

Factorizar un número es expresarlo como un producto de números primos.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

- ✓ Un número es divisible por 2 si es par, es decir si acaba en 0, 2, 4, 6, 8
- ✓ Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- ✓ Un número es divisible por 5 si acaba en 0 o en 5.
- ✓ Un número es divisible por 7 si al restar el número sin la cifra de las unidades con el doble de la cifra de las unidades, el resultado es cero o múltiplo de 7.
- ✓ Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre los dígitos que ocupan lugar par e impar es 0 ó múltiplo de 11.
- ✓ Un número es divisible por 13 si al restar el número sin la cifra de las unidades con nueve veces la cifra de las unidades, el resultado es cero o un múltiplo de 13.

M.C.D. Y m.c.m.

El **máximo común divisor (M.C.D.)** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes, para calcularlo descomponemos en factores primos ambos números y cogemos los factores que se repiten elevados al menor exponente.

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes a ellos, para calcularlo cogemos todos los factores, se repitan o no, elevados al mayor exponente.

01.- Encuentra todos los divisores de cada uno de los números: 8, 12, 15, 28, 36, 55, 60, 72, 80, 90 y 100.

02.- Aplicando los criterios de divisibilidad, marca con una x si alguno de estos números es divisible por:

Número	Es divisible por					
	2	3	5	7	11	13
104						
126						
143						
250						
450						
2.145						
15015						
88.990						

03.- En la clase de Educación Física hay 24 alumnos. ¿De cuántas maneras se podrán formar grupos iguales de alumnos sin que sobre ninguno? Razona tu respuesta.

04.- Rellena la tabla marcando con una x si los siguientes números son primos o compuestos:

	6	15	7	24	13	20	11	10
Primo								
Compuesto	X							

05.- María desea distribuir el agua de una garrafa de 12 litros en envases que contengan el mismo número de litros.

- a) ¿Qué capacidades tendrán los recipientes?
- b) ¿Cuántos necesitará en cada caso?

06.- ¿Verdadero o falso?

- a) Si m es divisible entre n, n es divisible entre m.
- b) Si a es distinto de b y divisible entre b, a es mayor que b.
- c) Si v es múltiplo de y, y es divisor de v.
- d) Si b cabe una cantidad exacta de veces en a, b es múltiplo de a.
- e) Si $m \cdot n = k$, m y n son divisores de k.
- f) Un número, si es impar, es primo.
- g) Todos los números primos, excepto el 2, son impares.

07.- Factoriza los siguientes números: 18; 24; 27; 28; 35; 36; 42; 48; 49; 54; 63; 64; 69; 75; 84; 100; 108; 143; 455; 1092.

08.- ¿Cuáles son los números comprendidos entre 200 y 400 que son a la vez divisibles por 4 y 5?

Sol: 220; 240; 260; 280; 300; 320; 340; 360; 380

09.- Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes grupos de números:

	Números	M.C.D.	m.c.m.
a)	12 y 36	12	36
b)	24 y 50	2	600
c)	54 y 60	6	540
d)	56 y 70	14	280
e)	148 y 156	4	5.772
f)	180 y 270	90	540
g)	75, 30 y 18	3	450
h)	27, 36 y 63	9	756
i)	1048, 786 y 3930	262	18.720
j)	27, 72, 81 y 108	9	648



10.- Alberto tiene 45 fichas rojas y 36 fichas verdes, y quiere apilarlas en columnas iguales, lo más altas que sea posible, y sin mezclar colores en la misma pila. ¿Cuántas fichas pondrá en cada montón?

Sol: En cada montón pondrá 9 fichas.

11.- En una parada de autobuses, un autobús pasa cada 18 minutos, otro cada 15 minutos y un tercero cada 8 minutos. ¿Cuándo se volverán a encontrar?

Sol: Dentro de 6 horas.

12.- ¿Cómo podemos envasar 40 litros de zumo de piña y 24 litros de zumo naranja en recipientes iguales de la mayor capacidad posible?, ¿Cuántos envases necesitaremos?

Sol: 8 litros, necesitamos 5+3 envases



13.- El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos. Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?

Sol: a las tres de la tarde.

En la panadería de la esquina hay napolitanas recién hechas cada 10 minutos, ensaimadas cada 15 minutos y rosquillas cada media hora. Si a las 12:00 pude comprar una de cada recién hechos. ¿A qué hora podré comprarlos otra vez?

Si las napolitanas se hacen cada 10 minutos, las ensaimadas cada 15 y las rosquillas cada 30, coincidirán como mínimo cada 30 minutos, así que nos piden calcular un múltiplo común de estos tres números, en concreto el mínimo común múltiplo de 10, 15 y 30. Así que los descomponemos en factores primos y cogemos los que se repiten y los que no con el exponente más grande:

$$\begin{array}{l}
 15|3 \\
 5|5 \rightarrow 15 = 3 \cdot 5 \\
 3| \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 10|2 \\
 5|5 \rightarrow 10 = 2 \cdot 5 \\
 1| \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 30|2 \\
 15|5 \\
 3|3 \rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
 1| \\
 \hline
 \end{array}$$

Por tanto, el M.C.D.(10, 15 y 30)=30, así que compraré de nuevo a las 12:30

14.- Tres aviones de línea regular salen del aeropuerto cada 3 días, cada 12 días y cada 18 días. ¿Cada cuántos días saldrán los tres aviones a la vez?

Sol: Cada 36 días.

15.- En dos calles de 144 m y 168 m cada una se quieren plantar árboles que estén igualmente espaciados. ¿Cuál es la mayor distancia posible entre cada árbol?

Sol: 24 metros.

16.- Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 seg. y un tercero cada minuto. Si a las 19:30 los tres coinciden. ¿a qué hora volverán a coincidir?, ¿cuántas veces coincidirán en los 20 minutos siguientes?
Sol: a) A las 19:33 h; b) 6 veces.

En un horno se han fabricado 2.400 magdalenas y 2.640 mantecados, que se desean comercializar en bolsas con el mismo número de unidades y sin mezclar ambos productos. ¿Cuántas magdalenas o cuántos mantecados se pueden poner en cada bolsa, teniendo en cuenta que el número debe ser superior a 15 e inferior a 30?

$$2.400 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \quad 2.640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Los divisores comunes de 2.400 y 2.640 que son mayores que 15 y menores que 30 son:

$$2^4 = 16 \quad 2^3 \cdot 3 = 24 \quad 2^2 \cdot 5 = 20$$

Por tanto, se pueden poner 16, 20 o 24 unidades en cada bolsa.

17.- Paco colecciona sellos de América y Europa. Los sellos de América los agrupa en sobres de 24 cada uno y no sobra ninguno, mientras que los sellos de Europa en sobres de 20 y tampoco sobran. Sabiendo que tiene el mismo número de sellos de América y de Europa, ¿cuántos sellos como mínimo hay en cada caja?
Sol: 120 sellos.

18.- Una vaquería quiere envasar 350 litros de leche desnatada, 300 litros de leche semidesnatada y 450 litros de leche entera en envases iguales de la mayor capacidad posible. ¿Qué capacidad deben tener estos envases?
Sol: 50 litros.

19.- En un pueblo la campana del ayuntamiento toca cada media hora y la de la iglesia cada $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán las dos campanas? ¿Cuántas veces coinciden al día?
Sol: Cada hora y media. 16 veces.

20.- Un campo rectangular de 360 m de largo y 150 m de ancho, está dividido en parcelas cuadradas iguales. El área de cada una de ellas es la mayor posible. ¿Cuál es la longitud del lado de cada parcela cuadrada?
Sol: 30 metros.

21.- Mi moto necesita que le cambien el aceite cada 6.000 km, el filtro del aire cada 15.000 km y la Bujía cada 20.000 km. ¿A qué número mínimo de kilómetros habrá que hacerle todos los cambios a la vez?
Sol: A los 60.000 Km.

22.- En una bahía hay tres faros que emiten sus destellos cada 20, 25 y 30 segundos, respectivamente. Si los tres coinciden emitiendo señales a las 11 de la noche, ¿a qué hora volverán a coincidir?
Sol: A las 11:05 de la noche.

23.- Se tienen tres tubos de 84; 270 y 330 cm³. ¿Cuál es el mayor volumen en cm³ que cabe un número exacto de veces en cada uno de ellos?
Sol: 6 cm³

24.- Tres barcos navegan entre las Islas Canarias cada 6, 9 y 12 días respectivamente, si coincidieron el día 19 de Julio, ¿Cuándo volverán a coincidir?
Sol: El 24 agosto.

En el almacén tenemos 100 cartones de zumo, 60 piezas de fruta y 40 bocadillos. Queremos guardarlos en cajas con el mismo número de objetos. ¿Cuántos artículos habrá en cada caja? ¿Cuántas cajas harán falta?

Para utilizar varias cajas, como el número de bocadillos es de 40, tiene que ser menor que 40, así que calculamos el máximo común divisor de 100, 60 y 40

$$M.C.D.(40, 60, 100) = \begin{cases} 40 = 4 \cdot 10 = 2^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 \\ 60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow MCD = 2^2 \cdot 5 = 20 \\ 100 = 10^2 = (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \end{cases}$$

Por tanto, meteremos 20 artículos en cada caja.

$$Y \text{ necesitaremos } \begin{cases} 40 : 20 = 2 \\ 60 : 20 = 3 \rightarrow 2 + 3 + 5 = 10 \text{ cajas} \\ 100 : 20 = 5 \end{cases}$$

29.- El M.C.D. de dos números es 6 y su m.c.m. es 120. Si uno de los números es 30. ¿Cuál es el otro?
Sol: El otro es el 24.

31.- ¿Cuál es el menor número que al dividirlo separadamente por 15, 20, 36 y 48, en cada caso, tiene resto 9?
Sol: El 729.

32.- Los soldados de un cuartel están comprendidos entre 780 y 820, y se pueden formar grupos de 16, 20 y 25 sin que falte ni sobre ninguno. ¿Cuántos soldados son?
Sol: 800.

33.- ¿Cuáles son los números inferiores a 100 divisibles a la vez por 2, 3 y 4?
Sol: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 y 96.

34.- Tenemos un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 150 y un tercero que la da cada 360 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal. a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir? b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
Sol: 30 horas. A las 15:00 del día siguiente.

35.- Para decorar una fiesta que vamos a celebrar, tenemos una cinta azul de 45 cm, una verde de 75 cm y otra blanca de 18 cm. Necesitamos cortar estas cintas en trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿Cuánto tendrán que medir estos trozos? ¿Cuántos trozos de cada color tendremos?
Sol: 3 metros, 15 Azules, 25 Verdes y 6 Blancos.

36.- María y Jorge tienen 25 bolas blancas, 15 azules y 90 rojas y quieren hacer con ellas el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola. a) ¿Cuántos collares iguales pueden hacer? b) ¿Cuántas bolas de cada color tendrá cada collar?
Sol: 26 collares de 5 bolas.

37.- Aída quiere comenzar a vender bombones. Con lo que aprendió en su taller de chocolatería, hizo 32 bombones de trufa, 24 de frambuesa y 28 de manjar. ¿Cuántos paquetes con la misma cantidad de bombones de cada tipo puede hacer?
Sol: 21 paquetes de 4 bombones.

38.- Una de las unidades del grupo scout necesita preparar cintas para una de las pruebas del campamento. Si tienen dos cordeles, uno de 94 cm y otro de 64 cm, ¿cuál es el mayor tamaño en que pueden cortar las cintas de ambos cordeles, para que sean todas iguales?
Sol: 2 cm.

Fátima organiza una fiesta para sus amigos, para ello, prepara unas tarjetas de invitación que enviará en sobres por correo. Las tarjetas se venden en paquetes de 6 unidades y cuestan 20 dh el paquete. Los sobres se venden en paquetes de 8 y cuestan 10 dh el paquete. ¿Cuál es el número mínimo de personas que invitará para que no le sobren ni tarjetas ni sobres?

Si los sobres se venden de 8 en 8 y las tarjetas de 6 en 6, tenemos que comprar el menor de los múltiplos comunes a estos dos números, es decir el m.c.m. de 6 y 8 para que no sobren ni sobres ni tarjetas.

$$\begin{matrix} 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \end{matrix} \rightarrow m.c.m.(6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24 \text{ personas}$$

Para calcular el mínimo común múltiplo, una vez factorizados los números, cogemos los que se repiten y los que no se repiten con el mayor exponente, y en este caso serían el 2³ y el 3.

Así que Fátima invitará a 24 personas.

¿Cuánto se gastará en las invitaciones?

- Si cada paquete de tarjetas cuesta 20 dh y se compran 24:6=4, en tarjetas se gasta 20·4=80 dh
- Si cada paquete de sobres cuesta 10 dh y se compran 24:8=3, en sobres se gasta 10·3=30 dh

Por tanto, Fátima se gasta 80+30 = 110 dh

39.- Diego ha iniciado un tratamiento médico para su alergia. Debe tomar tres medicamentos: unas pastillas, un jarabe y una crema. Las pastillas las debe tomar cada tres horas, el jarabe cada cuatro y la crema aplicarla cada dos horas. Si Diego tomó todos los medicamentos a las 8:00 de la mañana, ¿a qué hora los volverá a tomar a la vez?
Sol: A las 8 de la tarde.

40.- Rosa tiene cubos azules de 55 mm de arista y cubos rojos de 45 mm de arista. Apilando los cubos en dos columnas, una de cubos azules y otra de cubos rojos, quiere conseguir que las dos columnas sean iguales. ¿Cuántos cubos, como mínimo, necesita de cada color?
Sol: 9 Azules y 11 Rojos.

41.- Juan tiene que poner un rodapié de madera a dos paredes de 12 m y 9 m de longitud. Para ello ha averiguado la longitud del mayor listón de madera que cabe en un número exacto de veces en cada pared. ¿Cuál será la longitud de este listón?
Sol: 3 m.

42.- Queremos cerrar una parcela rectangular que mide 36 m de largo por 28 m de ancho, colocando estacas que estén situadas a la misma distancia las unas de las otras. Si en cada una de las cuatro esquinas del terreno tiene que haber una estaca y pretendemos que el número de estacas sea el mínimo posible, ¿cada cuántos metros deberemos colocarlas? ¿Cuántas estacas necesitaremos?
Sol: Cada 4 metros, y necesitaremos 28 estacas