

Unidad Didáctica 2

POTENCIAS, RADICALES, EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

4° ESO

$$\log(\text{😬}) = \log(\text{😬}) + \log(\text{❤️})$$

$$\log(\text{☁️⚡️}) = \log(\text{☁️}) - \log(\text{⚡️})$$

$$\log(\text{😬💧}) = \log(\text{😬})$$

$$\log(10) = 1$$

$$\log(1) = 0$$

$$\sqrt[n]{x}$$

Degree: n
Radical Sign: $\sqrt{\quad}$
Radicand: x

$$\sqrt{x}$$



e^x ponential

En esta unidad vas a:

1. Repasar las propiedades de las potencias.
2. Transformar potencias en radicales y viceversa.
3. Realizar operaciones con radicales.
4. Racionalizar radicales.
5. Conocer el concepto de exponencial y logaritmo y sus propiedades.
6. Saber cambiar de base en los logaritmos.
7. Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
8. Utilizar la notación científica para resolver problemas.
9. Resolver problemas utilizando radicales y logaritmos.

SUMARIO

- 2.0.- Lectura Comprensiva
- 2.1.- Introducción
- 2.2.- Potencias de números reales
- 2.3.- Radicales
- 2.4.- Propiedades de los radicales
- 2.5.- Operaciones con radicales
- 2.6.- Logaritmo de un número real
- 2.7.- Propiedades de los logaritmos. Cambio de Base
- 2.8.- Notación científica.
- 2.9.- Resolución de problemas.
- 2.10.- Autoevaluación.

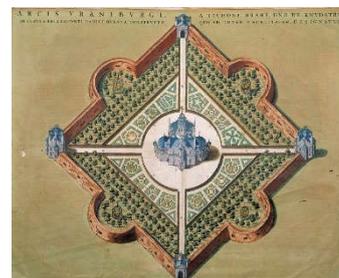
2.00.- Lectura Comprensiva

Los logaritmos y el alce borracho

A finales del siglo XVI, reinaba en Escocia Jacobo VI que era hijo de María Estuardo y que llegó al trono de Inglaterra en 1603. En 1589 se decidió que el rey debía casarse con Ana de Dinamarca. La boda se hizo primero por poderes, y después se envió una expedición a buscarla a Dinamarca. En esa expedición participó John Craig, médico del rey y amigo de John Napier. Debido a una tormenta, el barco se vio forzado a buscar refugio en la isla de Hven, situada entre las costas de Dinamarca y Suecia. Allí se ubicaba el observatorio astronómico de Tycho Brahe, probablemente el mejor de la época. Brahe era el mejor astrónomo antes de la invención del telescopio; cuenta la leyenda que perdió parte de la nariz en un duelo a cuenta de la existencia de los números imaginarios; la sustituyó por una prótesis de plata... o de oro... Aunque quizá fuera de cobre, o al menos a esa conclusión llegaron en 1901 cuando, con motivo del tercer centenario de la muerte de Brahe, decidieron abrir su tumba para comprobar si entre los huesos del astrónomo había o no alguna prótesis nasal. Sea cual fuera el material de la prótesis de Brahe, le tuvo que dar un aspecto de lo más inquietante.

Brahe llamaba a su observatorio Uraniborg, «Castillo del cielo»; que se había construido con los planos del arquitecto masón Hans van Steenwinkel, llenas de simetrías y de dimensiones de intención simbólica y esotérica.

Contaba con comodidades y lujos poco usuales en el siglo XVI: se decía que las habitaciones tenían agua corriente, y que vivían en él enanos clarividentes y alces gigantescos que calmaban su sed con cerveza en vez de con agua –parece ser que el animal predilecto de Brahe se desnucó una noche al rodar borracho por unas escaleras–. En el exterior había pajareras, cenadores, miradores y un jardín de hierbas medicinales que surtía la botica construida en los sótanos del castillo; Brahe y, sobre todo, su hermana Sophia –que fue uno de sus principales asistentes– fueron muy aficionados a la botánica y la alquimia. Brahe llegó incluso a construir un sistema de represas en la isla para alimentar un molino de papel que proveía su imprenta particular.



Grabado del observatorio de Uraniborg

Del paraíso que Brahe se construyó en Hven le echaron finalmente sus excesos y el joven rey Christian IV. Brahe dejó su isla en 1597 camino de Alemania. La ira de los campesinos de Hven, a quien Brahe había estrujado a base de impuestos y tasas que recaudaba con enorme voracidad y haciendo uso de una crueldad inhumanas, provocó la destrucción parcial de sus castillos al poco de abandonarlos Brahe; el paso del tiempo se encargó de rematar la tarea. Con todo, una visita a la isla de Hven merece aún hoy la pena: a hora y media en ferry de Copenhague, puedes alquilar una bicicleta y recorrer todos sus rincones en seis o siete horas. Aunque del observatorio de Brahe sólo quedan unas pocas ruinas, son tan evocadoras que cuando el viento sopla entre ellas parece querer emular los gritos que Brahe daba a sus ayudantes pidiendo más esmero en las observaciones.

Durante su breve estancia en Uraniborg, el médico escocés amigo de Napier aprendió el método de prostafairesis que enseñó a Napier a su vuelta a Escocia. Napier pensó entonces que el método todavía se podía simplificar si se desarrollaba una herramienta para transformar directamente productos en sumas. Se aplicó entonces a ello, y fruto de sus desvelos fueron los logaritmos.

Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:

- 1.- ¿De qué trata el texto?
- 2.- ¿Qué te parece la historia?
- 3.- Busca información sobre la prostafairesis aunque lo veremos el año que viene en el tema de trigonometría.

2.01.- Introducción

En el s. XVII se acomete el estudio preciso de las leyes naturales (con las funciones) y de sus variaciones (con el Cálculo Diferencial). Pero se trataba de conceptos teóricos que debían aplicarse a medidas experimentales, sobre las que luego había que realizar cálculos laboriosos. Se ponían en evidencia dos requisitos importantes: por una parte, disponer de un sistema universal de medidas; y, por otra, mejorar la capacidad de cálculo.

Lo primero no se alcanza plenamente hasta 1792, cuando la Academia de Ciencias de París establece el Sistema Métrico Decimal, un triunfo imperecedero del racionalismo impuesto por la Revolución Francesa.



Pero la mejora de los cálculos, tanto en rapidez como en precisión, era una línea de avance permanente desde el siglo XV (ver: Pascalinas y La calculadora de Napier), que había fructificado ya en el siglo XVI en un concepto decisivo: el logaritmo.

En el Renacimiento, una pseudociencia como la Astrología contribuyó indirectamente al progreso de la Ciencia, ya que la elaboración de los horóscopos obligaba a cálculos y observaciones astronómicas. Lo mismo cabe decir de la elaboración de los calendarios. O, en Arquitectura, el diseño de fortalezas teniendo en cuenta las condiciones del terreno para, con la ayuda de bastiones, ángulos, salientes, etc., protegerse de la artillería

de los sitiadores; también en Navegación, etc.

Los logaritmos se inventaron con el propósito de simplificar, en especial a los astrónomos, las engorrosas multiplicaciones, divisiones y raíces de números con muchas cifras.

El concepto de logaritmo se debe al suizo Jorst Bürgi y su nombre tiene un significado muy explicativo: logaritmo significa "número para el cálculo". El escocés John Napier (en la foto) enseguida lo aprovechó para publicar en 1614 su obra "Mirifici logaithmorum canonis descriptio" (descripción de la maravillosa regla de los logaritmos) con las primeras tablas de logaritmos para el seno y el coseno de un ángulo a intervalos de 1' y con siete cifras. Su genial idea fue trabajar con los exponentes de las potencias.



Los logaritmos hoy ya no son necesarios para hacer grandes cálculos; gracias a la microelectrónica es posible hacerlos de forma instantánea con la calculadora o el ordenador. Sin embargo, durante siglos de uso, los logaritmos dejaron su huella en las Matemáticas y aún hoy es necesario que los conozcas; pero ahora ya no para calcular, sino para utilizarlos como concepto asociado a muchas situaciones. En particular, son útiles las escalas logarítmicas (entre ellas, la Escala de Richter).

2.02.- Potencias de números reales

Una **potencia** es una forma abreviada de expresar una multiplicación de un número por sí mismo varias veces, es decir, es una multiplicación de factores iguales.

En una potencia, la **base** representa el factor que se repite, y el **exponente** las veces que se repite el producto.

$$a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{El producto de } a \text{ por sí mismo se repite } c \text{ veces}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}}_{\text{El producto de } \frac{a}{b} \text{ por sí misma se repite } p \text{ veces}} = \frac{a^p}{b^p}$$

2.2.1.- Propiedades de las potencias

Las propiedades de las potencias las llevamos estudiando desde 1º de ESO, así que las resumiremos de forma rápida en la siguiente tabla:

Producto	Cociente	Potencia
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^7$	$a^b : a^c = a^{b-c}$ $6^5 : 6 = 6^4$	$a^0 = 1$ $a^1 = a$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ $2^4 \cdot 3^4 = 12^4$	$a^c : b^c = (a : b)^c$ $6^3 : 3^3 = 2^3$	$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
Potencias de exponente negativo		
$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Recuerda que existían operaciones de potencias que en principio no se podían realizar porque no tenían ni la misma base ni el mismo exponente, pero que si observábamos cuidadosamente encontrábamos la manera de hacerlas. En estos casos, solía ocurrir que, aunque las bases eran distintas, unas bases eran potencias de otras.

Ejemplo

1.- Calcula las siguientes operaciones con potencias.

No tienen la misma base ni el mismo exponente, pero observamos que unas son potencias de las otras, por tanto:

$$2^3 \cdot 4^5 : 8^4 = 2^3 \cdot (2^2)^5 : (2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^{10} : 2^{12} = 2^{13-12} = 2$$

$$9^3 \cdot 27^2 = (3^2)^3 \cdot (3^3)^2 = 3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$$

Piensa y practica

1.- Calcula y expresa el resultado de estas operaciones con una sola potencia:

a) $(5^3 \cdot 5^4) : (5^2)^5 =$ b) $[(-2^6) \cdot (+2)^3] : [(+2)^3]^2 =$ c) $(-12)^{-7} \cdot [(-3^5 \cdot 4^5)]$ d) $25^3 : [(-15)^5 : 3^5]$

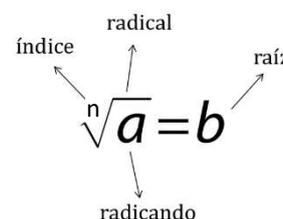
e) $6^3 : [(2^7 : 2^6) \cdot 3]^2$ f) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 : \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right]^2 : \left(\frac{4}{25}\right)^{-1} =$ g) $8^4 : (2^5 \cdot 4^2)$ h) $[(6^2)^2 \cdot 4^4] : (2^3)^4$

i) $[4^{-4}] \cdot (2^3)^4 =$ j) $3^3 : 9^{-2} \cdot 81^4 =$ k) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}} =$ l) $\frac{3^7 \cdot 9^3 \cdot 27^{-3}}{81 \cdot 9^{-5}} =$

2.03.- Radicales

En general, en un radical, el **radicando** es el número que hay dentro de la raíz, a , $\sqrt{\quad}$ es el **símbolo de la raíz**, n es el **índice de la raíz**, y b es la raíz.

La raíz de índice n o **raíz enésima** de un número a es otro número b , que, elevado a la potencia enésima, nos da el número a .



$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad \sqrt[15]{32768} = 2 \Leftrightarrow 2^{15} = 32768$$

La forma sencilla de resolver cualquier radical es intentar conseguir en el radicando una potencia de exponente igual que el índice de la raíz.

Ejemplo

2.- Calcula los siguientes radicales.

Escribimos el radicando en forma de potencia mediante la descomposición factorial y resolvemos:

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ c) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ d) $\sqrt[2]{128} = \sqrt[2]{2^7} = 2$

Decimos que dos **radicales son equivalentes** si tienen la misma raíz.

Ejemplo

3.- Comprueba si los siguientes radicales son equivalentes.

Escribimos el radicando en forma de potencia, resolvemos y comparamos los resultados:

$$a) \begin{cases} \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5 \\ \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \end{cases} \rightarrow \text{Si} \quad b) \begin{cases} \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \\ \sqrt{4} = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Si} \quad c) \begin{cases} \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \\ \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Si}$$

Vemos que sus raíces coinciden, por tanto, las tres parejas son radicales equivalentes.

2.3.1.- Relación entre potencias y raíces.

Llamamos **potencias de exponente fraccionario** a aquellas potencias en las que el exponente es un número racional (fracción) $a^{\frac{b}{c}}$, como por ejemplo: $2^{\frac{5}{4}}$ $3^{\frac{1}{2}}$ $(-4)^{\frac{-1}{7}}$ $(-3)^{\frac{2}{5}}$ $5^{\frac{1}{5}}$

Este tipo de potencias se pueden expresar igualmente como un radical de la siguiente forma:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[q]{b^p} = b^{\frac{p}{q}}$$

Donde el numerador es la potencia y el denominador es índice de la raíz. (*Ley de exponentes fraccionarios*)

DEMO

Vamos a demostrar primero que: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Si llamamos $b = a^{\frac{1}{n}}$, y elevamos todo a n, llegamos a: $b^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$, si aplicamos las propiedades de las potencias:

$$b^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1 \cdot n}{n}} = a^1 = a \quad \rightarrow \quad b^n = a \quad \text{si aplicamos la definición de raíz enésima: } \sqrt[n]{a} = b \quad \leftrightarrow \quad b^n = a$$

entonces $\sqrt[n]{a} = b$ y como al principio teníamos que: $b = a^{\frac{1}{n}}$ entonces $\sqrt[n]{a} = b = a^{\frac{1}{n}} \quad \rightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ c.q.d.

Vamos a demostrar ahora $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^{\frac{m}{n}}$ es igual que $a^{m \cdot \frac{1}{n}}$ y utilizando las propiedades de las potencias: $a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ y por la demostración anterior: $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Como podemos observar, existe una relación entre los radicales y las potencias, de forma que podemos pasar de uno a otro con facilidad (*expresión potencial de un radical*).

Ejemplo

4.- Pasa de potencia a raíz y viceversa:

Para pasar de potencia a raíz, o de raíz a potencia, simplemente utilizaremos la propiedad anterior:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} \quad \sqrt[4]{3^7} = 3^{\frac{7}{4}} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \quad \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Piensa y practica

2.- Convierte las raíces en potencias y viceversa:

a) $\sqrt{7} =$

b) $\sqrt[3]{7} =$

c) $4^{\frac{2}{5}} =$

d) $(-3)^{\frac{3}{5}} =$

2.04.- Propiedades de los Radicales

Antes de estudiar las propiedades de los radicales, tienen que quedar claros estos tres conceptos:

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n .
- Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe si n es impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, cuando escribimos $\sqrt{4}$ siempre nos referimos a la raíz positiva: $\sqrt{4} = +2$, a no ser que se diga otra cosa.

Los radicales tienen una serie de definiciones y propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura, todas ellas, consecuencia inmediata de conocidas propiedades de las potencias.

1.- El producto de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del producto de los radicandos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \rightarrow \quad \text{ej: } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{20} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = (4 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 20^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{20}$$

2.- El cociente de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del cociente de los radicandos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{si } b \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ej: } \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\frac{16}{8}} = \sqrt[5]{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{16^{\frac{1}{5}}}{8^{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{16}{8}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$$

3.- Un radical de índice n elevado a una potencia m equivale a una raíz de índice n y de radicando elevado a la potencia m :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \rightarrow \quad \text{ej: } (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2} \quad \rightarrow \quad (\sqrt[3]{a})^2 = (a^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

4.- La raíz de índice m de un radical de índice n es equivalente a una raíz de índice n de un radical de índice m y es igual a una raíz de índice $m \cdot n$:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3 \cdot 5]{3} = \sqrt[15]{3} \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5]{3^{\frac{1}{3}}} = (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{3}$$

5.- Si $a \geq 0$ la raíz de índice n de a es igual que la raíz de índice $m \cdot n$ de a elevado a m .

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m} \quad \rightarrow \quad \text{ej: } \sqrt[3]{3} = \sqrt[5 \cdot 3]{3^{5 \cdot 1}} = \sqrt[15]{3^5} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 3}} = 3^{\frac{5}{15}} = \sqrt[15]{3^5}$$

En ellas, hemos puesto un ejemplo en azul y su demostración usando las propiedades de las potencias en rojo.

Piensa y practica

3.- Aplica las propiedades de los radicales y calcula:

a) $\sqrt[5]{2^{18} \cdot 7^{12}}$ b) $(\sqrt[5]{9})^{15} =$ c) $\sqrt[4]{16 \cdot 9^2} =$ d) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{625}}} =$ e) $\sqrt[3]{1728} =$

4.- Calcula:

a) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{a^2 b^3}}}\right)^8$ b) $\sqrt{abc} \sqrt[4]{a^3 b^3 c^2} \cdot \sqrt[3]{a^5 b^5}$ c) $\sqrt[3]{a^2 b^5} \sqrt[4]{a^3 b^7} \sqrt{a^5 b^5} \sqrt[5]{a^7 b^3}$

2.05.- Operaciones con Radicales

Las propiedades de los radicales nos van a venir muy bien para poder operar con ellos.

2.5.1.- Reducción a índice común

Para realizar operaciones con radicales de distinto índice es necesario reducirlos a otros equivalentes que tengan el mismo índice. Este nuevo índice será el mínimo común múltiplo de todos los índices.

Ejemplo

5.- Reduce a índice común los siguientes radicales: $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$

Para ello calculamos el mínimo común múltiplo de los índices 2 y 3: m.c.m.(2,3)=6

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} \qquad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^2}$$

2.5.2.- Simplificación de radicales

De acuerdo con la ley de exponentes fraccionarios y de las propiedades de los radicales, simplificar un radical es expresarlo en su forma más simple. Es decir, un radical está simplificado cuando:

- 🍎 No se puede extraer ningún factor del radicando (es el menor posible)
- 🍎 No puede reducirse su índice (es el menor posible)
- 🍎 El radicando no es una fracción
- 🍎 No hay radicales en el denominador de una fracción

Para simplificar radicales, se factoriza el radicando y se extraen todos los posibles factores del radical. Después, si es posible, con la ley de exponentes fraccionarios se reduce su índice.

Ejemplo

6.- Simplifica los siguientes radicales: $\sqrt[4]{11664}$ y $\sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}}$

Factorizamos los radicandos y extraemos los factores que sea posible, por último, si fuera posible, se reduce su índice.

$$a) \sqrt[4]{11664} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \quad * \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^6}b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}} = \frac{2}{3^2} \cdot b \cdot c^2 \cdot m^4 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c \cdot m^2}$$

2.5.3.- Introducción de factores en un radical

Para introducir factores dentro de un radical, el factor que está fuera se escribe dentro elevado al índice de la raíz y después operamos.

Ejemplo

7.- Introduce los factores que sean posibles dentro del radical:

Factorizamos los radicandos y extraemos los factores que sea posible, por último, si fuera posible, se reduce su índice.

$$a) -5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{-500} = -\sqrt[3]{500} \qquad b) \sqrt{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$$

Piensa y practica

5.- Simplifica los radicales:

$$a) \sqrt[5]{1024m^{37}c^{18}} \qquad b) \sqrt{2,7b^3} \qquad c) \sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5m^{14}} \qquad d) \sqrt[5]{125m^{10}c^{13}b^7}$$

6.- Introduce los factores en los radicales siguientes:

$$a) \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x} \qquad b) \frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{21}} \qquad c) \frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}} \qquad d) 3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx} \qquad e) \frac{2^3 \cdot 3^6}{5}\sqrt[4]{\frac{5^3 \cdot 2}{3^{10}}}$$

2.5.4.- Producto y cociente de radicales

Para poder multiplicar (o dividir) radicales han de tener el mismo índice, si no es así, primero hay que reducir a índice común. El resultado del producto (o del cociente) ya lo hemos visto en las propiedades 1 y 2.

Ejemplo

8.- Realiza las siguientes operaciones con radicales:

$$a) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{20} \quad b) \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$c) \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\frac{16}{8}} = \sqrt[5]{2} \quad d) \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Piensa y practica

7.- Calcula:

$$a) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \quad b) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \quad c) \sqrt{5} : \sqrt[4]{5} = \quad d) \sqrt[3]{25} : \sqrt{5} = \quad e) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{6} =$$

2.5.5.- Suma y resta de radicales

Para poder sumar radicales han de ser semejantes. Para sumar o restar radicales semejantes, se extrae factor común y se operan los coeficientes.

Ejemplo

9.- Realiza las siguientes operaciones con radicales:

$$a) \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$b) 3\sqrt{27} - 2\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = 3\sqrt{3^3} - 2\sqrt{3^5} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - 2\sqrt{3 \cdot 2^4} = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 9\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$

$$c) \frac{2}{5}\sqrt{20} - \frac{3}{5}\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{180} + 6\sqrt{45} = \frac{2}{5}\sqrt{2^2 \cdot 5} - \frac{3}{5}\sqrt{2^4 \cdot 5} + \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + 6\sqrt{3^2 \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{5} - \frac{3}{5} \cdot 2^2 \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{5} +$$

$$+ 6 \cdot 3\sqrt{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5} - \frac{12}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 18\sqrt{5} = \frac{4 - 12 + 15 + 90}{5}\sqrt{5} = \frac{97}{5}\sqrt{5}$$

Es importante notar que la suma algebraica de dos radicales de cualquier índice nos es igual a la raíz de la suma algebraica de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$

Piensa y practica

8.- Realiza las siguientes operaciones con radicales:

$$a) 8\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{18} = \quad b) 5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80} =$$

2.5.6.- Racionalización de radicales

Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador conviene obtener fracciones equivalentes pero que no tengan radicales en el denominador. A este proceso es a lo que se llama **racionalización** de radicales de los denominadores.

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente.

🍏 Caso 1: El denominador es una raíz cuadrada

Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada, se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por la raíz cuadrada del denominador.

Ejemplo

10.- Racionaliza:

$$a) \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$b) \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

🍏 Caso 2: El denominador es un radical de índice cualquiera.

Si el denominador contiene un solo término formado por una raíz de índice cualquiera, se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por el radical del mismo orden necesario para completar la raíz. Quizás sea más fácil de comprender con un ejemplo:

Ejemplo

11.- Racionaliza $\frac{12}{\sqrt[5]{7^2}}$

Como en el denominador tenemos la raíz quinta de 7 al cuadrado, para poder quitar el radical del denominador, necesitamos completar la raíz (necesitamos 7³) así que, multiplicaremos por $\sqrt[5]{7^3}$

$$\frac{12}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{12}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{12 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2 \cdot 7^3}} = \frac{12 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{7}$$

🍏 Caso 3: El denominador es un binomio con raíces cuadradas.

Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales (o en los dos) hay una raíz cuadrada, se racionaliza utilizando la tercera identidad notable. Es decir, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{donde } (a+b) \text{ y } (a-b) \text{ son binomios conjugados}$$

Ejemplo

12.- Racionaliza:

$$a) \frac{7}{1+\sqrt{2}} = \frac{7}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot (1-\sqrt{2})}{\underbrace{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}_{\text{SUMA X DIFERENCIA}}} = \frac{7-7\sqrt{2}}{\underbrace{1-(\sqrt{2})^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}} = \frac{7-7\sqrt{2}}{1-2} = \frac{7-7\sqrt{2}}{-1} = \frac{7-7\sqrt{2}}{-1} = 7\sqrt{2}-7$$

$$b) \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{9-4} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{9-2} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{7}$$

$$c) \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

Piensa y practica

9.- Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$

e) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

10.- Calcula:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7}-2} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} =$

c) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{5}{\sqrt{6}+1}$

EN CONSTRUCCIÓN

Def Con Dos Tomaremos el Mundo....

