 5	3, 1, 4	4, 1, 3	5, 1, 2	6, 1, 1
1, 2, 5	2, 2, 4	3, 2, 3	4, 2, 2	5, 2, 1	
1, 3, 4	2, 3, 3	3, 3, 2	4, 3, 1		
1, 4, 3	2, 4, 2	4, 3, 1			
1, 5, 2	2, 5, 1				
1, 6, 1					

Se pueden repartir de 21 maneras diferentes.

085 **Entre 8 estudiantes y 6 profesores tenemos que elegir un comité de 6 personas que contenga, al menos, 3 estudiantes y 2 profesores. ¿De cuántas formas podemos elegirlo?**

El comité estará constituido por 3 estudiantes y 3 profesores, o por 4 estudiantes y 2 profesores.

$$C_{8,3} \cdot C_{6,3} + C_{8,4} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{3} + \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2} = 56 \cdot 20 + 70 \cdot 15 = 2.170$$

Se puede formar de 2.170 maneras diferentes.

086 **Con las letras de la palabra NADIE podemos formar palabras de 5 letras utilizando todas sus letras sin repetirlas. Si ordenamos esas palabras alfabéticamente, ¿qué lugar ocupará la palabra NADIE?**

Las palabras que empiezan por A, D, E, I son: $4 \cdot P_4 = 48$

La palabra NADIE ocupará el lugar 49, por orden alfabético.

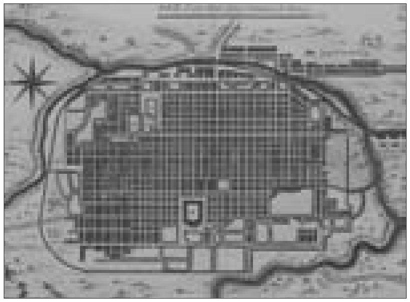
087 Con las letras de PERMUTACIÓN formamos palabras, con o sin sentido. ¿En cuántas de ellas aparecen las 5 vocales juntas y ordenadas?

La secuencia AEIOU puede comenzar entre la primera y la séptima posiciones. El resto de letras pueden estar en cualquiera de las posiciones restantes.

$7 \cdot P_6 = 5.040$. Aparecen en 5.040 palabras.

EN LA VIDA COTIDIANA

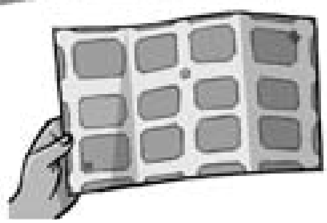
088 **Desde que los romanos usaron la cuadrícula para organizar sus campamentos, muchas civilizaciones copiaron esta idea para planificar sus ciudades. Actualmente podemos ver este diseño en ciudades de todo el mundo.**



Estas calles perpendiculares que forman manzanas facilitan enormemente la ubicación.

Javier trabaja en una empresa de mensajería y acaban de trasladarlo de oficina. Hoy tiene que llevar un pedido hasta una farmacia.

Su jefe le entrega este plano de la zona.



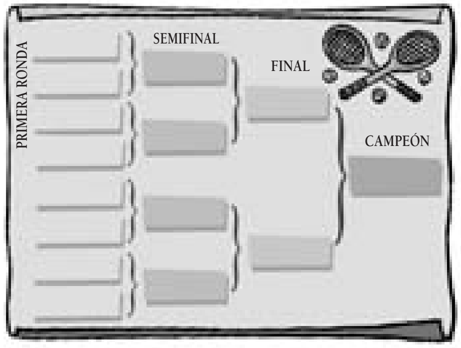
¿Cuántos caminos distintos puede hacer?

En el recorrido tendrá que adoptar 7 decisiones de tomar rumbo norte o este, donde 3 decisiones serán de tomar rumbo norte y 4 decisiones serán de tomar rumbo este, por lo que si decide en qué momento de las 7 decisiones se elige tomar rumbo norte está determinado el camino.

Como $C_{7,4} = \binom{7}{4} = 35$, hay 35 caminos distintos.

089 ●●●

Al comenzar un torneo de tenis, en el polideportivo donde se van a jugar los partidos publican este organigrama.



Dentro de cada casilla se escriben los nombres de los participantes. Las llaves representan los partidos y el tenista que pierda quedará eliminado.

La organización del torneo tiene que decidir qué sucede si el número de jugadores es impar.

a) ¿Cuántos partidos habrá que disputar en un torneo en el que hay 32 jugadores inscritos?

b) ¿Y si se inscriben 209 jugadores?

a) Se jugarán 16 partidos de dieciseisavos de final, 8 de octavos, 4 de cuartos, 2 de semifinal y 1 final; en total, 31 partidos.

b) Si hubiera 256 participantes, los partidos serían 255, pero como el cuadro no está completo, $256 - 209 = 47$ jugadores pasarán directamente a la segunda fase, y de la primera fase se jugarán 81 partidos, en vez de los 128 partidos que se habrían jugado de estar completo el cuadro.

Por tanto, habrá: $255 - 47 = 208$ partidos.