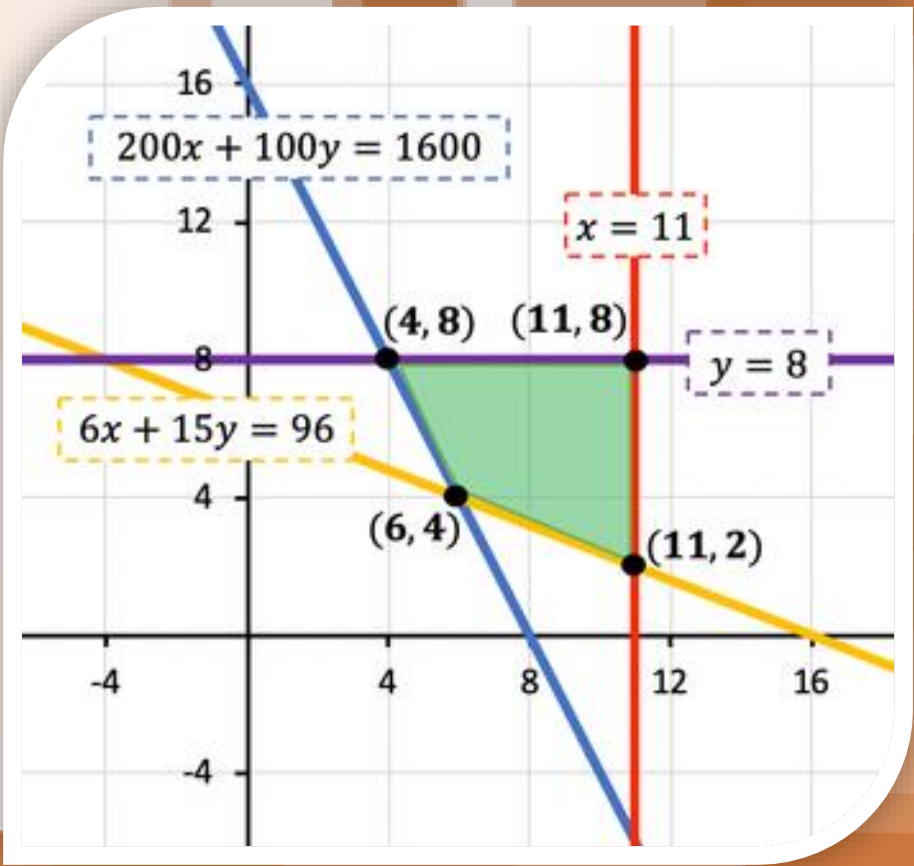
Unidad Didáctica 5

SISTEMAS de ECUACIONES e INECUACIONES

4º ESO



En esta unidad vas a:

1. **Plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L).**
2. **Determinar gráficamente el número de soluciones de un S.E.L.**
3. **Plantear y resolver sistemas de ecuaciones no lineales.**
4. **Resolver sistemas de inecuaciones con una y con dos incógnitas .**
5. **Representar recintos en el plano.**
6. **Resolver problemas de sistemas de ecuaciones o inecuaciones.**

SUMARIO

5.00.- Lectura Comprensiva
5.01.- Introducción
5.02.- Ecuaciones Lineales y no Lineales
5.03.- Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.)
5.04.- Métodos de resolución de S.E.L.
5.05.- Sistemas no lineales
5.06.- Sistemas de inecuaciones con una incógnita
5.07.- Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas
5.08.- Resolución de problemas
5.09.- Autoevaluación

5.00.- Lectura Comprensiva

¿Por qué es importante el algebra?

Los educadores pensamos que las matemáticas, en general, ayudan a los estudiantes a pensar lógicamente, pero, en particular, el álgebra fortalece esas destrezas lógicas y les inicia en el pensamiento abstracto. Les hace entender que los símbolos como la **x** o la **y** se utilizan en lugar de variables desconocidas y que con ellas se pueden plantear expresiones algebraicas con las que se podrán después encontrar soluciones tanto a problemas de matemáticas como de la vida real.

Además, el álgebra les ayuda visualizar conceptos y relaciones entre distintas magnitudes al diseñar y entender representaciones gráficas de la información.

> "En álgebra, los estudiantes aprenden a razonar de forma abstracta, y como consecuencia de ello podemos aumentar la complejidad y también el tipo de problemas a resolver".

Esta habilidad de entender conceptos complejos, cambiantes y abstractos estimula el cerebro, ayudando a los estudiantes a pensar de nuevas y diferentes maneras, y a organizar su forma de pensar, logrando que puedan preparar respuestas lógicas y razonables cuando se enfrentan a distintas situaciones.

Estas destrezas para resolver problemas y para pensar de forma crítica les ayudará a tener éxito en el mundo laboral y en la vida en general aunque no continúen sus estudios después de la ESO o del Bachillerato.

Recuerda que vamos a pasar toda la vida resolviendo problemas, y un enfoque racional y bien pensado podría ser clave para no cometer errores y evitarnos algún que otro "problemilla".

Fijaros si es importante el álgebra que, por ejemplo, en California (E.E.U.U.) cualquier persona que quiera participar en un programa de aprendiz de electricista, lo que sería una F.P. aquí, antes tiene que demostrar haber aprobado la asignatura de Algebra I en la ESO o el Bachillerato (High School).

Por el contrario, si los estudiantes tienen como objetivo continuar sus estudios y, por ejemplo, ir a la universidad, el estudio del álgebra es esencial puesto que las técnicas y los procedimientos que se aprenden trabajando con el álgebra representan las bases científico–matemáticas necesarias para poder acceder con garantías a la mayoría de las universidades.

Cuanto más alto sea el nivel de matemáticas de un estudiante, más probabilidades existen de que pueda graduarse y de poder encontrar empleos bien pagados en un futuro no muy lejano.

Los expertos estamos de acuerdo en que la transición de las matemáticas al álgebra es una de las más difíciles para los estudiantes y es por ello es importante que los estudiantes aprendan y sobre todo, comprendan los conceptos básicos del álgebra desde la educación secundaria.

Texto extraído de la Guía de padres y estudiantes de **EdSource: Clarifying Complex Education Issues 2009**

<u>**Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:**</u>

1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Qué te parece el artículo?

5.01.- Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\left.\begin{array}{l} 1/4 \text{ anchura} + \text{longitud} = 7 \text{ manos} \\ \text{longitud} + \text{anchura} = 10 \text{ manos} \end{array}\right\} \quad \ll \quad \begin{cases} \dfrac{x}{4} + y = 7 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática.

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos.

- **Thymaridas de Paros** (400 a.C.) encontró una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.
- **Diophanto** resolvió también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en documentos indios, pero no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

El libro **El arte matemático**, de un autor chino desconocido (siglo III a. de C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.

En Europa, la aparición del álgebra simbólica a partir del siglo xv permitió su despegue definitivo, abriendo camino al descubrimiento de los métodos de resolución de ecuaciones y, paralelamente, de los conjuntos de varias ecuaciones con varias incógnitas (sistemas de ecuaciones).

Pero, ¿qué es un sistema de ecuaciones?, ¿por qué surge la necesidad de esta herramienta matemática?

Muchos de los problemas que nos encontramos en situaciones reales involucran dos o más ecuaciones con dos o más variables desconocidas y todos ellos se pueden resolver usando el método de Gauss que consiste en usar operaciones elementales en las ecuaciones para transformar un sistema de ecuaciones lineales, en otro sistema equivalente de forma escalonada (triangular), es decir, un sistema en el que cada ecuación tenga una incógnita menos que la anterior hasta llegar a la última en la que solo haya una incógnita. Resuelta esta última, podremos resolver de forma sencilla todas las demás.

$$\underbrace{\begin{cases} 2x+3y-4z=-3 \\ x-2y-z=3 \\ -x+y+2z=-1 \end{cases}}_{\text{Sistema Lineal}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} 2x+3y-4z=-3 \\ \quad\;\; 7y-2z=-9 \\ \qquad\qquad z=1 \end{cases}}_{\text{Sistema Lineal Escalonado}}$$

5.02.- Ecuaciones lineales y no lineales

Se llaman **ecuaciones lineales** a las ecuaciones en las que todas las incógnitas aparecen con grado 1; no están elevadas a ninguna potencia, ni bajo ningún radical, ni multiplicadas unas por otras. En otro caso diremos que son no lineales.

Ecuación lineal
$3x+2y-4z=12$

Ecuaciones No lineales		
$3x^2+2y=2$	$\sqrt{x}-y=76$	$x\cdot y=27$

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación de la forma:

$$ax+by=c$$

Donde x, y son las incógnitas y a, b y c son números conocidos: $\begin{cases} a \text{ y } b \text{ son los coeficientes} \\ c \text{ es el término independiente} \end{cases}$

Aunque también se puede expresar de otras formas como ya hemos visto en cursos anteriores:

$y=mx+n$	$y-y_o=m(x-x_o)$	$ax+by-c=0$
Forma Explícita	Forma Punto – Pendiente	Forma General

La **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es cualquier par de números, uno para cada incógnita, que hacen cierta (o también decimos, que verifican) la igualdad.

Ejemplo

1.- La ecuación 2x + y = 5 tiene por solución (x=0 e y=5), pero también (x=1 e y=3) y (x=2 e y=1) ¿existe alguna solución más?

Pues si somos un poco observadores, nos daremos cuenta de que para cada valor de x existe un valor de y, o viceversa, para cada valor de y existe otro de x. Veamos que pasa para por ejemplo x=5, 10+y=5, y por tanto, y=-5. **(5,-5)**

Como ya te habrás dado cuenta, una ecuación con dos incógnitas tiene muchas soluciones **(infinitas)**, pero no vale cualquier pareja de números, sino que los valores de x e y están relacionados (mediante la ecuación lineal).

Además, al igual que en el tema de ecuaciones, diremos que dos **ecuaciones lineales** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

2.- Comprueba si las ecuaciones lineales 3x + y = 7 ; 6x + 2y = 14 son dos ecuaciones equivalentes.

Como hemos visto con anterioridad, dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones, así que vamos a calcular una solución para la ecuación **3x + y = 7**, si x=0, entonces y=7, por tanto (0,7) es solución de la primera, veamos si también lo es de la segunda: 6(0)+2(7)=14, 14=14, luego es solución. **Así que ambas ecuaciones son equivalentes.**

En general dos ecuaciones son equivalentes si una es la otra multiplicada por un número, y aquí, la 2ª ecuación es 2 veces la 1ª.

Piensa y practica

1.- Averigua cuales de los siguientes pares de valores son solución de la ecuación: Sol: a) -4; b) -27/29; c) -38/11

$a)\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ $\quad d)\ \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

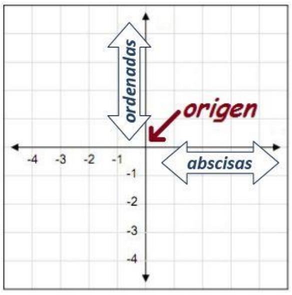
2.- Busca tres soluciones diferentes para las siguientes ecuaciones: Sol: a) 0 y 12; b) -4 y 3; c) -2/3 y 5

$a)\ 2x-y=5$ $\quad b)\ x+2y=0$ $\quad c)\ 3x+2y=5$ $\quad d)\ 2z-4y=2$

3.- Reduce a la forma general estas ecuaciones lineales: Sol: a) -4, -3, 3 y 4; b) -1/2 y 1/2; c) -5, -2, 2 y 5

$a)\ 2x-5=y$ $\quad b)\ x-3=2(x-y)$ $\quad c)\ y=\dfrac{x+1}{2}$ $\quad d)\ 4x-5y=9$

5.2.1.- Representación gráfica de una ecuación lineal



Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se puede hacer de forma gráfica. Para ello, se suele despejar una de las incógnitas en función de la otra **(normalmente la y)** y dar valores a la otra **(normalmente la x).**

Los valores obtenidos se recogen, ordenados, en una tabla de doble entrada y después se representan en el plano cartesiano.

El plano cartesiano son dos ejes perpendiculares, uno horizontal, el eje x, también llamado eje de abscisas y un eje vertical, el eje y, también llamado eje de ordenadas. El punto donde se cruzan ambos ejes se denomina punto O, y se le denomina Origen de coordenadas.

Ejemplo

3.- Representa las soluciones de la ecuación 3x + y =45

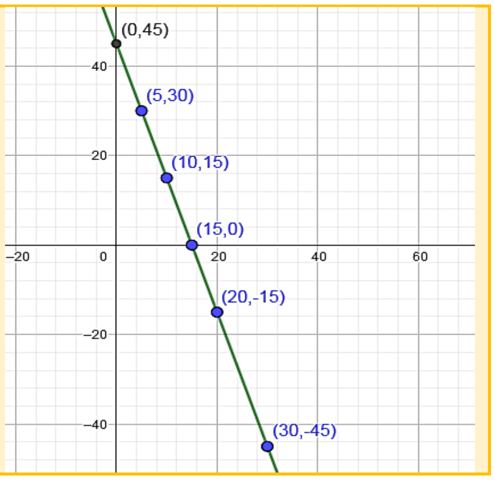
Lo primero es despejar la variable y: $y=45-3x$

Una vez hecho esto, hacemos una tabla de doble entrada en la que vamos a ir dando valores a la x y a su vez calculando los valores obtenidos para la y:

x	0	5	10	15	20	30
y	45	30	15	0	-15	-45

Y una vez hecho esto se representan todos los puntos *(x,y)* en el plano cartesiano y, cómo podemos observar, quedan alineados en una recta.

Recta de ecuación : $3x+y=45$



Por tanto, a la hora de hacer la representación gráfica de una ecuación, hemos de tener en cuenta que:

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

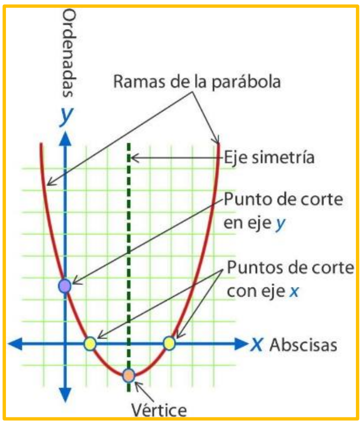
Piensa y practica

4.- Representa gráficamente las siguientes ecuaciones lineales:

$a)\ 2x-y=1$ $b)\ 2x+y=0$ $c)\ y=3x-5$ $d)\ 2x-3y=0$

Si la ecuación fuera una ecuación no lineal, su representación no sería una línea recta, sino una curva. Veamos el caso de la representación de una ecuación cuadrática.

5.2.2.- Representación de ecuaciones cuadráticas



Como ya vimos el curso pasado, las ecuaciones cuadráticas **ax² + bx + c = 0,** se representan mediante parábolas cuya forma depende, exclusivamente, del coeficiente de x^2.

Para representar una ecuación cuadrática: de $y=ax^2+bx+c$, lo primero es encontrar el vértice de la parábola, cuyas coordenadas eran:

$$Vértice: V=(V_x,V_y)$$

La **coordenada x** del vértice venía dada por: $V_x=\dfrac{-b}{2a}$

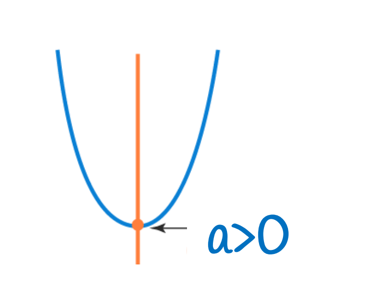
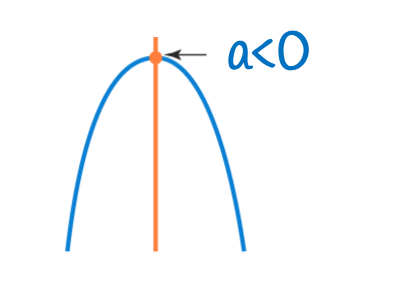
Y la **coordenada y** se calculará sustituyendo el valor obtenido en la función original: $V_y = f(V_x)$

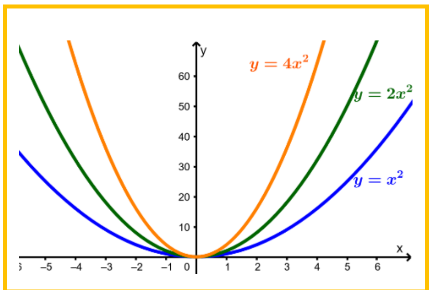
Conocido el vértice, $V = (V_x, V_y) = \left(\frac{-b}{2a}, f(v_x) \right)$, lo siguiente es calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Ptos.\ de\ corte \begin{cases} eje\ x: & hacemos \quad f(x) = 0 \\ eje\ y: & calculamos \quad f(0) \end{cases}$$

En general, con el vértice y los dos puntos de corte con los ejes ya se podría representar una función cuadrática, pero si vemos que no es posible, sería conveniente calcular el valor de la función en abscisas enteras próximas al vértice, a su derecha y a su izquierda y así conoceremos mejor la curva en su parte más interesante.

Una vez hecho esto, escogeremos sobre los ejes unas escalas que nos permitan plasmar la información en un espacio razonable y dibujaremos la gráfica sin olvidarnos de que dependiendo del valor de **a**, teníamos:

Según sea el valor del coeficiente a	
	
Si a>0, las ramas van hacia arriba	Si a<0, las ramas van hacia abajo
(Alegre)	(Triste)



Cuanto mayor sea el valor absoluto del coeficiente a, |a|, más estilizada (abierta) será la parábola. Véase la gráfica de la izquierda.

Ejemplo

4.- Representa la ecuación cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$

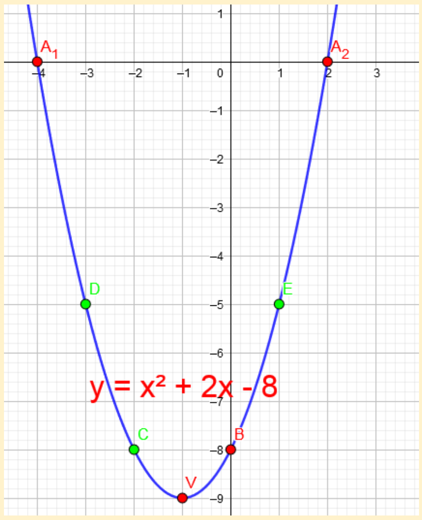
Empezamos calculando el vértice: $\begin{cases} V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2 \cdot 1} = -1 \\ V_y = f(V_x) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9 \end{cases} \rightarrow V = (-1, -9)$

Después, calculamos los puntos de corte con los ejes:

- Eje x $\rightarrow$ $f(x) = 0$ $\rightarrow$ $x^2 + 2x - 8 = 0$

  $\rightarrow (x-2) \cdot (x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

- Eje y: $\rightarrow$ $f(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) - 8 = -8$



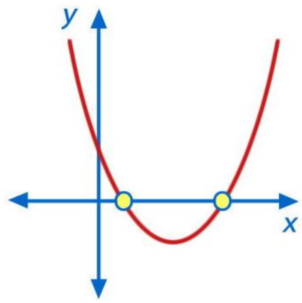
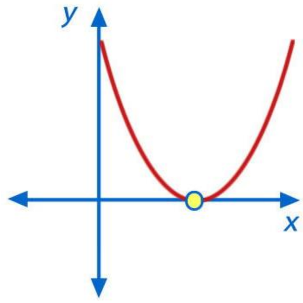
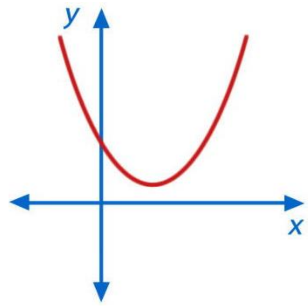
La función corta con los ejes en los puntos:

$A_1 = (-4, 0)$ $\quad A_2 = (2, 0)$ $\quad y \quad B = (0, -8)$

Aunque no necesitaríamos más, en este ejemplo hemos calculado, además, los puntos:

$C = (-2, 8)$ $\quad D = (-3, -5)$ $\quad y \quad E = (1, -5)$

Recuerda que, a la hora de calcular los puntos de corte con el eje x, resolver una ecuación de segundo grado, nos podíamos encontrar con tres casos diferentes:

Si $\Delta>0$, la ecuación tendrá dos raíces, por tanto la función corta dos veces con el eje x:	Si $\Delta=0$, la ecuación tendrá una raíz, por tanto la función corta una sola vez con el eje x:	Si $\Delta<0$, la ecuación no tiene raíces, por tanto la función no corta con el eje x:
		
Donde el discriminante Δ lo calculábamos a partir de los coeficientes de la ecuación de 2° grado: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$		

Piensa y practica

5.- Representa gráficamente las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$a)\ y = x^2 - 1$ $\qquad$ $b)\ y = x^2 - 5x + 6$ $\qquad$ $c)\ y = x^2 - 4x$ $\qquad$ $d)\ y = 9 - x^2$

5.03.- Sistemas de Ecuaciones lineales (S.E.L)

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Donde **m** es el n° de ecuaciones lineales y **n** el n° de incógnitas, los a_{ij} son los coeficientes del sistema (números reales), los x_i son las incógnitas y los b_j son los términos independientes (también números reales).

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de los x_i para los que se cumplen todas las ecuaciones o concluir que el sistema no tiene solución.

En resumen, podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales del siguiente modo:

$$\text{Sistemas de ecuaciones lineales} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado (S.C.D.)-Solución única} \\ \text{Indeterminado:(S.C.I.)-Muchas Soluciones} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible:(S.I.)-Sin solución} \end{cases}$$

En este curso trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas, aunque puede que resolvamos alguno de tres por tres mediante el Método de Gauss.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad\qquad ejemplo: \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

Donde **a, b, d, e** son los coeficientes y **c** y **f** son los términos independientes.

La **solución** de un sistema es un par de números, uno para x y otro para y **(x, y)** que hace ciertas (o que verifica) las dos ecuaciones lineales a la vez.

Ejemplo

5.- Comprueba que (3,2) es solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \end{cases}$

Decimos que un par de números (x, y) es solución de un sistema de ecuaciones si al sustituir x por 3 e y por 2, se verifican ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3+2\cdot 2=3+4=7 \\ 3\cdot 3-2=9-2=7 \end{cases}$$

Como podemos observar, el par (3,2) es solución del sistema.

Piensa y practica

6.- ¿Cuál de los siguientes pares de números son solución del sistema? $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

a) $(x,y)=(1,2)$ b) $(x,y)=(2,3)$ c) $(x,y)=(3,1)$ d) $(x,y)=(3,2)$

5.04.- Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

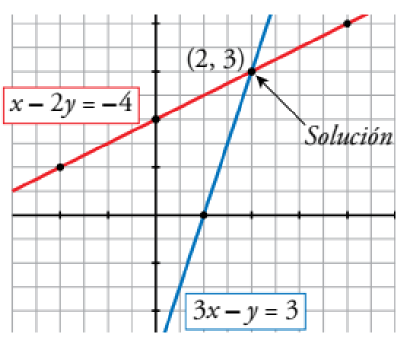
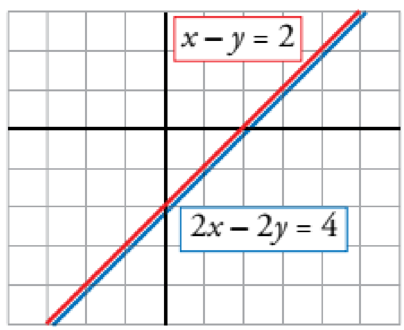
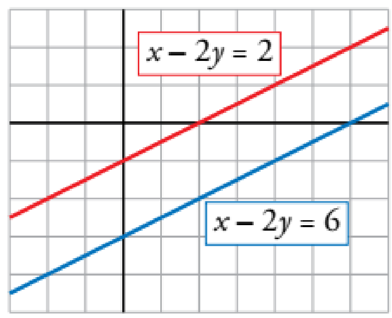
Como ya hemos referido anteriormente, **resolver un sistema de ecuaciones**, será encontrar ese par de números **(x, y)** que verifiquen las dos ecuaciones a la vez.

Existen cuatro métodos diferentes para resolver un sistema, uno de ellos gráfico y otros tres algebraicos.

5.4.1.- Método gráfico

El **método gráfico** consiste en representar gráficamente las rectas de las dos ecuaciones en la misma gráfica (o mismo sistema de ejes cartesianos) y el punto donde se corten será la solución del sistema.

Según sea su representación gráfica, podemos clasificar los sistemas de ecuaciones en:

S.C.D.	S.C.I.	S.I
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Con una solución	***Infinitas soluciones***	***Sin solución***
$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$
		
Las rectas son secantes	Las rectas son coincidentes	Las rectas son paralelas

Los pasos a seguir para resolver un sistema con este método son los siguientes:

1. Despejamos la y en las dos ecuaciones.
2. Realizamos la tabla de valores de cada una de ellas.
3. Representamos gráficamente las dos ecuaciones.
4. El punto de cruce de ambas rectas es la solución del sistema.

Ejemplo

6.- Resuelve por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones, el trabajo nos resultará más fácil: $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

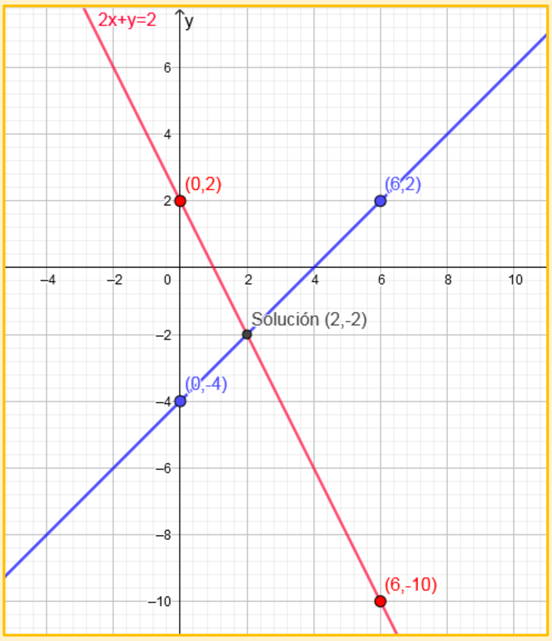
De la ecuación **(1)**, despejamos y: $y=x-4$, nos inventamos algunos valores para x, los sustituimos en la ecuación y calculamos los valores de y colocándolos todos en una tabla:

x	0	2	4	6	8	10
y	-4	-2	0	2	4	6

Repetimos el proceso con la otra ecuación, de la ecuación **(2)**, despejamos y: $y=2-2x$ y nos volvemos a inventar algunos valores para x, los sustituimos en la ecuación y calculamos los valores de y. Volvemos a colocar los resultados en una tabla:

x	-2	0	2	4	6	8
y	6	2	-2	-6	-10	-14

Después representamos ambas rectas en el mismo plano cartesiano



5.4.2.- Método de Sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra. Este método es aconsejable siempre y cuando alguna de las incógnitas tenga coeficiente 1.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Despejamos de una de las ecuaciones una de las incógnitas.
2. Sustituimos en la otra ecuación y obtenemos una ecuación de primer grado.
3. Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituimos este valor en la expresión del paso (1) y obtenemos el valor de la otra incógnita.
5. Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Ejemplo

7.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones: $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

1	**Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.** (la que nos parezca más fácil de despejar)	De la ecuación (2) despejamos la y: $2x+y=2 \quad \rightarrow \quad y=2-2x$
2	**Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.**	En la ecuación (1) sustituimos la y por lo obtenido en el paso anterior: $x-y=4 \quad \rightarrow \quad x-(2-2x)=4$ $x-2+2x=4 \quad \rightarrow \quad 3x-2=4$
3	**Se resuelve esta ecuación.**	Resolvemos la ecuación obtenida: $3x-2=4 \quad \rightarrow \quad 3x=6 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6}{3}=2$
4	**El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.**	Sustituimos en la ecuación (2) el valor obtenido para x, y obtenemos el valor de y: $y=2-2x \quad \rightarrow \quad y=2-2\cdot(2)=2-4=-2$
5	**Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.**	La solución del sistema es: $x=2 \quad y=-2 \quad \rightarrow \quad (x,y)=(2,-2)$ Por tanto, el sistema es: $S.C.D.\{x=2;\ y=-2\}$

Piensa y practica

6.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

$a)\begin{cases} x+6=6 \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} 3x+10y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ $\quad c)\begin{cases} 5x-3y=50 \\ 4x+y=23 \end{cases}$ $\quad d)\begin{cases} 5x+y=6 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

5.4.3.- Método de Igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las dos expresiones resultantes.

- Este método es aconsejable cuando una misma incógnita es fácil de despejar en ambas ecuaciones.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Despejamos la misma incógnita en cada una de las ecuaciones.
2. Igualamos ambas expresiones, lo cual da lugar a una ecuación de primer grado.
3. Resolvemos la ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituimos dicho valor en una de las dos expresiones obtenida en el paso (1), normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
5. Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Ejemplo

8.- Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación: $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

1	**Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.** (la que nos parezca más fácil de despejar)	De la ecuación (1) despejamos la y: $2x+y=2 \rightarrow y=2-2x$ De la ecuación (2) despejamos la y: $x-y=4 \rightarrow y=x-4$
2	**Se igualan ambas expresiones y se obtiene una ecuación con una sola incógnita.**	Igualamos ambas expresiones: $\left.\begin{matrix} y=2-2x \\ y=x-4 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2-2x=x-4$
3	**Se resuelve esta ecuación.**	Resolvemos la ecuación obtenida: $2-2x=x-4 \rightarrow 6=3x \rightarrow x=\frac{6}{3}=2$
4	**El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones del paso (1).** La que nos resulte más sencilla.	Sustituimos en alguna de las ecuaciones del paso (1): $y=2-2x \rightarrow y=2-2\cdot(2)=2-4=-2$
5	Se ha obtenido, así, la solución. **Es conveniente indicar cómo es el sistema.**	La solución del sistema es: $x=2 \quad y=-2 \rightarrow (x,y)=(2,-2)$ Por tanto, el sistema es: $S.C.D.\{x=2;\ y=-2\}$

Piensa y practica

7.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación.

$a)\begin{cases} 3x-y=7 \\ 2x+y=13 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x-5y=9 \\ 6x-2y=-6 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x-3y=21 \\ 2x+5y=-35 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 4(x-3)+y=0 \\ 3(x+3)-y=18 \end{cases}$

5.4.4.- Método de reducción

El **método de reducción** consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pero con distinto signo. Sumando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene otra ecuación con solo una incógnita (se ha reducido el número de incógnitas, de ahí su nombre).

- Este método es aconsejable cuando una misma incógnita tiene en ambas ecuaciones el mismo coeficiente (restamos las ecuaciones) o los coeficientes son iguales, pero con signo opuesto (sumamos las ecuaciones).

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Preparamos ambas ecuaciones multiplicándolas por los números que nos convenga, *normalmente la primera por el coeficiente de la x (o de la y) de la segunda y la segunda por el opuesto del coeficiente x (o el de la y) de la primera ecuación.*
2. Sumamos las dos ecuaciones y desaparece una de las incógnitas. ***(Reducción)***
3. Resolvemos la ecuación resultante.
4. Sustituimos dicho valor en una de las dos ecuaciones, normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
5. Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Ejemplo

9.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción: $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

1 **Elegimos la variable que queremos reducir (eliminar),** (la que nos parezca más fácil)

Vamos a reducir la x.

2 **Multiplicamos la ecuación (1) por el coeficiente x de la ecuación (2) y multiplicamos la ecuación (2) por el opuesto del coeficiente de la x en la ecuación (1).** (Siempre y cuando ambos coeficientes tengan el mismo signo. Si tuvieran distinto signo multiplicaríamos una por el coeficiente de la otra y viceversa)

Multiplicamos la ecuación (1) por 5, el coeficiente x de la ecuación (2), y la ecuación (2) por −2, el opuesto del coeficiente x de la ecuación (1), porque ambas tienen el mismo signo:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5(2x-3y=9) \\ -2(5x+4y=11) \end{cases}$$

Obteniendo: $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 10x-15y=45 \\ -10x-8y=-22 \end{cases}$

3 **Se suman ambas ecuaciones y se obtiene una ecuación de primer grado.**

Se suman las dos ecuaciones para reducir la variable x:

$$\begin{array}{rrcr} & \cancel{10x} & -15y & = & 45 \\ + & \cancel{-10x} & -8y & = & -22 \\ \hline & 0x & -23y & = & 23 \end{array}$$

4 **Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.** La que no hemos reducido.

Resolvemos la ecuación:

$$-23y=23 \quad \rightarrow \quad y=\frac{23}{-23}=-1$$

5 **El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones del sistema y calculamos la otra incógnita.** La que nos resulte más sencilla.

En la ecuación (1), sustituimos y por −1:

$$2x-3y=9 \quad \rightarrow \quad 2x-3(-1)=9$$

$$2x+3=9 \quad \rightarrow \quad 2x=9-3 \quad \rightarrow \quad 2x=6$$

$$x=\frac{6}{2}=3$$

6 **Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.**

La solución del sistema es:

$$x=3 \qquad y=-1 \quad \rightarrow \quad (x,y)=(3,-1)$$

Por tanto, el sistema es: $S.C.D.\{x=3;\ y=-1\}$

Cuando en un sistema multiplicamos alguna de las ecuaciones, o incluso ambas, por números, encontramos otro sistema, con la misma solución que el anterior. Por eso decimos que es un ***sistema equivalente***.

Se dice que **dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero lo es también del segundo y, recíprocamente, cada solución del segundo es también solución del primero.

$$\underbrace{\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=1 \end{cases}}_{\text{Sistema 1}} \rightarrow \begin{cases} 5(2x-3y=9) \\ -2(5x+4y=11) \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{cases} 10x-15y=45 \\ -10x-8y=-22 \end{cases}}_{\text{Sistema 2}}$$

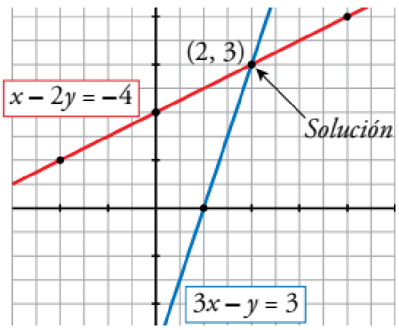
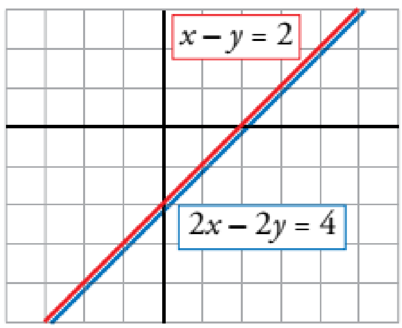
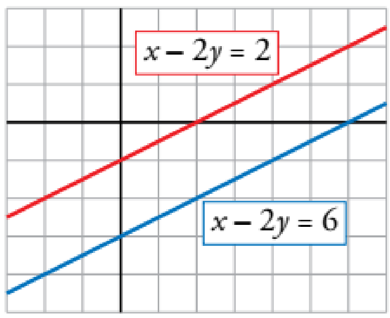
Los sistemas 1 y 2 son **sistemas equivalentes**, porque el segundo lo hemos conseguido multiplicando las ecuaciones del primero por 5 y −2 respectivamente.

Piensa y practica

8.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción.

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x+5y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-6y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+y=6 \\ 3x-2y=14 \end{cases}$

Podemos diferenciar los distintos tipos de sistemas sin necesidad de utilizar el método gráfico, para ello tenemos que observar a las expresiones que llegamos manipulando las distintas ecuaciones; si llegamos a expresiones del tipo $0x+0y=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$ diremos que el sistema es compatible indeterminado, (infinitas soluciones) y si llegamos a expresiones del tipo $0x+0y=k \quad \rightarrow \quad 0=k$, donde k es un número cualquiera (distinto de cero), diremos que el sistema es incompatible (Sin solución). Resumiendo:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES		
S.C.D.	**S.C.I.**	**S.I**
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Con una solución	***Infinitas soluciones***	***Sin solución***
$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$
		
Las rectas son secantes	Las rectas son coincidentes	Las rectas son paralelas
Manipulando las ecuaciones resolvemos el sistema y encontramos los valores de x e y.	Manipulando las ecuaciones llegamos a expresiones de la forma: $0x+0y=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$	Manipulando las ecuaciones llegamos a expresiones: $0x+0y=k \quad \rightarrow \quad 0=k$

5.05.- Sistemas de ecuaciones no lineales

En los sistemas de ecuaciones no lineales, a diferencia de los lineales, aparecen ecuaciones en las que hay incógnitas de grado mayor que uno, por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ (x-1)^2+y=3 \end{cases}$$

En el caso de sistemas de dos ecuaciones de dos incógnitas, las ecuaciones ya no serán dos líneas rectas. Una de ellas, o las dos, pueden ser parábolas, elipses, hipérbolas. La solución será los puntos en los que las dos ecuaciones se corten.

Un sistema de ecuaciones no lineal está formado por al menos una ecuación que no es de primer grado.

Este tipo de sistemas pueden tener **más de una solución** sin ser indeterminados y se resuelven aplicando los métodos de sustitución, igualación o reducción dependiendo del sistema.

Ejemplo

10.- Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones: $\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$ y de la ecuación **2)** despejamos la y, llegamos a: $y=\dfrac{12}{x}$

Si la sustituimos en la **1)**, tenemos $x^2+\left(\dfrac{12}{x}\right)^2=25$, que operando se transforma en : $x^2+\dfrac{144}{x^2}=25 \quad\rightarrow\quad x^4-25x^2+144=0$

una ecuación bicuadrada que haciendo $z=x^2$, da lugar a una de segundo grado: $z^2-25z+144=0 \quad\rightarrow\quad (z-16)\cdot(z-9)=0$

cuyas soluciones son $z_1=16$ y $z_2=9$ y deshaciendo el cambio, $x=\pm\sqrt{z}$, llegamos a: $x_1=-4$, $x_2=4$, $x_3=-3$ y $x_4=3$

Obtenidas las **x**, calculamos los valores de **y**: $y=\dfrac{12}{x} \quad\rightarrow\quad y_1=\dfrac{12}{-4}=-3 \quad y_2=\dfrac{12}{4}=3 \quad y_3=\dfrac{12}{-3}=-4 \quad y_4=\dfrac{12}{3}=4$

Por tanto se trata de un S.C.D. de soluciones $\{(-4,-3),\ (4,3),\ (-3,-4)\ \text{y}\ (3,4)\}$

Cuando las **ecuaciones tienen logaritmos**, lo habitual es intentar eliminarlos, bien agrupándolos, o bien mediante algún cambio de variable, veamos un ejemplo:

Ejemplo

11.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=11 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones: $\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\begin{cases} x+y=11 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$ y en la ecuación 2) aplicamos las propiedades de los logaritmos, llegamos a:

$\begin{cases} x+y=11 \\ \log x-\log y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ \log\dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\begin{cases} x+y=11 \\ \dfrac{x}{y}=10 \end{cases}$ que es un sistema equivalente al primero.

Si en la ecuación **2)** despejamos x: $\dfrac{x}{y}=10 \quad\rightarrow\quad x=10y$, y lo sustituimos en la ecuación **1)**, tenemos:

$$10y+y=11 \quad\rightarrow\quad 11y=11 \quad\rightarrow\quad y=1$$

Conocida la **y**, podemos calcular la x: $x=10y \quad\rightarrow\quad x=10\cdot 1=10$

Por tanto, se trata de un S.C.D. de soluciones (10,1)

Recuerda que en los logaritmos hemos de comprobar las soluciones

Si en el sistema aparecen **ecuaciones exponenciales**, bien se agrupan potencias y se igualan los exponentes, transformándolo en un sistema algebraico, o bien, se intenta un cambio de variable:

Ejemplo

11.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 5^{x+1}-3^y=16 \\ 5^{x-1}+3^{y+2}=82 \end{cases}$

Si hacemos los cambios de variable $\begin{cases} u=5^x \\ v=3^x \end{cases}$, llegamos a: $\begin{cases} 5\cdot 5^x-3^y=16 \\ \dfrac{5^x}{5}+9\cdot 3^y=82 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5u-v=16 \\ \dfrac{u}{5}+9v=82 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5u-v=16 \\ u+45v=410 \end{cases}$

que por reducción da $\begin{cases} u=5 \rightarrow 5^x=5 \rightarrow x=1 \\ v=9 \rightarrow 3^y=3^2 \rightarrow y=2 \end{cases}$

Por tanto, se trata de un S.C.D. de soluciones (1,2)

Piensa y practica

9.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

$$a)\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ 2x+y=11 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15} \\ 2x+y=13 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} \log(x)+2\log(y)=5 \\ 3\log(x)-\log(y)=1 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2^x+3^{y+2}=11 \\ 2^{x+1}-3^{y+1}=15 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x^2+3y^2=37 \\ xy=-10 \end{cases} \qquad f)\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=6 \\ (x-y)^2+y^2=64 \end{cases} \qquad g)\begin{cases} \log x-2\log(y-1)=1 \\ x-2y=14 \end{cases} \qquad h)\begin{cases} \log x-2\log y=1 \\ 3^x:3^y=27 \end{cases}$$

5.06.- Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Cuando se quiere resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita, habrá que resolver cada inecuación por separado. La solución del sistema será entonces el conjunto de valores que cumplen a la vez, todas las inecuaciones, es decir, la intersección de todos los intervalos.

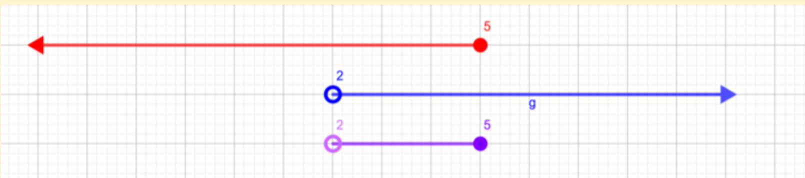
Ejemplo

12.- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1>2 \\ 5+x\geq 2x \end{cases}$

Resolvemos cada una de las inecuaciones por separado:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1>2 & \rightarrow & \dfrac{x}{2}>1 & \rightarrow & x>2 & \rightarrow & (2,+\infty) \\ 5+x\geq 2x & \rightarrow & 5\geq 2x-x & \rightarrow & 5\geq x & \rightarrow & x\leq 5 & \rightarrow & (-\infty,5] \end{cases}$$

Representamos las soluciones y vemos donde coinciden ambas:



Por tanto, la solución es el intervalo (2,5]

Resolver el sistema requiere calcular la intersección entre los intervalos solución; por ello, es aconsejable dibujarlos para poder visualizar dicha intersección. En ocasiones, se puede llegar a intervalos cuya intersección esté vacía, es decir, que no tengan ningún punto en común. **En este caso diremos que el sistema no tiene solución.**

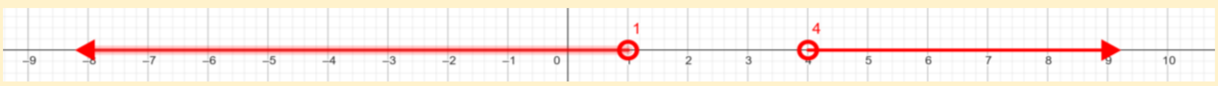
Ejemplo

13.- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x+3>2(x+1) \\ 2x+1>x+5 \end{cases}$

Resolvemos cada inecuación por separado:

$$x+3>2(x+1) \rightarrow x+3>2x+2 \rightarrow x-2x>2-3 \rightarrow -x>-1 \rightarrow x<1 \rightarrow (-\infty,1)$$

$$2x+1>x+5 \rightarrow 2x-x>5-1 \rightarrow x>4 \rightarrow (4,+\infty)$$



Buscamos un número que sea más pequeño que 1 y a la vez más grande que 4 y observamos que los intervalos no tienen ningún punto en común, es decir, la intersección está vacía.

Por tanto, el sistema no tiene solución.